
CALÇADAS DE PORTUGAL

Simetria

passo a passo

ANA CANNAS DA SILVA

step by step

Symmetry

SIDEWALKS OF PORTUGAL



Índice

Prólogo	13
Tapetes Cristalizados	16
A Origem da Calçada Portuguesa	28
A Arte do Calceteiro	38
Pelo Mundo Afora	54
Matemática Mente	62
Aspetos de Simetria	74
Padrões e Frisos no Plano	94
Rota da Simetria	112
Para Além da Simetria	138
Bibliografia	150
Agradecimentos	152
Biografia	155

Contents

13	Prologue
17	Crystallized Carpets
29	The Origin of Portuguese Cobblestone Sidewalks
39	The Art of the Paver
55	Throughout the World
63	Mathematical Mind
75	Symmetry Features
95	Planar Patterns and Friezes
113	Tour of Symmetry
139	Beyond Symmetry
150	References
152	Acknowledgments
155	Biography





6 Efeito tridimensional na Praça da República, em Elvas.

Three-dimensional effect in Praça da República in Elvas.

7 Passear sobre o mar em Santa Cruz, Madeira.

A walkway on the sea of Santa Cruz, Madeira.

8 Xadrez em frente ao portal manuelino da Igreja de São João Batista, em Tomar.

Chessboard in front of the church door in *manuelino* style [Portuguese gothic style] of Igreja de São João Batista in Tomar.



9 Zebra na Rua Machado dos Santos, em Leiria.

A zebra pattern in Rua Machado dos Santos in Leiria.

10 Jets de luz na Praça do Marquês de Pombal, em Vila Real de Santo António.

Jets of light in Praça do Marquês de Pombal in Vila Real de Santo António.

11 Miradouro da Ponta da Fonte Grande, em Ponta Delgada, Açores.

Belvedere in Ponta da Fonte Grande in Ponta Delgada, Azores.

Como se Navegasse

Lisboa dita por José Cardoso Pires (1925-1998)
em *Lisboa, Livro de Bordo*:

Logo a abrir, apareces-me pousada sobre o Tejo como uma cidade de navegar. Não me admiro: sempre que me sinto em alturas de abranger o mundo, no pico dum miradouro ou sentado numa nuvem, vejo-te em cidade-nave, barca com ruas e jardins por dentro, e até a brisa que corre me sabe a sal. Há ondas de mar aberto desenhadas nas tuas calçadas; há âncoras, há sereias. O convés, em praça larga com uma rosa-dos-ventos bordada no empedrado, tem a comandá-lo duas colunas saídas das águas que fazem guarda de honra à partida para os oceanos. Ladeiam a proa ou figuram como tal, é a ideia que dão; um pouco atrás, está um rei-menino montado num cavalo verde a olhar, por entre elas, para o outro lado da Terra e a seus pés vêem-se nomes de navegadores e datas de descobrimentos anotados a basalto no terreiro batido pelo sol. Em frente é o rio que corre para os meridianos do paraíso. O tal Tejo de que falam os cronistas enlouquecidos, povoando-o de tritões a cavalo de golfinhos.



19



18



24

TAPETES CRISTALIZADOS



21

Maré baixa refrescante no Rossio dos Olivais, em Lisboa.

18

Refreshing low tide in Rossio dos Olivais in Lisbon.

Mostrengo na calçada, por Pedro Proença, no Parque das Nações, Lisboa.

19

Beast in the cobblestone pavement by Pedro Proença in Parque das Nações, Lisbon.

Sereia na Praça Luís de Camões, em Lisboa.

20

Mermaid in Praça Luís de Camões, Lisbon.

Chão monumental. Tudo começou com o mar de pedra que transbordou do coração de Lisboa para o mundo afora: a calçada com o motivo Mar Largo foi introduzida no Rossio em 1849.

21

Monumental floor. The Portuguese-style pavement began with a sea of stone which overflowed from the heart of Lisbon across the world: the cobbled pavement with the pattern Wide Sea was introduced in the Rossio square in 1849.

Rosa-dos-ventos junto ao Padrão dos Descobrimentos, em Lisboa, oferecida pela República da África do Sul.

22

Wind rose near the Discoveries Monument in Lisbon, a gift from the Republic of South Africa.

25

CRYSTALLIZED CARPETS

As If It Sailed

Lisbon described by José Cardoso Pires (1925-1998)
in *Lisboa, Livro de Bordo* [Lisbon Logbook]:

Right at the opening, you [Lisbon] show up landed over the Tagus as a city to navigate. I am not surprised: when I feel myself high enough to encompass the world, at the tip of a belvedere or sitting on a cloud, I perceive you as city-ship, boat with streets and gardens inside, and even the breeze which flows tastes to me like salt. There are waves of open sea drawn on your cobblestone pavements; there are anchors, there are mermaids. The deck, in a wide square with a compass rose embroidered in the cobblestones, is led by two columns sprouting out of the water which form a guard of honor upon departure into the oceans. They flank the bow or thus appear, that's what it seems; a bit behind, there is a child-king riding a green horse looking, between those columns, towards the other side of Earth and at his feet one can find names of sailors and dates of discoveries written down in basalt on the yard beaten by the sun. Ahead there is the river flowing towards the meridians of paradise. That same Tagus talked about by the deranged chroniclers, populating it with dolphin-riding tritons.



Maresia do Rossio

Em 1842, o tenente-general Eusébio Pinheiro Furtado (1777-1861), enquanto governador de armas do Castelo de São Jorge, teve a inovadora iniciativa de ocupar os prisioneiros que aí estavam sob a sua responsabilidade no calcetamento em mosaico de alguns acessos ao castelo.

Os prisioneiros chamavam-se nesse tempo «grilhetas», por andarem acorrentados. Embora sem opção, transformaram-se nos primeiros calceteiros, tendo o seu trabalho sido bastante aplaudido. Trabalhavam horas a fio ao sol ou à chuva com parca alimentação. A Câmara Municipal de Lisboa passou depois a conceder-lhes uma modesta gratificação monetária, como reconhecimento pelos seus serviços e incentivo à sua continuação.

O padrão escolhido resumiu-se a um simples ziguezague a preto e branco, usando calcário e basalto disponíveis. O resultado causou sensação na época, pelo efeito decorativo, utilidade prática e baixo custo do sistema. O êxito foi tal que a técnica logo se generalizou.

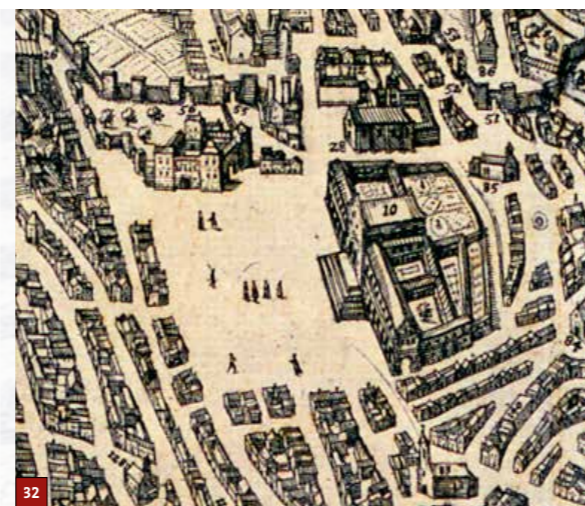
Foram encomendadas mais obras em moldes semelhantes, salientando-se o revestimento de mais de oito mil metros quadrados na importante Praça D. Pedro IV,



Perspetiva de Lisboa no século XVI, *Olissippo quae nunc Lisboa (...)*, 1593, Georgio Braunio.

31 32

View of Lisbon in the sixteenth century, *Olissippo quae nunc Lisboa (...)*, 1593, Georg Braun.



O ROSSIO

A palavra «rossio» designa um terreno largo e público (*commons*, em inglês). O Rossio em Lisboa é um lugar espaçoso, do povo, que tem sido ponto de encontro, sala de visitas, palco de revoltas e de celebrações ao longo dos séculos. Dos seus antigos e mais expressivos edifícios, gravemente danificados no grande terramoto de 1755, salientam-se dois:

- o Hospital Real de Todos os Santos, mandado erguer em 1492, ocupando todo o lado este, que serviu como principal instituição de saúde e de estudo médico em Lisboa ao longo de dois séculos e meio;
- o Palácio dos Estaus, no lado norte, mandado erguer em 1449 para albergar embaixadores e nobres sem residência própria (daí o nome relacionado com estalagem). No princípio do século XVI, o rei D. Manuel guardava animais exóticos nas suas cavaliças, entre os quais elefantes, e em 1571 instalou-se no edifício o Tribunal da Inquisição. Tendo sobrevivido com vastos danos ao terramoto, o palácio veio a sucumbir a um grande incêndio em 1836.

O local do antigo Palácio dos Estaus é ocupado atualmente pelo Teatro Nacional D. Maria II (século XIX), e o do antigo Hospital Real de Todos os Santos por edifícios comerciais e pela Praça da Figueira (século XVIII).

30

A ORIGEM DA CALÇADA PORTUGUESA



Vista de Lisboa no século XVI (pormenor), gravura publicada em *Civitates orbis terrarum*, 1572, Georgio Braunio.

View of Lisbon in the sixteenth century (detail), engraving published in *Civitates orbis terrarum*, 1572, Georg Braun.

THE ROSSIO

Rossio means *Commons*, that is, a wide and public land. The Rossio in Lisbon is a spacious and popular place, which over the centuries has served as meeting point, drawing room, and stage for rebellions and celebrations. Among its ancient and most significant buildings severely damaged in the great earthquake in 1755, two stand out:

- the Hospital Real de Todos os Santos [Royal Hospital of All Saints], whose construction was commanded in 1492, which occupied the whole eastern side of Rossio and which served as main health institution and of medical study in Lisbon for two and a half centuries;
- the Palácio dos Estaus [Estaus Palace] in the north side of Rossio, whose construction was commanded in 1449 to host ambassadors and noblemen without their own residence, hence the name related to *estalagem* [inn]. In the beginning of the sixteenth century, King Manuel I kept exotic animals (including elephants) in its stables, and in 1571 the Inquisition Court was settled in this building. Having survived the earthquake with extensive damage, this palace succumbed to a large fire in 1836. The site of the old Palácio dos Estaus is now occupied by the national theater Teatro Nacional D. Maria II (nineteenth century) and the site of old Hospital Real de Todos os Santos by commercial buildings and by the square Praça da Figueira (eighteenth century).

31

THE ORIGIN OF PORTUGUESE COBBLESTONE SIDEWALKS

Ocean Scent of Rossio

In 1842, Lieutenant-General Eusébio Pinheiro Furtado (1777-1861), while Governor of St. George's Castle in Lisbon, took the novel initiative of engaging the prisoners under his command in the mosaic paving of roads to the castle [B]. The prisoners were then known as *grilhetas* [shackles] because they went around chained. Without choice, they became the first *calceteiros* [pavers], and their work was greeted by substantial applause. They worked long hours with meagre nourishment, exposed to the sun and rain. Later, the City Hall awarded them a modest financial bonus as acknowledgment for their services and encouragement of further work.

The chosen pattern was a simple black and white zigzag using the limestone and basalt at hand. The result was striking for its decorative effect, practical usefulness and low cost. The success was such that it rapidly spread.

Similar works were ordered, notably the paving of over eighty thousand square feet in the major square Praça D. Pedro IV in Lisbon, popularly known as Rossio. The paving of Rossio took place between 1846 and 1849 in parallel with the construction of the national theater Teatro Nacional D. Maria II.



Praça de D. Pedro IV, ou Rossio, em litografia colorida do século XIX.

34

Postcard of Praça D. Pedro IV, or Rossio (Lisbon), in twentieth century colored lithograph.

Mestres Calceteiros

Os trabalhadores especializados em Portugal na colocação da calçada portuguesa denominam-se «mestres calceteiros». Desde o século XIX que a Câmara Municipal de Lisboa emprega mestres calceteiros. O trabalho destes artesãos é árduo, moroso, infinito, mas nobre e bonito. Não é para fracos passar longas horas prostradamente partindo e encaixando peças num *puzzle* de pedra, ao sol e à chuva, para depois o trabalho ser pisado por muitos que nele pouco reparam.



ESCOLA DE CALCETEIROS

Em 1986, a Câmara Municipal de Lisboa (CML) criou uma escola de formação de mestres calceteiros – a Escola de Calceteiros –, com o objetivo de melhorar o profissionalismo, a versatilidade e a imagem dos calceteiros, assim como de manter vivas nomenclatura e técnicas tradicionais e, ainda, de melhorar as perspetivas de emprego destes trabalhadores especializados.

A Escola de Calceteiros formou desde 1986 cerca de 150 calceteiros, a grande maioria dos quais acabou por procurar outros trabalhos com melhor remuneração. Assim, apesar deste esforço de formação, escasseiam há anos calceteiros profissionais capazes de executar, manter e restaurar calçada corretamente, com pedras adequadamente talhadas e encaixadas. Tendo sido uma atividade para centenas de artesãos, a arte de calcetar vê-se agora restrita a poucas dúzias de profissionais, que já nem chegam para fazer a manutenção das calçadas existentes.

Paving Masters

The workers in Portugal specialized in producing *calçada portuguesa* are called *mestres calceteiros* [paving masters]. The Lisbon Municipal Council has employed *mestres calceteiros* since the nineteenth century. The work of these craftsmen is hard, lengthy, and infinite, yet noble and beautiful. It is not for the weak to spend long hours in all weather conditions crouching, breaking, and fitting pieces into a stone puzzle, which afterwards will be stepped upon and often unnoticed.



Calceteiros a trabalhar em Lisboa, no início do século XX.

43 44
45 46

Pavels working in Lisbon in the early twentieth century.

Herança Cultural

A calçada portuguesa foi inovadora ao introduzir arte pública no chão. A arte apazigua a destruição e a discórdia, inspira as descobertas, enriquece o espírito, potencia o crescimento e eleva a qualidade da vida. O estímulo da sensibilidade cultural e estética é inestimável numa sociedade cujo êxito depende da criatividade, contribuição e civismo de todos. O cuidar das calçadas pode ser um desafio, mas o seu caráter de arte pública e emblemática é inegável.

Tal como o fado, a calçada portuguesa nasceu humilde, de antigas tradições e influências, temperada de profundos sentimentos. Tal como o fado, atingiu ou deveria atingir o estatuto de património que identifica a cultura portuguesa e conquistou prestígio nacional e internacional. Tal como o fado, ela não é para todas as ocasiões.

Nos largos e praças planas, as calçadas realizam-se com maior expressão e orgulho, e sente-se a sua falta no centro de uma vila ou cidade. Mas em rampas e ruas demasiado íngremes necessitam de adaptações. Por exemplo, uma ideia de bom senso levou ao incorporar de pedras de granito para aumentar o atrito e assim mitigar o maior inconveniente do dito «vidraço» (calcário polido), que é o tornar-se escorregadio quando molhado.

A adaptação da calçada ou a sua substituição pontual por outros pavimentos que se harmonizem com ela não porá em causa o futuro da calçada artística de qualidade. Pelo contrário, o respeito que a calçada nos merece impõe a tomada de decisões racionais e a busca de soluções inovadoras e equilibradas, demonstrando que esta técnica está e continuará viva, e que não deve ser banalizada. Indiferença nunca se sentirá, e algumas críticas subsistirão, mas nenhuma sociedade civilizada estará interessada em destruir o seu património e identidade cultural.



A efígie de Amália Rodrigues, da autoria do artista urbano Vhils (Alexandre Farto), no bairro de Alfama, Lisboa.

The effigy of Amália Rodrigues by the urban artist Vhils (Alexandre Farto) in Alfama, Lisbon.

Monumento ao calceteiro, da autoria de Sérgio Stichini, Rua da Vitória, Lisboa.

Monument to the paver by Sérgio Stichini, Rua da Vitória, Lisbon.

Monumento ao calceteiro, da autoria de Eduarda Filhó, em Fanhões, «terra de calceteiros».

Monument to the paver by Eduarda Filhó, in Fanhões, "land of pavers".

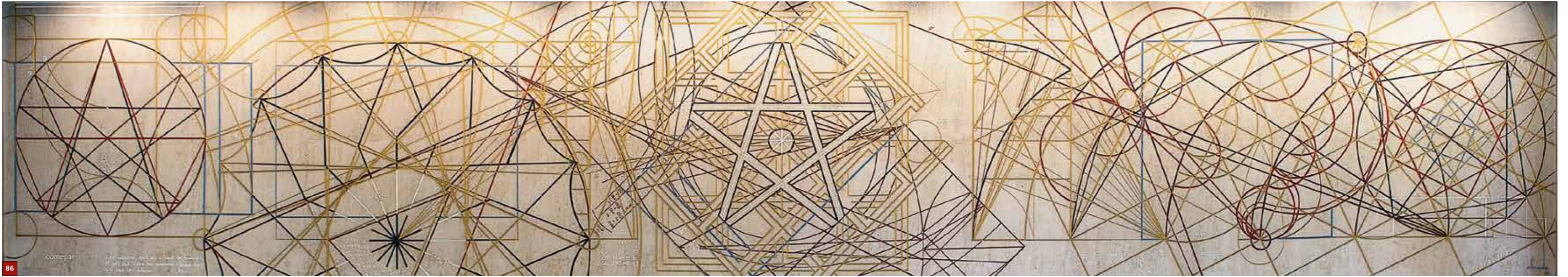
Cultural Heritage

The *calçada portuguesa* innovated by introducing public art on the ground. Art appeases destruction and discord, inspires discoveries, enriches the spirit, enhances growth and increases quality of life. The stimulation of cultural and aesthetic sensitivity is priceless in a society whose success depends on the creativity, contribution, and civility of all. Looking after the sidewalks may be a challenge, but their character of public and emblematic art is undeniable.

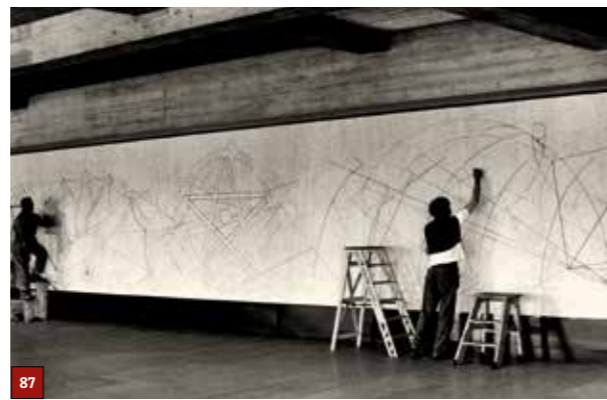
Like *Fado*, the *calçada portuguesa* was born humble, from ancient traditions and influences, seasoned with deep feelings. Like *Fado*, it reached or should reach the heritage status that identifies the Portuguese culture and that has won national and international prestige. Like *Fado*, it is not for all occasions.

It is in squares that cobblestone pavements rise to greater expression and pride, and their absence is noted in the center of a town or city. But on ramps and streets too steep, they should be adapted. For example, good judgement brought about the incorporation of granite stones so to increase friction and thus mitigate the greatest drawback of the *vidraço* [polished limestone] which is to become slippery when wet.

The adjustment or occasional replacement of *calçada* pavements by other types of pavement which blend well with the former does not challenge the future of artistic *calçadas*. On the contrary, the respect that the *calçadas* deserve requires making rational choices and searching for innovative and balanced solutions, proving that this technique is and will remain alive. Indifference will never be felt and some criticism will subsist, but no civilized society should want to destroy its heritage and cultural identity.

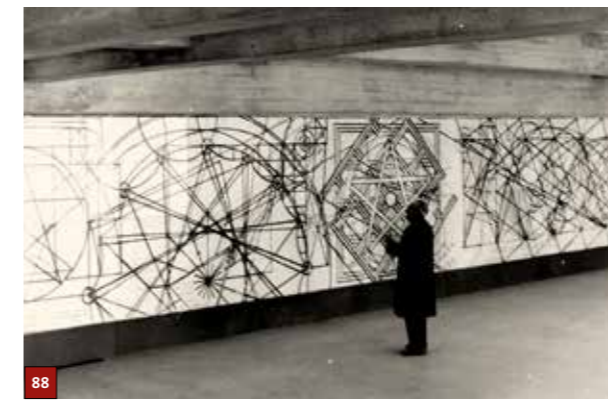


mais profundamente à arte, enquanto o mundo ia sendo descoberto. E a descoberta desse mundo clamava pela matemática. Naquela época, a maneira mais natural de navegar no alto-mar era manter um ângulo constante com o norte indicado pela bússola, ou seja, seguir uma *linha de rumo*, também designada «curva loxodrómica». Em Portugal, o matemático Pedro Nunes (1502-1578) ganhava fama estudando estas curvas sobre uma esfera com dois polos escolhidos. Uma linha de rumo é precisamente uma curva que corta todos os meridianos, ou seja, todos os círculos máximos passando pelos polos, segundo um mesmo ângulo. Galileu Galilei (1564-1642) diria que «o universo não pode ser lido antes de termos aprendido a linguagem e de nos termos familiarizado com os símbolos em que está escrito. Está escrito na linguagem matemática, e as letras são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível compreender uma única palavra». Não eram asserções triviais para a época, pois eram acusadas de violar os cânones, constituindo motivo de perseguição. Quando no final dos anos 60 a Fundação Calouste Gulbenkian encomendou ao mestre do modernismo Almada Negreiros (1893-1970) um grande painel para decorar o principal átrio do seu novo edifício-sede em Lisboa, o artista optou por uma síntese de estudos de «número» que tinha feito ao longo de mais de cinquenta anos, e que se veio a tornar uma celebração da matemática. Reza a história que foi tal o empenho e tão grande a obsessão de Almada Negreiros relativamente a esta obra que um médico lhe terá dito: «Você está-se a matar!» Ao que Almada terá respondido: «Mas se não fizer isto, morro!» *Começar* foi o título que Almada deu a este seu derradeiro trabalho.



87 O painel *Começar*, de Almada Negreiros, no átrio da entrada principal do edifício-sede da Fundação Gulbenkian em Lisboa, contém uma série de desenhos geométricos, incluindo pentagramas que lembram a secção áurea e o *Homem de Vitruvius*.

86 The panel *Começar* [Beginning] by Almada Negreiros, in the main entrance lobby of the headquarters building of Gulbenkian Foundation in Lisbon, contains a number of geometric designs including pentagrams reminiscent of the golden ratio and the *Vitruvian Man*.



87 88 Almada Negreiros durante a execução do painel *Começar*, no átrio da Fundação Calouste Gulbenkian, em 1969.

Almada Negreiros during engraving of the panel *Começar*, in the lobby of the Gulbenkian Foundation in 1969.

high seas was to maintain a constant angle (bearing) relative to the magnetic north pointed by a compass, that is, to follow a rhumb line, also known as a loxodromic curve. In Portugal, the mathematician Pedro Nunes (1502-1578) gained fame studying these curves on a sphere with two chosen poles. A rhumb line is precisely a curve that makes an equal angle with every meridian, that is, with every great circle passing through the poles. Galileu Galilei (1564-1642) would claim that “[the universe] cannot be read until we have learnt the language and become familiar with the characters in which it is written. It is written in mathematical language, and the letters are triangles, circles, and other geometrical figures, without which means it is humanly impossible to comprehend a single word.” These were nontrivial assertions at the time, because they violated the canons and carried the likelihood of persecution. When, in the late sixties, the Gulbenkian Foundation commissioned from the modernism master Almada Negreiros (1893-1970) a large panel to decorate the main lobby of its new headquarters in Lisbon, the artist opted for a synthesis of his studies of “number” spanning more than fifty years, which turned into a celebration of mathematics. Legend has it that such was the commitment and obsession of Almada Negreiros regarding this work that a doctor would have told him: “You are killing yourself!” To which Almada would have replied: “But if I do not do it, I will die!” *Começar* [Beginning] was the title Almada gave to this last work of his.

que apresenta dois eixos de simetria. Uma estrela-do-mar também apresenta simetria por reflexão, em que agora se encontram mais que dois planos de reflexão. Um encontro de espelhos é o princípio de um caleidoscópio clássico, concretamente o encontro de três espelhos formando entre si ângulos de 60 graus. Posicionando entre os espelhos um qualquer objeto, observa-se uma imagem que goza de simetria por reflexão. Fica-se com a ilusão de um número infinito de centros onde se encontram espelhos, reproduzindo esses centros os três vértices do triângulo-base original. O padrão da calçada desenhado nos anos 70 por Eduardo Nery (1938-2013) na Praça do Município em Lisboa pode ser visto como produzido por um caleidoscópio, onde agora os três espelhos se encontram com ângulos de 90, 45 e outra vez 45 graus. Uma pequena experiência doméstica verifica esta asserção (figura 104). O padrão desta calçada, quando expandido, ignorando o redondel central, forma assim uma imagem «caleidoscópica» (figura 105). Imaginar um espelho na imagem é a maneira mais fácil de verificar se um dado eixo (no caso de figuras planas) ou um dado plano (no caso de objetos tridimensionais) é um eixo ou plano de simetria. Quando a imagem de metade do objeto encostado ao espelho coincide com a imagem do objeto de partida, o eixo ou plano do espelho constitui um eixo ou plano de simetria.

ASSINATURA DE UMA SIMETRIA POR REFLEXÃO

Tal como se usam dígitos para expressar números, e símbolos para exprimir operações matemáticas, utilizam-se símbolos para representar os tipos de simetria. Para isso, foram escolhidos símbolos mnemónicos que ajudam a elucidar sobre a simetria envolvida. Consegue-se assim descrever clara e sucintamente o tipo de simetria, mediante o que se chama uma «assinatura» simbólica. O tipo de simetria da cadeira da figura 95, do polvo da figura 97, bem como das letras A ou D será simbolizado pela estrela *. A estrela * indica assim a presença de simetria por reflexão. Uma vez que a letra H apresenta *dois* eixos de simetria por reflexão, que se cruzam no centro da letra, simbolizamos o seu tipo de simetria pela assinatura * 2. Em geral, quando vários eixos de simetria se encontram, tal como na imagem de um caleidoscópio, registamos também o número de espelhos que se cruzam em cada ponto. Se a figura apresentar um número a ($= 2, 3, 4, \dots$) de eixos de simetria por reflexão que se cruzam num ponto, incluímos então o símbolo * a na sua assinatura. Para auxiliar a memória, o símbolo * sugere pela sua forma o cruzamento de «retas-espelho».



A deslumbrante calçada na Praça do Município, em Lisboa.

Fascinating pavement in Praça do Município in Lisbon.

A confluence of mirrors is the principle of a classic kaleidoscope, namely the arrangement of three mirrors meeting each other with angles of 60 degrees. Placing any object between these mirrors creates a pattern endowed with reflection symmetry. This gives the illusion of an infinite number of centers where mirrors meet, replicating the three vertices of the original base triangle.

The sidewalk pattern designed in the seventies by Eduardo Nery (1938-2013) for Praça do Município in Lisbon can be regarded as being produced by a kaleidoscope, where now the three mirrors meet with angles of 90, 45 and again 45 degrees. A simple experiment at home confirms this assertion (figure 104). The pattern of this sidewalk, expanded ignoring the central island, reveals itself as a “kaleidoscopic” image (figure 105).

To imagine a mirror in the picture is the easiest way to check whether a given axis (in the case of plane figures) or a given plane (in the case of three-dimensional objects) is an axis or plane of symmetry. When the image of half of the object leaned against the mirror coincides with the image of the starting object, then the mirror axis or plane is indeed an axis or plane of symmetry.

SIGNATURE OF A REFLECTION SYMMETRY

Like digits are used to express numbers and symbols are used for mathematical operations, symbols are used to represent types of symmetry. Mnemonic symbols were chosen to help elucidate what is the symmetry involved. One can thus clearly and succinctly describe a type of symmetry in a symbolic signature.

The type of symmetry of the chair in figure 95, of the octopus in figure 97, and of the letters A and D will be symbolized by the star *. The star * thus indicates the presence of reflection symmetry.

Since the letter H enjoys two symmetry axes, which intersect at the center of the letter, we symbolize the type of its symmetry by the signature * 2. In general, when multiple symmetry axes meet, like in the image of a kaleidoscope, we register also the number of mirrors which intersect at each point. If the figure presents a number a ($= 2, 3, 4, \dots$) of symmetry axes intersecting at a point, then we include the symbol * a in its signature. To aid memory, the symbol * suggests by its form the intersection of “mirror lines”.

For objects and images, instead of saying reflection planes and axes, respec-

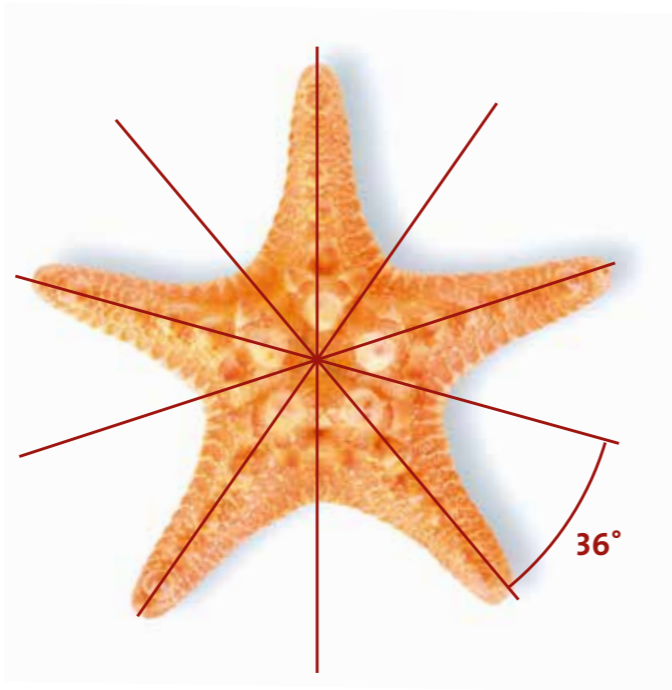
Quanto a objetos e imagens, em vez de referir planos e eixos de reflexão, respetivamente, preferimos dizer simplesmente *espelhos*. Afinal, um espelho sugere sempre reflexão, a qual pode ser encarada relativamente a um plano, como o vulgar espelho da casa de banho, ou relativamente a um eixo, se analisarmos figuras planas. Considere-se um número a de espelhos, no sentido do parágrafo anterior. Quando estes espelhos se cruzam, dividem a figura em $2a$ setores entre eixos, pelo que o ângulo formado por dois espelhos vizinhos será de $\frac{180}{a}$ graus.

Por exemplo, a assinatura do tipo de simetria da estrela-do-mar é $*5$ (figura 103), e aí o ângulo entre dois espelhos (*i.e.*, eixos de reflexão) vizinhos é de $\frac{180}{5} = 36$ graus.

Quando há mais do que um centro onde dois ou mais espelhos se cruzam, utiliza-se um algarismo para um centro de cada tipo, indicando quantos espelhos aí se cruzam. Assim, a assinatura $*a\ b\ c$ simboliza o tipo de simetria em que a espelhos se cruzam num ponto, enquanto b espelhos se cruzam noutro ponto e c espelhos noutro ainda. O ângulo entre dois espelhos vizinhos será de $\frac{180}{a}$, $\frac{180}{b}$ ou $\frac{180}{c}$ consoante o ponto de cruzamento.

Por exemplo, a assinatura do tipo de simetria da imagem do caleidoscópio da figura 102 é $*3\ 3\ 3$, pois apresenta três centros distintos, em cada um dos quais três espelhos (ou seja, planos de reflexão) se cruzam. Cada um dos algarismos 3 corresponde a um dos centros. A imagem do caleidoscópio pode ser dividida em triângulos equiláteros, cujos ângulos são de $\frac{180}{3} = 60$ graus.

Na linguagem moderna, dá-se o nome de «espelho» (em inglês usa-se o termo *kaleidoscope*) ao aspeto de simetria associado à invariância por reflexão num eixo ou num plano, simbolizando-se tal aspeto com uma estrela $*$.



103

A imagem desta estrela-do-mar apresenta cinco eixos de simetria por reflexão que se cruzam no centro da estrela. Assim, diz-se que a sua simetria tem assinatura $*5$.

The image of this starfish has five axes of reflection symmetry, which cross in the center of the star. Therefore we say that its symmetry has signature $*5$.



102

A imagem deste caleidoscópio apresenta três tipos de centros – centros vermelhos, castanho-claros e castanho-escuros –, em cada um dos quais três espelhos se cruzam. Assim, diz-se que a sua simetria tem assinatura $*3\ 3\ 3$.

The image of this kaleidoscope exhibits three types of centers – red, light brown and dark brown centers – in each of which three mirrors cross. Therefore, we say that its symmetry has signature $*3\ 3\ 3$.



104

Simulação caseira do padrão da Praça do Município, feita com três espelhos que formam um triângulo retângulo isósceles (ou seja, com ângulos internos de 90, 45 e 45 graus) e uma cartolina triangular reproduzindo um excerto não simétrico.

Homemade simulation of the pattern in Praça do Município in Lisbon using three mirrors forming an isosceles right triangle (a triangle with internal angles of 90, 45 and again 45 degrees) and a triangular cardboard replicating a nonsymmetrical excerpt.

Os eixos de reflexão, ditos *espelhos*, estão assinalados a vermelho neste padrão extrapolado da calçada na Praça do Município, em Lisboa. Assim se nota que estes eixos se encontram em três tipos de centros: centros dos quadrados negros, centros dos quadrados brancos, e vértices, onde se encontram quatro triângulos maiores (dois negros e dois brancos). Nos centros dos quadrados negros ou brancos cruzam-se quatro eixos de reflexão, enquanto nos pontos de encontro de quatro triângulos só se cruzam dois eixos. Assim, diz-se que a sua simetria tem assinatura $*4\ 4\ 2$.

The reflection axes, called *mirrors*, are marked in red in this pattern extrapolated from the sidewalk in Praça do Município in Lisbon. In this manner, we can detect the three types of crossing centers: the black square centers, the white square centers, and the vertices where four large triangles meet (two black and two white). In black or white square centers, there are four reflection axes intersecting, while in the vertices where four triangles meet there are only two axes intersecting. We, thus, say that its symmetry has signature $*4\ 4\ 2$.

tively, we prefer to simply say *mirrors*. After all, a mirror always suggests reflection, which can be with respect to a plane, like the usual mirror in a bathroom, or with respect to an axis, if we analyze plane figures.

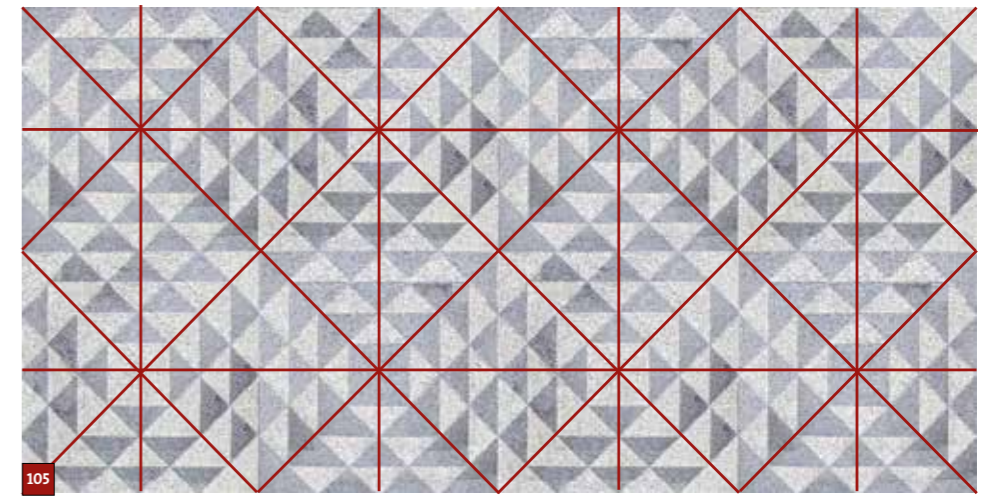
Consider a number a of mirrors in the sense of the previous paragraph. When these mirrors intersect, they divide the figure into $2a$ sectors between axes, whereby the angle between two neighboring mirrors will be $\frac{180}{a}$ degrees.

For example, the signature of the type of symmetry of the starfish is $*5$ (figure 103), and there the angle between two neighboring mirrors (*i.e.* reflection axes) is $\frac{180}{5} = 36$ degrees.

When there is more than one center where two or more mirrors intersect, we use a digit for a center of each type, indicating how many mirrors intersect there. Thus the signature $*a\ b\ c$ symbolizes the type of symmetry where a number a of mirrors cross at a point, while at another point b mirrors cross, and at yet another c mirrors cross. The angle between two neighboring mirrors will be $\frac{180}{a}$, $\frac{180}{b}$ or $\frac{180}{c}$, depending on the crossing point.

For example, the signature of the type of symmetry of the kaleidoscope image in figure 102 is $*3\ 3\ 3$, since it exhibits three different centers, in each of which three mirrors (that is, reflection planes) cross. Each of the digits 3 corresponds to one of the centers. The kaleidoscope image may be divided into equilateral triangles, where the angles are $\frac{180}{3} = 60$ degrees.

In modern language, we call *kaleidoscope*, or *mirror*, the symmetry feature associated with invariance under reflection with respect to an axis or to a plane, and we use a star symbol $*$ for it.



105

O Teorema Mágico

Matematicamente, estabeleceu-se que, do ponto de vista da simetria, no plano só existem 17 tipos de padrões e 7 tipos de frisos. O Teorema Mágico consiste nessa classificação, indicando a lista das 17 + 7 assinaturas possíveis para tipos de simetria no plano.

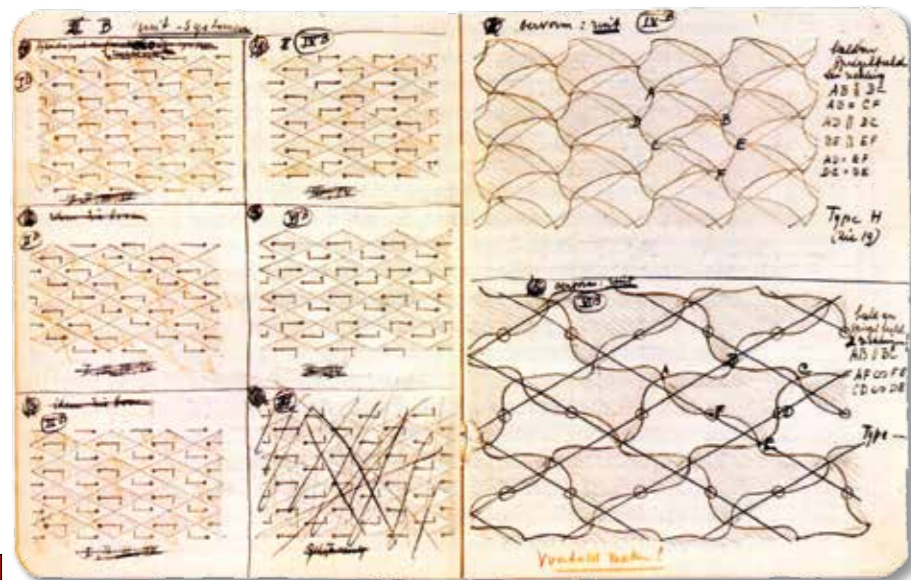
Teorema Mágico para o plano – versão explícita:

Os tipos de simetria que podem existir no plano são exatamente aqueles que têm as assinaturas indicadas na tabela da figura 132.

*632	632	*442	442	*333	*22∞	22∞	2*∞
333	*2222	2222	4*2	3*3	2*22	*∞∞	∞∞
22*	**	*X	XX	22X	O	∞*	∞X

Os 17 tipos de simetria para padrões no plano também são conhecidos como «17 grupos de papéis de parede», já que é frequente usar estes padrões em papéis de parede. Todos estes tipos de simetria podem ser encontrados em artes decorativas na Antiguidade.

O artista gráfico neerlandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972) usou com genialidade os tipos de simetria para padrões. Escher interessou-se seriamente por um artigo de 1924 do matemático húngaro George Pólya (1887-1985), onde este redescobria a classificação dos tipos de simetria para padrões e incluía ilustrações.



133
134
Caderno de M. C. Escher mostrando estudos com padrões do plano, e autorretrato do artista.

132
Tabela dos 17 + 7 = 24 tipos de simetria no plano. Os 17 tipos a azul-claro são dados por assinaturas simbólicas que não envolvem o símbolo ∞, as quais, como veremos mais adiante neste capítulo, correspondem aos tipos de padrões no plano. Os 7 tipos a azul-escuro são dados por assinaturas simbólicas que envolvem o símbolo ∞, as quais, como veremos, correspondem aos tipos de frisos no plano.

132
Table of the 17 + 7 = 24 types of symmetry in the plane. The seventeen types in light blue correspond to symbolic signatures that do not involve the symbol ∞, which, as we shall see later in this chapter, correspond to the types of planar patterns. The seven types in dark blue correspond to symbolic signatures involving the symbol ∞, which, as we shall see, correspond to the types of planar friezes.

133
134
Notebook by M. C. Escher where he investigates planar patterns, and self-portrait of the artist.

The Magic Theorem

It was mathematically established that, from the point of view of symmetry, in the plane there only exist seventeen types of patterns and seven types of friezes. The Magic Theorem is the classification of the 17+7 possible signatures for types of symmetry in the plane.

Magic Theorem for the plane – explicit version:

The admissible types of symmetry in the plane are exactly those that have the signatures indicated in the table of Figure 132.



135
Desenhos por M. C. Escher, rotulados com a respectiva assinatura do tipo de simetria, ignorando a cor.

135
Drawings by M. C. Escher, labeled with their corresponding symmetry signatures, ignoring color.

The 17 types of symmetry for planar patterns are also known as the 17 wallpaper groups, since it is common to use patterns for wallpapers. All of these types of symmetry may be found in the decorative arts of antiquity. The Dutch graphic artist Maurits Cornelis Escher (1898-1972) ingeniously used the types of symmetry for patterns. Escher became seriously interested in a 1924 article by the Hungarian mathematician George Pólya (1887-1985), where the latter rediscovered the classification of the types of symmetry for patterns and included illustrations. Pólya's article influenced Escher's creations and helped make his work deeply mathematical.



Rota da Simetria

Tour of Symmetry



TIPO DE PADRÃO * 2 2 2 2

Vamos ver agora o último tipo de simetria caleidoscópica que descobrimos em calçadas. Encontram-se aqui espelhos paralelos em duas direções perpendiculares, definindo uma malha retangular. É exemplo deste tipo a calçada no adro da Capela de Santo Amaro em Lisboa. Na figura 161, um retângulo branco assinala o que se diz um «domínio fundamental». Se se observasse este domínio entre quatro espelhos ao longo das suas arestas, ver-se-ia uma imagem como que de uma calçada infinita com este padrão.

TIPO DE PADRÃO 4 4 2

Olhemos agora para os tipos de simetria envolvendo apenas rotações, começando pelo tipo numa das mais emblemáticas calçadas. O padrão de João Abel Manta (n. 1928) na calçada da Praça dos Restauradores, em Lisboa, amarra-nos com cordas entrelaçadas a perder de vista. Este padrão dos anos 70 exibe três tipos de centros de rotação, estando um representante de cada tipo assinalado por um ponto azul à direita na figura 163. A rotação do padrão de $\frac{360^\circ}{4} = 90$ graus em torno do centro de cima preserva o padrão, assim como a rotação de $\frac{360^\circ}{4} = 90$ graus em torno do centro da esquerda, ou a rotação de $\frac{360^\circ}{2} = 180$ graus em torno do terceiro centro. Assim, vê-se que a sua simetria tem assinatura 4 4 2, em que os algarismos 4, 4 e 2 são os denominadores das frações $\frac{360^\circ}{\dots}$, que dão os graus de rotação em torno de cada centro.



Tipo de padrão * 2 2 2 2:
adro da capela de Santo Amaro, em Lisboa.

160 161

Pattern type * 2 2 2 2:
churtyard of Capela de Santo Amaro in Lisbon.

Tipo de padrão * 2 2 2 2:
Rua Frederico Arouca, mais conhecida como Rua Direita, em Cascais.

162

Pattern type * 2 2 2 2:
Rua Frederico Arouca, popularly known as Rua Direita, in Cascais.



Tipo de padrão 4 4 2:
Praça dos Restauradores, em Lisboa.

163 164

Pattern type 4 4 2:
Restauradores square in Lisbon.

Tipo de padrão 4 4 2:
Rua Alexandre Herculano, em Torres Novas.

165

Pattern type 4 4 2:
Rua Alexandre Herculano in Torres Novas.



PATTERN TYPE * 2 2 2 2

We will now look at the last kaleidoscopic type of symmetry found in sidewalks. In this case, there are parallel mirrors along two perpendicular directions defining a rectangular grid. The churchyard pavement of Capela de Santo Amaro in Lisbon is an example of this type. In figure 161, a white rectangle indicates a fundamental domain. If this area were to be observed surrounded by four mirrors along its edges, we would see an image like that of an infinite sidewalk having this pattern.

PATTERN TYPE 4 4 2

Let us now look at the types of symmetry involving only rotations, beginning with the type found in one of the most iconic sidewalks. The pattern, by João Abel Manta (born 1928), in the Restauradores square in Lisbon, ties us with ropes intertwined out of sight. This pattern, from the seventies, displays three types of rotation centers, with one representative of each type marked by a blue dot on the right side of figure 163. The rotation of this pattern by $\frac{360^\circ}{4} = 90$ degrees around the top center preserves the pattern, as well as the rotation by $\frac{360^\circ}{4} = 90$ degrees around the left center, and the rotation by $\frac{360^\circ}{2} = 180$ degrees around the third center. One thus checks that its symmetry has signature 4 4 2, where the digits 4, 4 and 2 are the denominators of the fractions of type $\frac{360^\circ}{\dots}$ giving the degrees of rotation about each center.

TIPO DE PADRÃO * *

O tipo de padrão com vieiras, designado «leque florentino», que se pode encontrar na Praça do Município, no Funchal, ou na entrada do Jardim Zoológico em Lisboa, apresenta simetria por reflexão relativamente a eixos paralelos que bisetam os setores claros e os setores escuros. Dois representantes distintos desses eixos estão assinalados na figura 176. Cada um deles contribui com um símbolo de reflexão * para a assinatura do tipo de simetria.

TIPO DE PADRÃO * X

O padrão da calçada em frente ao Instituto Superior Técnico, em Lisboa, exhibe eixos de reflexão e eixos de reflexão deslizante. Na figura 178, assinalaram-se representantes destes eixos por uma reta vermelha e por uma reta vermelha a tracejado, respetivamente. Os eixos de reflexão bisetam os ângulos das cunhas, enquanto os eixos de reflexão deslizante são paralelos aos anteriores, ficando a meia distância deles. Note-se que todos os eixos de reflexão são do mesmo tipo, assim como todos os eixos de reflexão deslizante. Consequentemente, a simetria deste padrão tem a assinatura * X, em que a estrela * se refere às reflexões normais, e a cruz X se refere às reflexões deslizantes.



Tipo de padrão * *: Largo da Igreja Matriz, em Ponta Delgada, Açores.

175

Pattern type * *: Largo da Igreja Matriz in Ponta Delgada, Azores.



Tipo de padrão * X: Rua Cooperativa Agrícola do Funchal, Madeira.

177

Pattern type * X: Rua Cooperativa Agrícola do Funchal, Madeira.

PATTERN TYPE * *

The type of pattern with scallop shell shapes, called “Florentine fan”, which can be found in Praça do Município in Funchal, Madeira or at the entrance of the Zoo in Lisbon, presents symmetry by reflection with respect to parallel axes bisecting the light areas and the dark areas. Two distinct representatives of these axes are shown in figure 176. Each one contributes a reflection symbol * into the signature of this kind of symmetry.

PATTERN TYPE * X

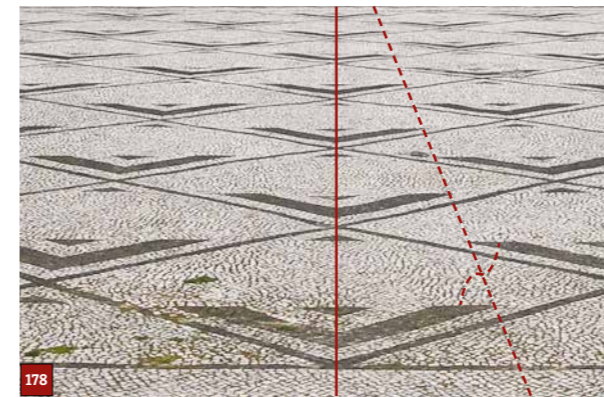
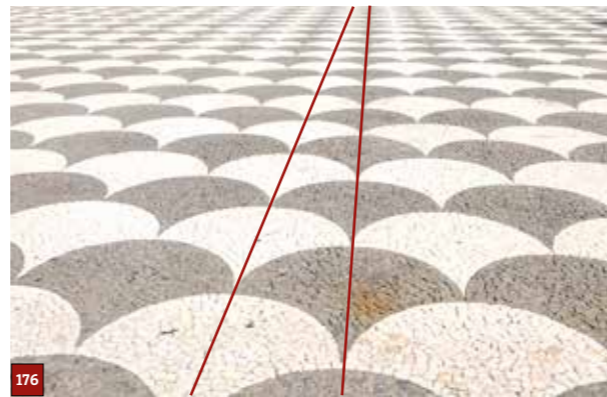
The sidewalk pattern in front of Instituto Superior Técnico in Lisbon displays reflection axes and glide reflection axes. In figure 178, representatives of these axes are presented by a red line and a dashed red line, respectively. The reflection axes bisect the wedge angles, while the glide reflection axes are parallel to the former and run at half distance. Note that all reflection axes are of the same type, as are all the glide reflection axes. Consequently, the symmetry of this pattern bears the signature * X, where the star * refers to usual reflections and the cross X refers to glide reflections.



Tipo de padrão * *: Praça do Município, no Funchal, Madeira.

174 176

Pattern type * *: Praça do Município in Funchal, Madeira.



Tipo de padrão * X: Instituto Superior Técnico, em Lisboa.

178 179

Pattern type * X: Instituto Superior Técnico in Lisbon.



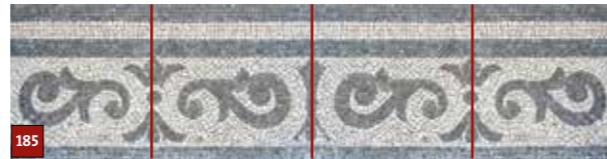


TIPO DE FRISO * ∞ ∞

A calçada com arabescos, ora voltados para a direita, ora para a esquerda, em frente à Igreja de São Julião em Lisboa, é invariante por reflexão relativamente a eixos paralelos. Na figura 185 assinalam-se eixos de reflexão com retas vermelhas. Vamos pensar que estes eixos se cruzam num ponto no infinito de um lado, e num ponto no infinito do outro, como que usando perspectiva. Esta interpretação resulta de se imaginar um friso deste tipo à volta do equador de uma esfera, onde os eixos de reflexão se cruzam no polo norte e no polo sul. O friso no plano pode ser encarado como o caso-limite de frisos sobre esferas que se tornam cada vez maiores, de modo que frisos cada vez mais longos (com mais eixos de reflexão) circundem essas esferas. Assim, ficamos com dois pontos distintos de cruzamento de eixos de reflexão em que o ângulo de interseção seria de $\frac{180}{\infty}$ graus, e daí a assinatura ser * ∞ ∞, com um símbolo ∞ por cada ponto de cruzamento.

TIPO DE FRISO 2 * ∞

A calçada com o clássico motivo grego na Rua Áurea e na Rua da Conceição, em Lisboa, fica invariante por reflexões ao longo de infinitos eixos de reflexão paralelos que se «cruzam» num ponto no infinito. Assim, é como se o ângulo entre esses eixos de reflexão fosse de $\frac{180}{\infty}$ graus. Na verdade, este caso pode ser tratado rigorosamente como um caso-limite de esferas, tal como o tipo anterior. Este friso goza ainda de simetria por rotação de meia-volta em torno de centros equidistantes dos eixos de reflexão e das bordas do friso. Todos esses centros são equivalentes, pois as reflexões identificam um centro com os seus vizinhos. Um desses centros está assinalado por um ponto azul na figura 188.



Tipo de friso * ∞ ∞:
em frente à Igreja
de São Julião, em Lisboa.

184 185

Frieze type * ∞ ∞:
by Igreja de São Julião
in Lisbon.



Tipo de friso * ∞ ∞:
em torno do monumento
no Largo do Chiado,
em Lisboa.

186 187

Frieze type * ∞ ∞:
around Largo do Chiado
in Lisbon.



Tipo de friso 2 * ∞:
Rua Áurea, em Lisboa.

188 190

Frieze type 2 * ∞:
Rua Áurea in Lisbon.



Tipo de friso 2 * ∞:
Rua Vitor Cordon,
em Lisboa.

189

Frieze type 2 * ∞:
Rua Vitor Cordon
in Lisbon.



FRIEZE TYPE * ∞ ∞

The arabesque sidewalk pattern with curves turned to one side and the other, by Igreja de São Julião in Lisbon, is invariant under reflection with respect to parallel axes. Figure 185 depicts reflection axes with red lines. We imagine that these axes intersect in a point at infinity on one side and in a point at infinity on the other, as if by using perspective. That interpretation follows from imagining a frieze of this type wrapped around the equator of a sphere, where the axes of reflection cross in the North Pole and in the South Pole. The frieze in the plane can be seen as a limiting case of friezes on spheres that become larger and larger, so that increasingly long strips (with more reflection axes) will encircle these spheres. We are thus left with two distinct points of intersection of reflection axes where the angle would be $\frac{180}{\infty}$ degrees, hence the signature is * ∞ ∞, with a symbol ∞ for each crossing point.

FRIEZE TYPE 2 * ∞

The sidewalk with the classic Greek motif in Rua Áurea and in Rua da Conceição in Lisbon is invariant under reflections across infinite parallel reflection axes which “cross” in a point at infinity. Therefore it is as if the angle between these reflection axes were $\frac{180}{\infty}$ degrees. In fact, this case can be rigorously treated as a limit of spheres, as in the previous type. This frieze also enjoys rotational symmetry by a half-turn around centers equidistant from the reflection axes and from the frieze edges. All these centers are equivalent, because the reflections identify a center with its neighboring centers. One of these centers is marked by a blue dot in figure 188.

Das Caravelas aos Papagaios

Portugal conheceu durante mais de meio milénio a cultura mourisca, cujos ornamentos exploram de modo magistral a simetria, normalmente na ausência de motivos envolvendo figuras humanas, animais ou vegetais. Os azulejos, cujo nome deriva do árabe *az-zulayj*, que significa «pedra polida», exemplificam o modo como esta imitação dos mosaicos romanos foi apurada na Península Ibérica, incorporando motivos geométricos com outros elementos decorativos.

Num mundo cosmopolita tira-se partido da coexistência de diferentes culturas, reconhecendo-as, reinventando-as e refletindo-as umas nas outras, para progresso cultural. Como ponto de encontro de tradições europeia, norte-africana e, a partir dos Descobrimentos, asiática (tradições essas também matemáticas), Portugal encontra-se em posição privilegiada para sedimentar estas influências e cumprir o desafio de completar os tipos de simetria em calçadas públicas, podendo orgulhar-se de ter uma *capital de simetria*.

Por outro lado, caravelas, sereias, mostrengos, peixes, corvos, borboletas, florões, estrelas, esferas armilares, retratos, datas, logótipos, códigos QR e muitos outros tesouros das calçadas são dignos de admirar, e não encerram qualquer simetria. Aliadas aos padrões e frisos simétricos, estas minuciosas obras de arte pública



219

Caravela em Lisboa.

219

Caravel in Lisbon.



220

A influência árabe na Península Ibérica em construção e decoração geométrica: Mesquita de Córdoba, em Espanha (em cima), e Mosteiro da Batalha, em Leiria (em baixo).

220

Examples of Arab influence in the Iberian Peninsula in geometric construction and decoration: Mezquita de Córdoba in Spain (above) and Mosteiro da Batalha in Leiria (below).



218

Baleia na Horta, Açores.

218

Whale in Horta, Azores.



221

BEYOND SYMMETRY