

## 1. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 e^{-x}.$$

- a) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von  $f$ , d.h., bestimmen Sie ihre kritischen Punkte und die Intervalle, in welchen  $f$  streng monoton wachsend, bzw. fallend, ist.

5 Punkte

**Lösung:** Wir bestimmen die kritischen Punkte von  $f$ . Mit der Produktregel gilt

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} \text{ (1 Punkt)}.$$

Weil  $e^{-x}$  nie verschwindet, gilt

$$f'(x) = 0 \iff 2x - x^2 = 0 \iff x(2 - x) = 0$$

Daher sind  $x = 0$  und  $x = 2$  die kritischen Punkte von  $f$  – **jeweils 1 Punkt** pro kritischer Punkt.

- Für  $x < 0$  ist  $f'(x) = x(2 - x) < 0$ , was bedeutet, dass  $f'$  auf  $(-\infty, 0)$  strikt monoton fallend ist.
- Für  $x \in (0, 2)$  ist  $f'(x) = x(2 - x) > 0$  und somit strikt monoton wachsend auf  $(0, 2)$ .
- Für  $x > 2$  ist  $f'(x) = x(2 - x) < 0$  und somit strikt monoton fallend auf  $(2, +\infty)$ .

Für jedes Intervall mit korrekter Monotonie von  $f$  gibt es **1 Punkt bis zu** einem Maximum von 2 Punkten (e.g. alle drei Intervalle mit dem richtigen Monotonieverhalten bestimmen gibt 2 Punkte, nur zwei von drei auch).

- b) Bestimmen Sie die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  sowie  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2 Punkte

**Lösung:** Da beide  $x^2$  und  $e^{-x}$  für  $x \rightarrow -\infty$  gegen  $+\infty$  streben, erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ (1 Punkt)}.$$

Für den Grenzwert gegen  $+\infty$  beobachten wir, dass  $x^2$  gegen  $+\infty$  strebt, und  $e^{-x}$  gegen 0. Deshalb können wir die Regel von Bernoulli-L'Hôpital (zweifach) anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0. \text{ (1 Punkt)}.$$

c) Was ist der Wertebereich von  $f(x)$ ?

3 Punkte

**Lösung:** Die Funktionswerte sind nie negativ und  $f(x) = 0 \iff x = 0$ . (Alternativ können wir das Monotonieverhalten von  $f$  betrachten, um zu schliessen, dass  $f$  bei  $x = 0$  ein lokales Minimum hat.) Da  $f$  stetig ist und für  $x \rightarrow -\infty$  gegen  $+\infty$  strebt, ist der Zwischenwertsatz anwendbar und wir schliessen, dass alle Werte zwischen  $f(0) = 0$  und  $+\infty$  angenommen werden, i.e. der Wertebereich ist

$$[0, +\infty).$$

Hierbei gibt es **1 Punkt** für die untere Grenze und **1 Punkt** für die obere Grenze des Wertebereichs. Falls  $(0, +\infty)$  bestimmt wird, wird insgesamt ein Punkt gegeben. **1 Punkt** für richtigen Begründung.

2. a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = e^x.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

2 Punkte

Kreuzen Sie Ihre Antwort direkt auf diesem Aufgabenblatt an.  
Es gibt ein Punkt pro Aussage und keine Begründung wird erfordert.  
Falsche oder mehrere Antworten werden mit null Punkten bewertet.

richtig	falsch	
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	Jede Lösung der zugehörigen <i>homogenen</i> Differentialgleichung ist eine beschränkte Funktion.
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	Es gibt eine partikuläre Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung von der Form $Ae^{-2x}$ mit $A \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** Jedes richtige Kreuzchen in der Tabelle gibt **1 Punkt**.

Die homogene Differentialgleichung lautet

$$y'' + 4y = 0$$

und ihre charakteristische Gleichung,  $r^2 + 4 = 0$ , hat die Lösungen  $r = \pm 2i$ .  
Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$A \cos(2x) + B \sin(2x), \text{ mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

Jede von diesen Funktionen ist beschränkt. Somit ist die erste Aussage **richtig**.

Für  $g(x) := Ae^{-2x}$  gilt

$$g'(x) = -2Ae^{-2x} \quad \text{und} \quad g''(x) = 4Ae^{-2x}.$$

Daher kann die Kombination

$$g''(x) + 4g(x) = (4A + 4A)e^{-2x}$$

für keine Wahl von  $A$  stets gleich  $e^x$  sein. Somit liefern die gegebenen Funktionen keine partikuläre Lösung der DGL und die zweite Aussage ist **falsch**. Alternativ können wir diesen Ansatz mit dem (korrekten) Lösungsansatz aus der Tabelle vergleichen, nämlich  $Ae^x$ .

**b)** Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für  $x > 0$

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 1.$$

6 Punkte

**Lösung:** Diese Differentialgleichung ist linear:

$$y' + p(x)y = g(x) \quad \text{mit } p(x) = \frac{2}{x} \quad \text{und } g(x) = \frac{\cos x}{x^2}.$$

Nach der Methode des integrierenden Faktors, ist ihre allgemeine Lösung

$$y(x) = \left[ \int g(x) e^{P(x)} dx \right] \cdot e^{-P(x)}, \quad \text{(1 Punkt)}$$

wobei  $P(x)$  in den Exponenten eine beliebige gewählte Stammfunktion vom Koeffizient  $p(x)$  ist, z.B.,

$$P(x) = \ln(x^2), \quad \text{(1 Punkt)}$$

und  $\int g(x) e^{P(x)} dx$  ein unbestimmtes Integral bezeichnet, z.B.

$$\begin{aligned} \int g(x) e^{P(x)} dx &= \int \frac{\cos x}{x^2} x^2 dx && \text{(1 Punkt)} \\ &= \sin x + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}. && \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Daher ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{\sin x + C}{x^2}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Mit der Bedingung  $y(\pi) = 1$  lässt sich  $C$  bestimmen:

$$1 = \frac{0 + C}{\pi^2} \implies C = \pi^2$$

und somit ist die Lösung gegeben durch

$$y(x) = \frac{\sin(x) + \pi^2}{x^2} \quad \text{(1 Punkt)}.$$

Letzterer Punkt wird auch gegeben, wenn die allgemeine Lösung mit  $C$  steht, und dann  $C = \pi^2$  bestimmt wird.

*Alternative Lösung mit Variation der Konstanten:* Zuerst bestimmen wir mithilfe Separation der Variablen eine Lösung des homogenen Problems  $y' + \frac{2y}{x} = 0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2y} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x} \\ \implies -\int \frac{1}{2y} dy &= \int \frac{1}{x} dx \\ \implies -\frac{1}{2} \ln(y) &= \ln(x) + \text{Konst.} \\ \implies y_h(x) &= D e^{-2\ln(x)} = \frac{D}{x^2} \end{aligned}$$

für eine Konstante  $D$  **(1 Punkt)**. Einen Ansatz für eine Lösung des inhomogenen Systems liefert die Methode der Variation der Konstanten:

$$y_p(x) = \frac{D(x)}{x^2}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Ableiten

$$y_p'(x) = \frac{D'(x)}{x^2} - \frac{2D(x)}{x^3}$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$D'(x) = \cos(x).$$

Somit ist  $D(x) = -\sin(x) + C$  für eine beliebige Konstante  $C$  **(1 Punkt)**. Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = \frac{D(x)}{x^2} = \frac{-\sin(x) + C}{x^2} \quad \text{(1 Punkt)}$$

$C$  lässt sich nun wie oben bestimmen.

3. a) Für welche Werte vom Parameter  $c \in \mathbb{R}$  ist das folgende System lösbar? Warum?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & c & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4 Punkte

**Lösung:** Mit dem Gauss-Verfahren finden wir

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & c & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & c & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \text{(1 Punkt)}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & c & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1-2c & 0 & 3 \end{array} \right) \quad \text{(1 Punkt)}.$$

Deshalb ist das System für alle  $c \neq \frac{1}{2}$  lösbar **(2 Punkte)** – 1 Punkt wird gegeben wenn als Lösung eine Bedingung der Form  $c \neq \dots$  gegeben wird mit einer Konstante ungleich  $\frac{1}{2}$ .

- b) Wir betrachten nun die obige Koeffizientenmatrix mit  $c = -1$ , also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

3 Punkte

Kreuzen Sie Ihre Antwort direkt auf diesem Aufgabenblatt an.  
Es gibt ein Punkt pro Aussage und keine Begründung wird erfordert.  
Falsche oder mehrere Antworten werden mit null Punkten bewertet.

richtig	falsch	
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	Rang( $A$ ) = 3.
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	Das System $A\vec{x} = \vec{0}$ besitzt genau eine Lösung.
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ ist für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ lösbar.

**Lösung:** Jedes richtige Kreuzchen in der Tabelle gibt **1 Punkt**.

Wie im ersten Teil berechnet, nach zwei Zeilenoperationen lässt sich die Matrix  $A$  in folgende Form überführen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und nach einer weiteren Zeilenoperation erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass  $A$  vollen Rang, also Rang 3 besitzt, und somit ist die erste Aussage **richtig**.

Die zweite Aussage ist **falsch**, weil der Kern von  $A$  gemäss Rangsatzes 1-dimensional ist. Die dritte Aussage ist **richtig**, da  $A$  Rang 3 hat und die Dimension des Zielraumes  $\mathbb{R}^3$  genau 3 ist.

4. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = x^3 - y^2 - 3xy + 1 \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

4 Punkte

Kreuzen Sie Ihre Antwort direkt auf diesem Aufgabenblatt an.  
Es gibt ein Punkt pro Aussage und keine Begründung wird erfordert.  
Falsche oder mehrere Antworten werden mit null Punkten bewertet.

richtig	falsch	
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	Der Gradient von $f$ ist $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ -3x - 2y \end{pmatrix}$ .
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	Im Punkt $(-1, 1)$ fällt die Funktion $f$ am schnellsten in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	Die Funktion $f$ besitzt drei kritische Punkte.
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	Die Funktion $f$ hat bei $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ ein lokales Minimum.

**Lösung:** Jedes richtige Kreuzchen in der Tabelle gibt **1 Punkt**.

Für den Gradienten  $\nabla f$  haben wir

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ -2y - 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ -3x - 2y \end{pmatrix},$$

somit ist die erste Aussage **richtig**.

Die Richtung des schnellsten Abstieges am Punkt  $(-1, 1)$  ist gegeben durch

$$-\nabla f(-1, 1) = -\begin{pmatrix} 3 - 3 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$



also ist die zweite Aussage **falsch**.

Die kritischen Punkte von  $f$  werden bestimmt durch  $\nabla f(x, y) = 0$ , in anderen Worten, sind die Punkte, die die zwei Gleichungen

$$3x^2 - 3y = 0 \text{ und } -3x - 2y = 0$$

erfüllen. Eine Parabel und eine Gerade können sich aber in höchstens zwei Punkte schneiden, deshalb ist die dritte Aussage **falsch**.

Wir überprüfen  $\nabla f\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = 0$ . Die Hess'sche Matrix ist gegeben durch

$$\text{Hesse}(f)(x, y) \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(x, y) & \partial_x \partial_y f(x, y) \\ \partial_y \partial_x f(x, y) & \partial_y^2 f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Hess'sche Matrix am Punkt  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$  ist

$$\text{Hesse}(f)\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Da die Determinante dieser Matrix 9, also positiv, ist und das erste Element  $-9$  negativ ist, gemäss dem Kriterium ist der kritische Punkt  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$  ein lokales Maximum. Somit ist die vierte Aussage **falsch**.

**b)** Bestimmen Sie die Steigung der Niveaulinie von  $f$  im Punkt  $(-1, 0)$ .

Hinweis: Verwenden Sie die Tangente an diese Niveaulinie.

4 Punkte

**Lösung:** Der Gradient  $\nabla f(x, y)$  ist immer orthogonal zu Niveaulinien, deshalb ist die Steigung der Niveaulinie von  $f$  in  $(-1, 0)$  bestimmt durch die Gerade, die orthogonal ist zu

$$\nabla f(-1, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**1 Punkt** für die Berechnung vom Gradient, **1 Punkt** für die Idee, dass der Gradient orthogonal zu den Niveaulinien ist. Die Gerade, die orthogonal zu  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  im Punkt  $(-1, 0)$  verläuft erfüllt die Gleichung

$$3(x + 1) + 3y = 0 \iff y = -x - 1.$$

**1 Punkt** für die Gleichung der Tangente. Somit ist die Steigung  $-1$ . **1 Punkt** für das korrekte, folgerichtige Resultat.

5. a) Wir betrachten die Fläche  $S$  gegeben durch

$$z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Benutzen Sie den Satz von Stokes, um den Fluss der Rotation vom Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} y + 1 \\ z - x \\ x - 2 \end{pmatrix}$$

durch  $S$  nach unten zu bestimmen. Das heisst, berechnen Sie

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dA$$

wobei  $\vec{n}$  in negative  $z$ -Richtung zeigt.

7 Punkte

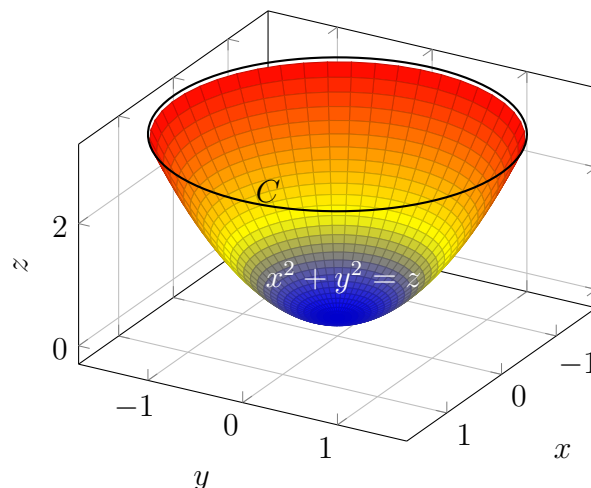
**Lösung:** Mit dem Satz von Stokes genügt es, das Kurvenintegral

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit der passenden Richtung zu berechnen, wobei  $C$  der Rand der Oberfläche  $S$  ist:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 1\} \quad \text{(1 Punkt)}.$$

Der Punkt wird auch gegeben, wenn implizit erkannt wird, was der Rand von  $S$  ist (e.g. aufgrund der Wahl der korrekten Parametrisierung).



Wir parametrisieren  $C$  mit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Wenn die Richtung der Parametrisierung so gewählt worden ist, dass der Fluss in negativer  $z$ -Richtung berechnet gibt **1 Punkt**. Dieser Punkt wird auch gegeben, wenn hier die Gegenrichtung gewählt wird, aber am Ende das Vorzeichen vom Fluss korrekt angepasst wird. Wir berechnen also

$$\begin{aligned} & \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dA \\ &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{Stokes: } 1 \text{ Punkt} \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) + 1 \\ 1 - \cos(t) \\ \cos(t) - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad 1 \text{ Punkt} \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 - \sin(t) - \cos(t) + \cos(t)^2 dt \quad 1 \text{ Punkt} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Das korrekte Ergebnis  $2\pi$  (resp.  $-2\pi$  bei fälschlicher Parametrisierung von  $C$ ) gibt **1 Punkt**.

b) Sei  $\vec{G}$  ein quellenfreies Vektorfeld im ganzen  $\mathbb{R}^3$ .

Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

3 Punkte

Kreuzen Sie Ihre Antwort direkt auf diesem Aufgabenblatt an.  
Es gibt ein Punkt pro Aussage und keine Begründung wird erfordert.  
Falsche oder mehrere Antworten werden mit null Punkten bewertet.

richtig	falsch	
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	Für die drei Komponenten von $\vec{G}$ gilt überall $\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = 0$ .
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	Das Kurvenintegral $\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$ entlang einer geschlossenen Kurve $C$ ist immer gleich 0.
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	Der Fluss $\iint_A \vec{G} \cdot \vec{n} \, dA$ durch eine geschlossene Oberfläche $A$ hinaus ist immer gleich 0.

**Lösung:** Jedes richtige Kreuzchen in der Tabelle gibt **1 Punkt**.

Die erste Aussage ist äquivalent zu  $\operatorname{div}(\vec{G}) = 0$ , was per Annahme (quellenfrei) stimmt, weshalb die erste Aussage **richtig** ist.

Die zweite Aussage ist **falsch** - ein Gegenbeispiel ist gegeben durch das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Divergenz ist 0 aber das Kurvenintegral über den Kreis  $C$  parametrisiert durch  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , verschwindet **nicht**:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin t)^2 + (\cos t)^2}_{=1} dt = 2\pi.$$

Die dritte Aussage ist **richtig** - dies folgt aus dem Divergenzsatz und der Annahme an die Divergenz  $\operatorname{div}(\vec{G}) = 0$ .

6. Lösen Sie das folgende Problem für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2 \cos^2(3\pi x) - \cos(7\pi x), \\ u_t(x, 0) = \cos(4\pi x). \end{cases}$$

Sie dürfen hier die folgenden Basislösungen ohne erneute Herleitung verwenden:

$$1, \quad \cos(n\pi t) \cdot \cos(n\pi x), \quad \sin(n\pi t) \cdot \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Hinweis:  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2}$ .

7 Punkte

**Lösung:** Die Lösung ist von der Form

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)) \cdot \cos(n\pi x) \quad \text{(1 Punkt)}.$$

Mit der gegebenen trigonometrischen Identität wird die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = 2 \cos^2(3\pi x) - \cos(7\pi x) = 1 + \cos(6\pi x) - \cos(7\pi x) \quad \text{(1 Punkt)}.$$

Da

$$u(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \underbrace{\cos(n\pi 0)}_{=1} + B_n \underbrace{\sin(n\pi 0)}_{=0} \right) \cdot \cos(n\pi x)$$

erhalten wir  $A_0 = 1$ ,  $A_6 = 1$ ,  $A_7 = -1$  und  $A_n = 0$  für die restlichen  $n$  – korrekte Wahl aller  $A_n$  gibt **2 Punkte**; Lösungen mit geringen Teilfehler werden ein Punkt gegeben. Da

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \underbrace{(-n\pi \sin(n\pi 0))}_{=0} + B_n n\pi \underbrace{\cos(n\pi 0)}_{=1} \right) \cdot \cos(n\pi x),$$

die Bedingung  $u_t(x, 0) = \cos(4\pi x)$  impliziert  $B_4 = \frac{1}{4\pi}$  und  $B_n = 0$  für die restlichen  $n$  – korrekte Wahl der  $B_n$  gibt **2 Punkte**; Lösungen mit geringen Teilfehler werden ein Punkt gegeben. Wir finden also als Lösung

$$u(x, t) = 1 + \cos(6\pi t) \cos(6\pi x) - \cos(7\pi t) \cos(7\pi x) + \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi t) \cos(4\pi x).$$

Die ganz korrekte Lösung gibt **1 Punkt**.

**Für Aufgaben 7-31:** Es gibt pro Frage zwei Punkte. Falsche oder mehrere Antworten werden mit null Punkten bewertet. **Nur** Antworten **auf dem Abgabebblatt** werden gezählt.

7. In welchem Punkt  $x$  ist die Steigung der Tangente an den Graphen von  $f(x) = 2x^4$  gleich 1?

- (a)  $x = \frac{1}{2}$       (b)  $x = -\frac{1}{2}$       (c)  $x = \frac{1}{\sqrt{8}}$       (d)  $x = -\frac{1}{\sqrt{8}}$

**Lösung:** Die Ableitung  $f'(x) = 8x^3$  ist gleich 1 für  $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ .

8. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 1}$  ist **falsch**?

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ .      (c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ .  
 (b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ .      (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

**Lösung:** Mit der Regel von Bernoulli-L'Hôpital lässt sich ermitteln:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x} = 3.$$

Der Grenzwert für  $x \rightarrow -\infty$  ist gleich.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  stimmt auch, weil der Nenner gegen  $-1$  konvergiert und der Zähler gegen 0.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$  ist falsch, da der Limes  $\lim_{x \rightarrow 1}$  nicht existiert:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

9. Welche der folgenden Aussagen über die Extremwerte der Funktion

$$f(x) = x \ln x$$

im Intervall  $[1, 2]$  ist korrekt?

- (a) Das Minimum ist 0 und das Maximum ist  $\ln 4$ .
- (b) Das Minimum ist 0 und das Maximum ist  $\ln(2e)$ .
- (c) Das Minimum ist 1 und das Maximum ist  $\ln 4$ .
- (d) Das Minimum ist 1 und das Maximum ist  $\ln(2e)$ .

**Lösung:** Es gilt

$$f'(x) = 1 + \ln(x),$$

was für  $x \in [1, 2]$  strikt positiv ist. Insbesondere ist  $f(x)$  strikt monoton steigend und somit ist  $f(1) = 1 \ln(1) = 0$  das Minimum und  $f(2) = 2 \ln(2) = \ln(4)$  das Maximum.

- 10.** Wir betrachten einen Punkt  $(x, y)$  auf der Parabel  $3y = x^2 - 2$  liegt. Sei  $\ell$  der Abstand des Punktes  $(x, y)$  zum Ursprung  $(0, 0)$ . Schreiben Sie  $\ell$  als eine Funktion von  $x$ .

- (a)  $\ell(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^4 + 5x^2 + 4}$
- (b)  $\ell(x) = |x|$
- (c)  $\ell(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 6}$
- (d)  $\ell(x) = \frac{1}{3}|x^2 - 2|$

**Lösung:** Die Punkte der Parabel haben der Form  $(x, \frac{x^2-2}{3})$ . Der gefragte Abstand ist dann

$$\begin{aligned} \ell(x) &= \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2-2}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{9x^2 + x^4 - 4x^2 + 4} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{x^4 + 5x^2 + 4}. \end{aligned}$$

- 11.** Die Differentialgleichung

$$y' = e^x(y^2 + y)$$

geht durch Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung über in

(a)  $\int \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = e^x + c$  wobei  $c \in \mathbb{R}$ .

$$(b) \int \left( \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y} \right) dy = e^x + c \quad \text{wobei } c \in \mathbb{R}.$$

$$(c) \int \left( \frac{2}{y+1} - \frac{1}{y} \right) dy = e^x + c \quad \text{wobei } c \in \mathbb{R}.$$

$$(d) \int \left( \frac{2}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = e^x + c \quad \text{wobei } c \in \mathbb{R}.$$

**Lösung:** Es gilt

$$\frac{y'}{y(y+1)} = e^x$$

und für  $\frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{1}{y(y+1)} \iff A(y+1) + By = 1$  erhalten wir nach Einsetzen von  $y = 0$  und  $y = -1$

$$A = 1 \text{ und } B = -1,$$

was zu

$$\int \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = e^x + C$$

führt.

**12.** Welche Aussage über die Stabilität der Gleichgewichtspunkte der Gleichung

$$y' = y^3 - 4y^2.$$

ist richtig?

- (a)  $y = 0$  und  $y = 4$  sind beide instabile Gleichgewichtspunkte.
- (b)  $y = 0$  und  $y = 4$  sind beide stabile Gleichgewichtspunkte.
- (c)  $y = 0$  ist ein stabiler Gleichgewichtspunkt und  $y = 4$  ist instabil.
- (d)  $y = 0$  ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt und  $y = 4$  ist stabil.

**Lösung:** Diese Differentialgleichung ist autonom:  $y' = g(y)$ , wobei

$$g(y) = y^3 - 4y^2 = y^2(y - 4).$$

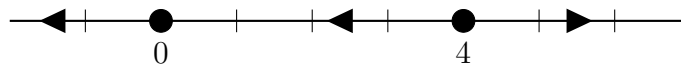


Die Gleichgewichtspunkte sind die Werte  $y$ , für die  $g(y) = 0$ , d.h.

$$y = 0, \text{ und } y = 4.$$

Falls  $y > 4$ , ist  $g(y) > 0$ , d.h.  $y$  nimmt zu und deshalb ist  $y = 4$  instabil.

Falls  $y < 0$  (oder  $0 < y < 4$ ), ist  $g(y) < 0$ , d.h.  $y = 0$  ist instabil. Die folgende Grafik verdeutlicht nochmal die Instabilität



13. Welches der folgenden Integrale divergiert?

(a)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 1} dx$

(c)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(b)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$

(d)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

**Lösung:** Mit PBZ finden wir  $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$ , daher

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} (\ln |x-1| - \ln |x+1|) + C = \ln \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} + C, \text{ für } 0 < x < 1$$

mit  $C \in \mathbb{R}$ . Diese Stammfunktionen streben gegen  $-\infty$  für  $x \rightarrow 1^-$ . Insbesondere divergiert  $\int_0^1 \frac{1}{x^2-1} dx$ .

Mithilfe von entsprechenden Stammfunktionen bestätigen wir, dass die anderen drei Integrale konvergieren.

14. Sei  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Stets rein imaginär ist

(a)  $\frac{1}{i|z|}$

(b)  $e^{i\operatorname{Im} z}$

(c)  $e^{i|z|}$

(d)  $\frac{z}{\bar{z}}$

**Lösung:** Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gilt

$$\frac{1}{i|z|} = \frac{1}{i|z|} \cdot \frac{i}{i} = \underbrace{\left(-\frac{1}{|z|}\right)}_{\in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \cdot i.$$

Andererseits können die anderen Ausdrücke nicht rein imaginäre Werte annehmen, z.B. wenn  $z = \pi$  gilt  $e^{i \operatorname{Im} z} = 1$ ,  $e^{i|z|} = -1$  und  $\frac{z}{\bar{z}} = 1$ .

**15.** Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen für reelle invertierbare  $n \times n$ -Matrizen  $A$  und  $B$  **falsch**?

- (a)  $\det(A + B) = \det A + \det B$       (c)  $\det(AB) = \det(BA)$   
 (b)  $\det(-A) = (-1)^n \det A$       (d)  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

**Lösung:** Für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $B = -A$  gilt  $\det(A + B) = \det(0) = 0$ , aber  $\det(A) + \det(B) = \det(A) + (-1)^2 \det(A) = 2 \det(A) = 2 \neq 0$ . Also ist im Allgemeinen  $\det(A) + \det(B) \neq \det(A + B)$ .

Die anderen Eigenschaften folgen aus der Haupteigenschaft der Determinante:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

**16.** Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 \\ -7 & 1 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte 0, 1, 5 und ...

- (a) 2.      (b) -2.      (c) 3.      (d) -3.

**Lösung:** Die Summe der Eigenwerte (unter Berücksichtigung der Vielfachheiten) ist gleich der Spur der Matrix. Somit erfüllt der fehlende Eigenwert  $\lambda$

$$0 + 1 + 5 + \lambda = 4 + 1 - 2 + 5 \quad \implies \quad \lambda = 2.$$

**17.** Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form

$$y'' + by' + c = 0,$$

deren Nullstellen der charakteristischen Gleichung ein Paar von komplex konjugierten Zahlen,  $\alpha \pm \beta i$ , sind. Dabei gilt  $\alpha, \beta, b, c \in \mathbb{R}$  und  $\beta \neq 0$ . Genau wann bleiben alle Lösungen der Differentialgleichung für alle  $t \geq 0$  beschränkt?

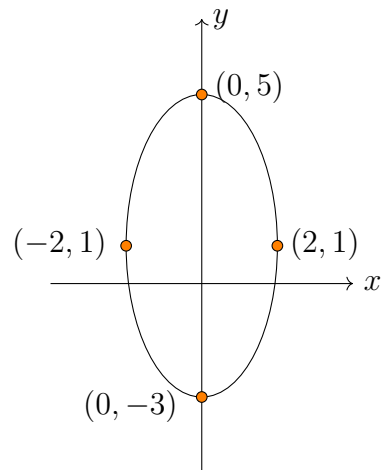
- (a) Wenn  $\alpha \leq 0$  und  $\beta$  beliebig.      (c) Wenn  $\alpha \geq 0$  und  $\beta < 0$ .  
(b) Wenn  $\alpha < 1$  und  $\beta < 0$ .      (d) Wenn  $\alpha > 1$  und  $\beta$  beliebig.

**Lösung:** Die allgemeine reelle Lösung der homogenen DGL ist von der Form

$$y(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)).$$

- Wenn  $\alpha = 0$ , sind alle Lösungen periodisch, daher beschränkt.
- Wenn  $\alpha < 0$ , ist  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\alpha t} = 0$ , somit streben alle Lösungen gegen den Ursprung und bleiben daher beschränkt.
- Wenn  $\alpha > 0$ , wächst  $e^{\alpha t}$  gegen  $+\infty$ , somit bewegen sich alle nicht-trivialen Lösungen weit weg vom Ursprung und bleiben nicht beschränkt.

**18.** Welche ist eine Parametrisierung der folgenden Ellipse, jeweils mit  $t \in [0, 2\pi]$ ?



$$(a) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 1 + 4 \cos t \end{pmatrix}.$$

$$(c) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{2} \\ \frac{\cos t - 1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}.$$

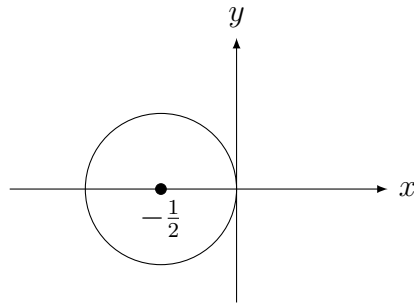
$$(d) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin t \\ \frac{1}{4} + \cos t \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Die Ellipse hat Mittelpunkt  $(0, 1)$  und die  $x$ - und  $y$ -Achsen als Hauptachsen mit Längen 2 und 4. Deshalb ist die korrekte Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 4 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 1 + 4 \cos t \end{pmatrix}.$$

Alternativ können wir die anderen Lösungen auch ausschliessen: In der  $x$ -Komponente kann nicht  $\frac{\sin(t)}{2}$  stehen, da das nie grösser als 1 werden kann. Somit kann zum Beispiel  $(2, 1)$  nicht erreicht werden. Ausserdem kann  $\begin{pmatrix} 2 \sin t \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix}$  nicht richtig sein, da damit nur Werte mit  $y \in [-2, 0]$  erreicht werden können.

19. Eine der folgenden Gleichungen stellt den skizzierten Kreis in Polarkoordinaten dar. Welche ist es?



- (a)  $r = -\cos(\theta)$                       (c)  $r = \sin(2\theta)$   
 (b)  $r = \theta^2$                               (d)  $r = -\tan(\theta)$

**Lösung:** Wir sehen, dass  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  gilt. Somit hat  $\sin(2\theta)$  Werte in  $] -1, 1[$  während  $r$  nur nicht-negative Werte annimmt. Also ist  $r = \sin(2\theta)$  falsch. Weiter nimmt auch  $\tan(\theta)$  alle Werte in  $\mathbb{R}$  an. Also ist  $r = -\tan(\theta)$  ebenfalls falsch. Der Zusammenhang  $r = \theta^2$  passt auch nicht, da  $r$  für  $\theta > \pi$  kleiner wird als Funktion von  $\theta$ . Also muss  $r = \cos(\theta)$  sein.

Alternativ können wir spezielle Punkte einsetzen:  $r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$  liegt im Kreis, erfüllt aber die Gleichungen  $r = \theta^2$  und  $r = -\tan(\theta)$  nicht. Ebenso liegt der Punkt  $\theta = \pi$  mit  $r > 0$  auf dem Kreis, erfüllt aber die Gleichung  $r = \sin(2\theta)$  nicht.

Alternativ benutzen wir die kartesischen Koordinaten, in welcher der Kreis gegeben ist durch die Gleichung

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Setzen wir  $x = r \cos(\theta)$  und  $y = r \sin(\theta)$  ein, so finden wir die Gleichung

$$r^2 + r \cos(\theta) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Dies ist äquivalent zu  $r = -\cos(\theta)$ .

20. Die Schnittpunkte von Ebenen der Form  $y = \text{Konst.}$  mit dem Graphen der Funktion  $f(x, y) = 2xy - 3y^2 + y$  sind

- (a) Geraden. (c) Parabeln.  
(b) Ellipsen. (d) Hyperbeln.

**Lösung:** Die Funktion  $f(x, y)$  hängt linear von  $x$  ab. Deshalb sind die Schnittkurven Geraden.

21. Sei

$$T(x, y) = 1 - 2x + \frac{1}{e}(x^2 + y^2)$$

das quadratische Taylorpolynom im Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  einer Funktion der Form

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + e) + 2kx.$$

Dann gilt

- (a)  $k = -1$  (c)  $k = 1$   
(b)  $k = -2$  (d)  $k = 2$

**Lösung:** Wir berechnen die erste Ableitung von  $f$  bezüglich  $x$ :

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + e} + 2k.$$

Am Punkt  $(0, 0)$  ist sie

$$f_x(0, 0) = 2k.$$

Bis Grad 1 ist das Taylorpolynom gleich

$$T(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \dots$$

Vergleichen wir den Summanden mit  $x$  mit der gegebenen Formel für  $T$  sehen wir, dass  $2k = -2$  sein muss. Also ist  $k = -1$ .

22. Welcher Punkt  $P = (x, y)$  auf dem Hyperbelast  $x^2 - y^2 = 4$ ,  $x > 0$ , hat den kleinsten Abstand vom Punkt  $(0, 2)$ ?

(a)  $P = (\sqrt{5}, 1)$

(c)  $P = (\sqrt{8}, 2)$

(b)  $P = (3, \sqrt{5})$

(d)  $P = (2, \sqrt{2})$

**Lösung:** Wir minimieren die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 = (\text{Abstand zwischen } (x, y) \text{ und } (0, 2))^2$$

auf dem Hyperbelast mit der Parametrisierung  $x = \sqrt{4 + y^2}$ .

Wir setzen die Parametrisierung ein und erhalten eine Funktion, die nur von  $y$  abhängig ist:

$$\begin{aligned} f(y) &= f\left(\sqrt{4 + y^2}, y\right) = 4 + y^2 + (y - 2)^2 \\ &= 2y^2 - 4y + 8 \end{aligned}$$

Um das Minimum zu finden, leiten wir ab:

$$f'(y) = 4y - 4.$$

Also ist  $y = 1$  der eindeutige kritische Punkt. Es ist ein Minimum ( $f''(1) = 4 > 0$ ). Der zugehörige Punkt auf der Hyperbel ist  $(\sqrt{4 + 1^2}, 1) = (\sqrt{5}, 1)$ .

**23.** Für welches  $b$  ist das Doppelintegral

$$\int_0^b \int_0^\pi y \sin x \, dx \, dy$$

gleich 2?

(a)  $b = \sqrt{2}$ .

(c)  $b = 2\sqrt{2}$ .

(b)  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(d)  $b = \frac{1}{2}$ .

**Lösung:** Wir berechnen zuerst das innere Integral, danach das äussere:

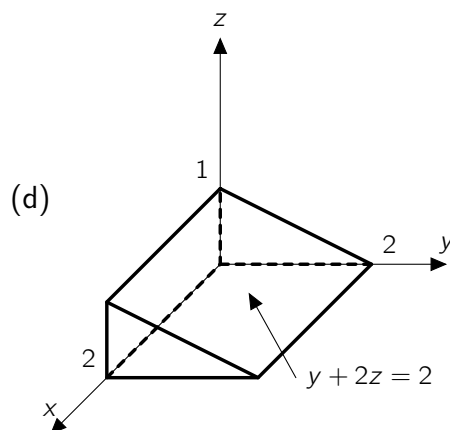
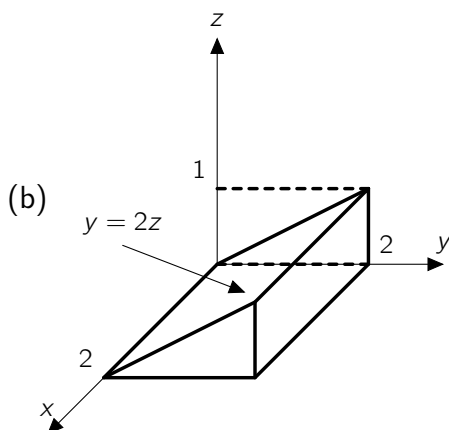
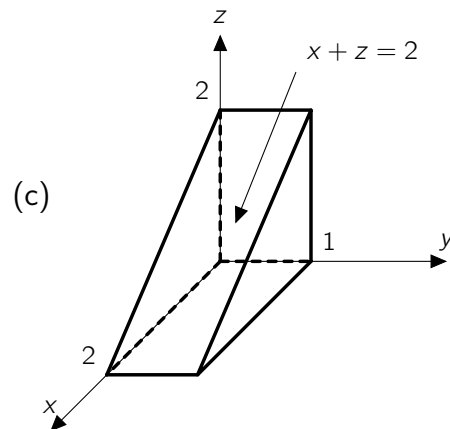
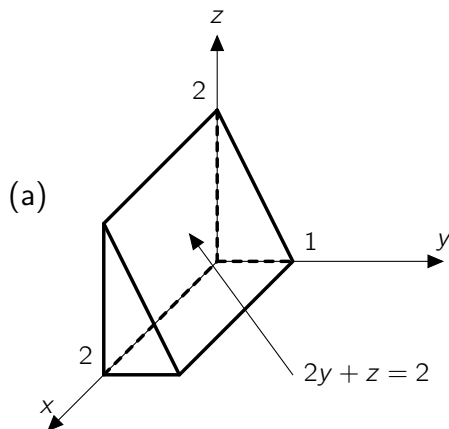
$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^\pi y \sin x \, dx \, dy &= \int_0^b \left[ -y \cos(x) \right]_0^\pi dy \\ &= \int_0^b 2y \, dy \\ &= \left[ y^2 \right]_0^b = b^2 \end{aligned}$$

Also muss  $b^2 = 2$  sein, also ist  $b = \sqrt{2}$ .

24. Wir betrachten ein Integral der Form

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2-2y} f(x, y, z) dz dx dy.$$

Welches ist das entsprechende Integrationsgebiet?



**Lösung:** Es gilt  $y \in [0, 1]$ , somit fallen zwei Möglichkeiten bereits weg. Weiter gilt  $z \in [0, 2 - 2y]$ , das heisst,  $0 \leq z \leq 2 - 2y$ . Die Gleichung  $z = 2 - 2y$  ist genau  $2y + z = 2$ , somit muss (a) die richtige Lösung sein.

25. Das Integral

$$\iint_B \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$$

über das Gebiet

$$B = \{(x, y) \mid x, y \leq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$



beträgt

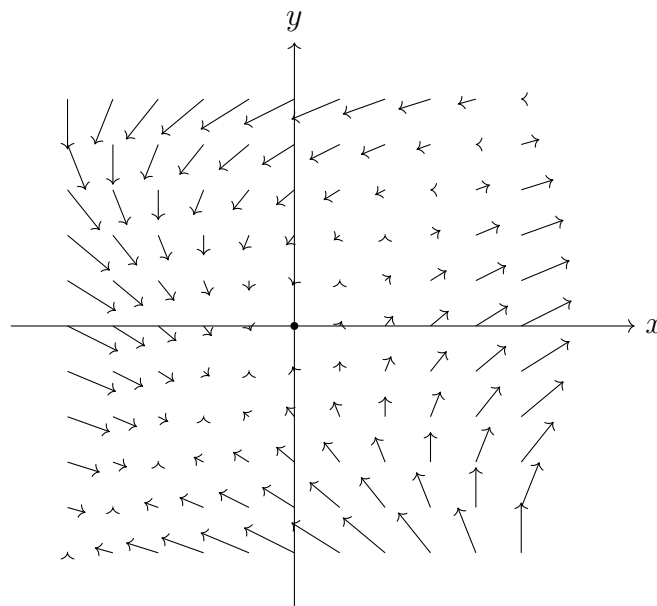
(a)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ .      (b)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ .      (c)  $\frac{3\pi}{2}$ .      (d)  $\frac{3\pi}{4}$ .

**Lösung:** In Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  ist  $B$  gegeben durch  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \in [1, 2]$  und  $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ . Koordinatentransformation ergibt

$$\begin{aligned} \iint_B \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx \, dy &= \int_1^2 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{4 - r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^2 \sqrt{4 - r^2} r \, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{3} (4 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{6} (4 - 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Sollten wir die Stammfunktion von  $\sqrt{4 - r^2} r$  nicht gleich erraten, so können wir die Substitution  $u = 4 - r^2$  verwenden, um das Integral zu berechnen.

26. Welches Vektorfeld passt zu dieser Zeichnung?



(a)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x - y \end{pmatrix}$

(c)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} -x \\ 2y \end{pmatrix}$

(b)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 \end{pmatrix}$

(d)  $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$

**Lösung:** Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass für  $x = y$  das Vektorfeld Null ist. Das ist nur für  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x - y \end{pmatrix}$  erfüllt. Zum Beispiel können wir den Punkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  einsetzen, um zu sehen, dass die anderen Vektorfelder dort nicht Null sind.

27. Welches der folgenden Vektorfelder  $\vec{F}$  besitzt ein Potential auf  $\mathbb{R}^2$ ?

(a)  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y - x \\ x - y \end{pmatrix}$ .

(c)  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ 2xy \end{pmatrix}$ .

(b)  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$ .

(d)  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ x^2 + y \end{pmatrix}$ .

**Lösung:** Die Vorticity von  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$ ,  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ x^2 + y \end{pmatrix}$  und  $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ 2xy \end{pmatrix}$  ist jeweils  $\neq 0$ . Deshalb besitzen diese Vektorfelder kein Potential. Die Funktion  $g(x, y) = xy - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$  erfüllt

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} y - x \\ x - y \end{pmatrix}.$$

28. In welchem der folgenden Gebiete ist das Vektorfeld

$$\vec{G}(x, y) = \frac{1}{(x-2)^2 + (y-3)^2} \begin{pmatrix} -y+3 \\ x-2 \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld?

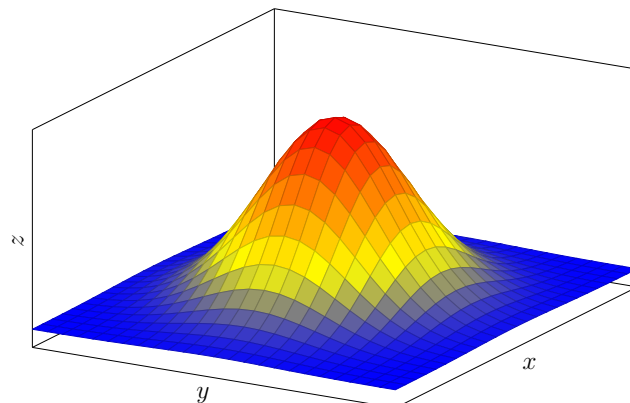
Hinweis: Die Vorticity von  $\vec{G}$  ist Null für alle  $(x, y) \neq (2, 3)$ .

- (a) In der Halbebene  $y \leq 0$ .
- (b) Im ersten Quadrant ohne den Punkt  $(2, 3)$ .
- (c) Im Kreisring  $1 \leq (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 2$ .
- (d) In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ohne die Strecke vom Ursprung zum Punkt  $(2, 3)$ .

**Lösung:** Vektorfelder mit Vorticity Null sind auf *einfach zusammenhängenden* Gebieten immer Gradientenfelder. Die Halbebene  $y \leq 0$  ist einfach zusammenhängend und  $\vec{G}$  hat auf diesem Gebiet überall Vorticity Null. Also ist  $\vec{G}$  auf der Halbebene  $y \leq 0$  ein Gradientenfeld.

*Bemerkung:* Die anderen Gebiete sind nicht einfach zusammenhängend ("sie haben Löcher") und deshalb ist es möglich, dass  $\vec{G}$  dort kein Gradientenfeld ist. Tatsächlich ist das der Fall: das Kurvenintegral entlang eines Weges um  $(2, 3)$  ist nicht Null.

29. Welche der folgenden Parametrisierungen (mit  $(u, v)$  variierend auf einem Quadrat) könnte die skizzierte Fläche darstellen?



- (a)  $\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ e^{-u^2-v^2} \end{pmatrix}$
- (b)  $\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{u^2 + v^2} \end{pmatrix}$
- (c)  $\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sin(u^2 + v^2) \end{pmatrix}$
- (d)  $\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 - u^2 - v^2 \end{pmatrix}$

**Lösung:** Das Bild zeigt den Graphen einer Funktion  $f(x, y)$ . Für  $|x|, |y| \rightarrow \infty$  geht der Funktionswert  $f(x, y)$  gegen Null. Die einzige Funktion der Auswahl, die das erfüllt, ist  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ . Also muss

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ e^{-u^2-v^2} \end{pmatrix}$$

richtig sein.

**30.** Wie viel beträgt der Fluss vom Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - x \cos(xy) \\ x + y \cos(xy) \end{pmatrix}$$

durch den Kreis  $x^2 + y^2 = 1$  nach aussen?

- (a)  $2\pi$                       (b)  $\pi$                       (c)  $-2\pi$                       (d)  $-\pi$

**Lösung:** Der Kreis  $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$  umschließt die Einheitskreisscheibe  $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Mit dem Satz von Green berechnen wir

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds &= \iint_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= \iint_D 2 - \cos(xy) + xy \sin(xy) + \cos(xy) - xy \sin(xy) \, dx \, dy \\ &= 2 \iint_D dx \, dy \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

**31.** Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} = u_{tt} - 3u.$$

Mit dem Separationsansatz

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

zerfällt diese PDE in ein System von ODE's für  $X(x)$  und  $T(t)$  in Abhängigkeit von einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$ . Welches System?

$$(a) \quad X'' - kX = 0 \quad \text{und} \quad T'' - (k + 3)T = 0.$$

$$(b) \quad X'' - kX = 0 \quad \text{und} \quad T'' + (k - 3)T = 0.$$

$$(c) \quad X'' - kX = 0 \quad \text{und} \quad T'' - kT = 0.$$

$$(d) \quad X'' - kX = 0 \quad \text{und} \quad T'' + kT = 0.$$

**Lösung:** Wir berechnen die partiellen Ableitungen des Ansatzes:

$$u_{xx}(x, t) = X_{xx}(x)T(t)$$

und

$$u_{tt}(x, t) = X(x)T_{tt}(t).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$X_{xx}(x)T(t) = X(x)T_{tt}(t) - 3X(x)T(t) = X(x)(T_{tt}(t) - 3T(t)).$$

Teilen durch  $X(x)$  und  $T(t)$  ergibt, dass

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' - 3T}{T}$$

gleich einer Konstante  $k$  (unabhängig von  $x$  und  $t$ ) ist. Somit bekommen wir zwei ODE's:

$$X'' = kX \quad \text{und} \quad T'' - 3T = kT.$$

Das ist äquivalent zu

$$X'' - kX = 0 \quad \text{und} \quad T'' - (k + 3)T = 0.$$