Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

29 novembre 2004

Il problema di Bernstein e una congettura di De Giorgi

Candidato

Alessio Figalli

a.figalli@sns.it

Relatore

Prof. Giovanni Alberti

Università di Pisa

Controrelatore

Prof. Luigi Ambrosio

Scuola Normale Superiore

Anno Accademico 2003/2004

Indice

Introduzione

Nel 1978 E. De Giorgi [12] propose la seguente congettura:

Congettura 0.1 (De Giorgi)**.** *Sia* $u : \mathbb{R}^n \to (-1, 1)$ *una soluzione* C^2*, definita su tutto* $\mathbb{R}^n$*, dell'equazione semilineare*

$$\Delta u = u^3 - u,$$

tale da soddisfare la condizione di monotonia

$$\partial_{x_n} u > 0 \quad in\ \mathbb{R}^n. \tag{0.1}$$

Allora tutti gli insiemi di livello $\{u = s\}$ *sono iperpiani, almeno per* $n \leq 8$*.*

La richiesta che gli insiemi di livello di u siano iperpiani è equivalente a chiedere che u dipenda da una sola variabile, cioè che esistano $h : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ e $a \in \mathbb{R}^n$, con $|a| = 1$, tali che $u(x) = h(a \cdot x)$. In particolare, si può facilmente verificare che h deve essere della forma $h(t) = \tanh\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + c\right)$, con $c \in \mathbb{R}$.
E' interessante cercare di capire l'idea che sta dietro questa congettura, che a prima vista potrebbe sembrare un po' misteriosa e quasi immotivata. A tal proposito, occorre innanzitutto richiamare il teorema di Bernstein. Come è noto, l'equazione delle superfici minime che siano grafici di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ corrisponde all'equazione di Eulero-Lagrange legata al funzionale area

$$\mathcal{J}(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$

ed è

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\right) = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{0.2}$$

In [6] S. Bernstein dimostrò che le uniche soluzioni della (0.2) definite su tutto $\mathbb{R}^2$ sono le costanti e i polinomi di primo grado. Nonostante in seguito siano state

trovate anche altre dimostrazioni del teorema di Bernstein, nessuna di esse permetteva di essere estesa a dimensione superiore. E' stato solo nel 1962 che Fleming [15] ha dato una dimostrazione differente che si poteva adattare a dimensione più alta.
La sua idea è stata la seguente: sia f una soluzione dell'equazione delle superfici minime (0.2) ed F il suo sottografico. Si considerino, per $j \in \mathbb{N}$, gli insiemi

$$F_j = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid jx \in F\};$$

si può dimostrare che esiste una sottosuccessione convergente a un qualche insieme minimo C, dove, per convergenza di insiemi, si intende la convergenza in L^1_{loc} delle funzioni caratteristiche e, per insieme minimo, si intende che ∂C è una superficie minima in un qualche senso che verrà spiegato meglio nel capitolo 1.
Ciò che Fleming dimostrò è che C è un cono con vertice in 0 (i.e. $x \in C \Rightarrow tx \in C\ \forall t > 0$) e che ∂C è un iperpiano se e solo se f è una funzione affine. In altre parole, dall'esistenza di una soluzione non banale (i.e. affine) dell'equazione delle superfici minime in tutto $\mathbb{R}^n$, può dedursi l'esistenza di un cono minimo singolare in $\mathbb{R}^{n+1}$, ossia di un cono minimo in $\mathbb{R}^{n+1}$ la cui frontiera non sia localmente grafico in almeno un punto.
De Giorgi, successivamente, fece ancora meglio, dimostrando che se ne poteva dedurre l'esistenza anche in $\mathbb{R}^n$ (vedi [11]).
Si iniziò così a cercare di dimostrare che non esistono coni minimi singolari e fu così che Simons, dimostrando la non esistenza di coni minimi singolari in $\mathbb{R}^7$, ottenne l'estensione del teorema di Bernstein a funzioni da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}$, con $m \leq 7$ (vedi [28]).
Simons attirò poi l'attenzione sui coni

$$\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^m,\ |x|^2 - |y|^2 > 0,\ m \geq 4\},$$

davanti ai quali il suo metodo di dimostrazione si arrestava.
Nel 1969 Bombieri, De Giorgi e Giusti dimostrarono in [7] non solo che i suddetti coni sono minimi e, ovviamente, singolari nel vertice, ma provarono anche, con l'ausilio di sopra- e sotto-soluzioni della (0.2), l'esistenza di soluzioni non banali dell'equazione delle superfici minime.
Ciò che vale è, per l'esattezza, il seguente:

Teorema 0.2. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una soluzione, su tutto $\mathbb{R}^n$, dell'equazione delle superfici minime.*
Se $n \leq 7$, f è affine.
Se $n \geq 8$, esistono soluzioni regolari non affini.

Sia ora $u : \mathbb{R}^n \to (-1, 1)$ una soluzione su tutto $\mathbb{R}^n$ dell'equazione

$$\Delta u = u^3 - u$$

che verifica la (0.1).
Si definisca $u_R(x) := u(Rx)$; si vuole ora studiare il comportamento di u_R per $R \to +\infty$. Le funzioni u_R sono soluzioni limitate dell'equazione riscalata

$$\frac{1}{R}\Delta u_R = R(u_R^3 - u_R),$$

che, per ogni R, è l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2R}|\nabla v|^2 + R\frac{(1-v^2)^2}{4} \right) dx.$$

I funzionali così definiti $\Gamma-$convergono a un funzionale $F(v)$ che coincide con un multiplo del funzionale perimetro sulle funzioni che assumono solo i valori 1 e -1 (ossia della forma $\chi_E - \chi_{\Omega \setminus E}$) e vale $+\infty$ altrimenti [1].
Si consideri ora un insieme di livello $\{u = s\}$ e un raggio arbitrario $r > 0$. Si può dimostrare che, prendendo $\Omega = B_r$, le funzioni u_R, oltre ad essere punti critici dei funzionali definiti sopra, sono anche minimi locali.
Come è noto la $\Gamma-$convergenza assicura la convergenza di minimi globali a minimi globali; meno noto è che, sotto opportune ipotesi aggiuntive sui funzionali, che in questo caso particolare sono verificate, anche la proprietà di minimalità locale si conserva al limite.
Da proprietà di compattezza si riesce dunque ad estrarre una sottosuccesione

$$u_{R_k} \to \chi_E - \chi_{B_r \setminus E},$$

con E insieme minimo e, dall'ipotesi (0.1), si deduce che E è l'epigrafico di una funzione f definita su $\mathbb{R}^{n-1}$ a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora, per il teorema 0.2, se $n - 1 \leq 7$, il grafico di f, ossia ∂E, è un iperpiano [2].
Ci si aspetterebbe allora, euristicamente parlando, che $\{u_{R_k} = s\} \cap B_r$, che non è altro che una copia riscalata di $\{u = s\} \cap B_{rR_k}$, tenda in B_r, per $k \to +\infty$, a un iperpiano, da cui, per l'arbitrarietà di r, è certamente ragionevole aspettarsi che gli insiemi di livello di u siano piatti all'infinito per $n \leq 8$.

[1] Si veda, per le definizioni e per maggiori dettagli, il capitolo 1.
[2] Il teorema 0.2 si può applicare anche se f assume i valori $\pm\infty$ specificando bene in che senso f risolve l'equazione delle superfici minime. A tal proposito si veda il paragrafo 2.2.4.

Notazioni

∇u	gradiente di u
$\partial_{x_i} u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$	derivata parziale di u rispetto a x_i
$\nabla^2 u$	hessiano di u
Δu	laplaciano di u
Du	derivata distribuzionale di u
$D_i u$	derivata parziale di u rispetto a x_i in senso distribuzionale
Ω	aperto di $\mathbb{R}^n$
$A \Subset \Omega$	A ha chiusura compatta in Ω
$x = (x', x_n)$	vettore di $\mathbb{R}^n$
$X = (x, x_{n+1})$	vettore di $\mathbb{R}^{n+1}$
$\|x\|$	norma di x
$(e_1, \ldots, e_n)$	base ortonormale Euclidea di $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{M}_{n\times n}$	matrici $n \times n$
$\mathcal{L}^n$	misura di Lebesgue $n-$dimensionale
$\mathcal{H}^n$	misura di Hausdorff $n-$dimensionale
$\|\mu\|$	misura *variazione totale* di μ
χ_E	funzione caratteristica di E
B_R	palla di centro l'origine e raggio R in $\mathbb{R}^n$
$B_R(x)$	palla di centro x e raggio R in $\mathbb{R}^n$
ω_n	misura di Lebesgue della palla unitaria $n-$dimensionale
$D'(\mathbb{R}^n)$	spazio delle distribuzioni su $\mathbb{R}^n$

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Γ-convergenza

Definizione 1.1. *Dati X spazio metrico e una successione di funzioni $F_\varepsilon : X \to [0, +\infty]$, con ε parametro continuo che tende a 0, si dice che F_ε Γ-converge a F per $\varepsilon \to 0$, e si scrive $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$, se valgono le due seguenti condizioni:*

(i) per ogni $v \in X$ e ogni successione (v_ε) tale che $v_\varepsilon \to v$, vale

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq F(v) \tag{1.1}$$

(ii) per ogni $v \in X$, esiste una successione (v_ε) tale che $v_\varepsilon \to v$ e vale

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) = F(v) \tag{1.2}$$

o, equivalentemente,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq F(v). \tag{1.3}$$

Non è difficile dimostare che la Γ-convergenza gode della fondamentale proprietà di essere stabile per successioni minimizzanti: se $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ e v_ε minimizza F_ε su X, allora ogni punto di accumulazione di (v_ε) minimizza F.
Si supponga, infatti, che $v_{\varepsilon_n} \to v$ per $n \to +\infty$ e sia $w \in X$. Presa allora $w_\varepsilon \to w$ che verifica che la (1.2), si ha

$$F(w) = \lim_{n \to +\infty} F_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n}) \geq \liminf_{n \to +\infty} F_{\varepsilon_n}(v_{\varepsilon_n}) \geq F(v) \quad \forall w \in X$$

e dunque v è un minimo.
Nel caso in cui le F_ε siano funzionali e X è uno spazio di funzioni, si può anche dimostrare che, sotto opportune ipotesi addizionali sui funzionali stessi, la Γ-convergenza gode anche della proprietà di stabilità per successioni di minimi locali, ossia ogni punto di accumulazione di una successione di minimi locali è un minimo locale, dove, con minimo locale, si intende minimo rispetto a perturbazioni a supporto compatto.

1.2 Funzioni BV e insiemi di perimetro finito

Ricordiamo innanzitutto che $C_c^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ rappresenta lo spazio delle funzioni C^k a supporto compatto in Ω a valori in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.2. *Data $f : \Omega \to \mathbb{R}$, si dice che $f \in L^1(\Omega)$ è a variazione limitata dentro Ω, e si scrive $f \in BV(\Omega)$, se*

$$|Df|(\Omega) := \sup \left\{ \int_\Omega f \text{ div } g \, dx \;\middle|\; g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1 \right\} < +\infty.$$

Si noti che, per il teorema di rappresentazione di Riesz (Teorema B.8), ciò è equivalente a chiedere che la derivata distribuzionale di f sia una misura di Radon con variazione totale finita dentro Ω, ossia che esista una misura di Radon $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, a valori in $\mathbb{R}^n$, tale che $\int_\Omega |\mu| < +\infty$ e

$$\int_\Omega f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \phi d\mu_i \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n;$$

μ è allora, per definizione, la derivata distribuzionale di f e, sempre dal teorema di Riesz, segue che

$$|Df|(\Omega) = \int_\Omega |\mu|. \tag{1.4}$$

Definizione 1.3. *Data $f : \Omega \to \mathbb{R}$, con $f \in BV(\Omega)$, denotando con $\fint_{B_\rho(x)}$ l'integrale mediato sulla palla, si definisce l'insieme dei punti di discontinuità essenziale di f*

$$Sf := \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; \fint_{B_\rho(x)} |f(y) - c| dy \not\to 0 \ \forall c \in \mathbb{R} \right\},$$

ossia Sf consiste degli $x \in \Omega$ che non sono punti di Lebesgue per f.

Definizione 1.4. *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice di perimetro finito in Ω se*

$$P(E,\Omega) := \sup \left\{ \int_E \mathrm{div}\ g\ dx \ \middle|\ g \in C^1_c(\Omega,\mathbb{R}^n), |g| \leq 1 \right\} < +\infty$$

o, equivalentemente, se $\chi_E \in BV(\Omega)$, e il numero $P(E,\Omega)$ viene detto perimetro di E in Ω.

Si osservi che, per la (1.4),

$$P(E,\Omega) = \int_\Omega |D\chi_E|.$$

Dal teorema della divergenza segue poi che, se ∂E è sufficientemente regolare,

$$P(E,\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega).$$

1.3 Il teorema di Modica-Mortola

Teorema 1.5 (Modica-Mortola - vedi [22]). *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e si fissi $V \in \mathbb{R}$ tale che $V \in (0, \mathcal{L}^n(\Omega))$. Si consideri dunque sullo spazio metrico*

$$X := \left\{ v : \Omega \to [0,1] \ \middle|\ \int_\Omega v = V \right\}$$

dotato della norma L^1, la famiglia di funzionali

$$F_\varepsilon(v) := \begin{cases} \varepsilon \int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega W(v) & \textit{se } v \in W^{1,2}(\Omega) \cap X \\ +\infty & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

con W funzione continua non negativa che si annulla solo in 0 e in 1, e

$$F(v) := \begin{cases} \sigma |Dv|(\Omega) & \textit{se } v \in BV(\Omega,\{0,1\}) \cap X \\ +\infty & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

con $\sigma := 2\int_0^1 \sqrt{W(s)}ds$.
Allora i funzionali F_ε Γ-convergono a F in X.
Vale inoltre la seguente proprietà di compattezza: date due successioni (ε_n) e (v_n) tali che $\varepsilon_n \to 0$ e $F_{\varepsilon_n}(v_n)$ è limitata, esiste una sottosuccessione (v_{n_k}) convergente in X.

Si noti che, essendo v a valori in $\{0,1\}$,

$$|Dv|(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(Sv).$$

Una interpretazione del teorema suddetto è la seguente: dati due fluidi immiscibili e incomprimibili in un recipiente rappresentato da un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$, detta $v(x)$ la densità del primo fluido nel punto x ($v(x)$ è una funzione a valori in $[0,1]$), si impone il vincolo $\int v = V$ (si è fissato, cioè, il volume del primo fluido).
Se si suppone che tra i due fluidi ci sia una separazione netta, lo spazio delle possibili configurazioni è dato da tutte le $v(x)$ a valori in $\{0,1\}$, alle quali si suppone associata l'energia

$$F(v) = \sigma\mathcal{H}^2(Sv)$$

dove σ è detta tensione superficiale.
Se invece si suppone che la transizione da un liquido a un altro avvenga in maniera continua attraverso un sottile strato di spessore dell'ordine di ε, lo spazio delle possibili configurazioni è dato da tutte le $v(x)$ a valori in $[0,1]$, alle quali si suppone associata l'energia

$$E_\varepsilon(v) = \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega W(v),$$

con W funzione continua non negativa che si annulla solo in 0 e in 1.
Il teorema di Modica-Mortola permette allora di collegare tra loro i due diversi modelli, mostrando che un opportuno riscalamento dei funzionali E_ε converge, in un qualche senso, a F [1] e che le configurazioni di minima energia del modello ad interfaccia continua convergono a una configurazione di minima energia del modello ad interfaccia discontinua.

1.4 Motivazioni euristiche della congettura

Ora che abbiamo richiamato tutti i teoremi che ci servono, vogliamo fare una discussione un po' più dettagliata sul collegamento tra la congettura di De Giorgi e il teorema 0.2, prima di passare alle dimostrazioni.
Diamo prima, però, la definizione esatta di insieme di perimetro minimo:

Definizione 1.6. *Sia E un insieme di perimetro finito dentro Ω.*
E si dice insieme minimo, o di perimetro minimo, dentro Ω se, per ogni compatto

[1] Per la dimostrazione del teorema si veda appendice A, Teorema A.1.

$K \subset \Omega$, *si ha*

$$\int_K |D\chi_E| \leq \int_K |D\chi_F|$$

per ogni F *coincidente con* E *in* $\Omega \setminus K$.

Ci mettiamo ora nell'ipotesi più generale che $F \in C^2(\mathbb{R})$ sia un potenziale della forma di quello di De Giorgi (cioè $\frac{(1-u^2)^2}{4}$), supponendo che esistano m ed M tali che $m < M$ ed $F > F(m) = F(M)$ nell'intervallo (m, M) (F è dunque un cosiddetto *potenziale a doppio pozzo*). Sia poi u una soluzione limitata su tutto $\mathbb{R}^n$ dell'equazione

$$\Delta u = F'(u)$$

che verifica la (0.1) e tale che $\inf u = m$ e $\sup u = M$.
Si definisca $u_R(x) := u(Rx)$. Come è stato già fatto notare nell'introduzione, le funzioni u_R sono soluzioni limitate dell'equazione riscalata

$$\frac{1}{R}\Delta u_R = RF'(u_R),$$

corrispondente, per ogni R, all'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale $\mathcal{E}_R(\cdot, \Omega)$ definito come

$$\mathcal{E}_R(u, \Omega) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2R}|\nabla u|^2 + RF(u) \right) dx.$$

Detto allora $c_F = \int_m^M \sqrt{2F(s)}ds$, in questo caso dal teorema 1.5 seguono le tre seguenti proprietà:

(i) (Semicontinuità inferiore) Se E ha perimetro localmente finito in $\mathbb{R}^n$, allora, prese due successioni $R_i \to +\infty$ e $u_i \to 1_E$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, con 1_E che indica la funzione che vale M su E e m su $\mathbb{R}^n \setminus E$, si ha

$$\liminf_{i \to +\infty} \mathcal{E}_{R_i}(u_i, \Omega) \geq c_F P(E, \Omega) \quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

(ii) (Approssimazione) Se E ha perimetro localmente finito in $\mathbb{R}^n$, esiste una famiglia $(v_R) \subset W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ convergente a 1_E in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e tale che

$$\limsup_{R \to +\infty} \mathcal{E}_R(v_R, \Omega) \leq c_F P(E, \Omega)$$

per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato tale che $P(E, \partial\Omega) = 0$.

(iii) (Coercività) Se $R_i \to +\infty$ e la famiglia $(u_i) \subset W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ soddisfa

$$\sup_i \mathcal{E}_{R_i}(u_i, \Omega) < +\infty \quad \forall \Omega \Subset \mathbb{R}^n,$$

allora esiste una sottosuccessione (u_{i_k}) e un insieme E di perimetro localmente finito tale che u_{i_k} converge a 1_E in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ per $k \to +\infty$.

Dal lemma 3.4 segue che le funzioni u_R sono minimi locali per i funzionali $\mathcal{E}_R$; inoltre, dal teorema 3.7, sappiamo che esiste una sottosuccessione (u_{R_k}) tale che

$$u_{R_k} \to \chi_E - \chi_{\Omega\setminus E} \ \text{ in } L^1_{loc}(\Omega),$$

con E insieme di perimetro minimo dentro Ω. Allora, dal ragionamento fatto nell'introduzione, ci si aspetta che, per $n \leq 8$, gli insiemi di livello di u siano piatti all'infinito.
Più in particolare valgono i seguenti risultati:

Teorema 1.7 (vedi [2]). *Sia u una soluzione limitata su tutto $\mathbb{R}^n$, con $n \leq 8$, dell'equazione*

$$\Delta u = F'(u)$$

che verifica la (0.1), con $F \in C^2(\mathbb{R})$ e tale che $F > F(\inf u) = F(\sup u)$ in $(\inf u, \sup u)$. Si supponga poi che valga la seguente ipotesi aggiuntiva:

$$\lim_{x_n \to -\infty} u(x', x_n) = \inf u \quad e \lim_{x_n \to +\infty} u(x', x_n) = \sup u \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Allora, presa $(R_i) \subset (0, +\infty)$ una qualunque successione tendente a $+\infty$, esistono una sottosuccessione (R_{i_k}) e un vettore unitario $a \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\lim_{k \to +\infty} R_{i_k}^{1-n} \int_{B_{R_{i_k}}} \Big(|\nabla u|^2 - |\partial_a u|^2\Big) dx = 0.$$

Infine $u_k(x) = u(R_{i_k} x)$ converge in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alla funzione caratteristica (con valori $\inf u$ e $\sup u$) di un semispazio ortogonale ad a.

Teorema 1.8 (vedi [10]). *Sia $u_R : \Omega \to [-1, 1]$ un minimo locale del funzionale*

$$\mathcal{E}_R(u, \Omega) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2R} |\nabla u|^2 + RF(x, u) \right) dx,$$

con F potenziale tale che $0 \leq F \leq 1$, $F(x,-1) \equiv F(x,1) \equiv 0$, $F(x,t) > 0$ per $t \in (-1,1)$, e che verifica opportune ipotesi di crescita [2].
Si supponga poi che una sottosuccessione (u_{R_i}) converga localmente in L^1 a

$$v = \chi_E - \chi_{\Omega \setminus E}.$$

Allora ogni insieme di livello $\{u_{R_i} = \mu\}$ converge uniformemente, dentro ogni compatto, a ∂E.

Si può notare che il teorema 1.7 è ancora ben lontano dall'essere una dimostrazione della congettura di De Giorgi; infatti:

(i) la direzione a dipende a priori dalla sottosuccessione (R_{i_k}) e benché il teorema 1.7 implica, con un semplice ragionamento per assurdo, l'esistenza, per ogni R, di un vettore unitario a_R tale che

$$\lim_{R \to +\infty} R^{1-n} \int_{B_R} \Big(|\nabla u|^2 - |\partial_{a_R} u|^2 \Big) dx = 0,$$

non è chiaro come escludere un comportamento a spirale degli insiemi di livello di u all'infinito.

(ii) Supponendo anche che esista un vettore unitario a, indipendente da R, tale che

$$\lim_{R \to +\infty} R^{1-n} \int_{B_R} \Big(|\nabla u|^2 - |\partial_a u|^2 \Big) dx = 0,$$

non è chiaro, a questo punto, come concludere che ∇u è ovunque parallelo ad a.

Per quanto riguarda il teorema 1.8, si osservi che si può applicare prendendo $u_{R_i}(x) = u(R_i x)$, con u come nella congettura di De Giorgi (il potenziale $F(u) = \frac{(1-u^2)^2}{4}$ verifica infatti tutte le ipotesi richieste); allora, dal teorema 2.6, segue, per $n \leq 7$, una convergenza uniforme dei *blow-down* degli insiemi di livello di u a un iperpiano. L'ipotesi di monotonia (0.1) permette poi di utilizzare il teorema 2.8 e, quindi, di ottenere la convergenza uniforme a un iperpiano anche per $n = 8$.
In ogni caso, benché tutti questi discorsi fatti e i teoremi suddetti siano certamente lontani dal dare una dimostrazione della congettura di De Giorgi, fanno però capire perché bisognerebbe aspettarsi che essa sia vera. Anzi, come si vedrà nel secondo paragrafo del capitolo 3, sarà proprio l'idea di studiare la convergenza degli insiemi di livello quella che risulterà vincente per dimostrare la congettura di De Giorgi nel caso $n \leq 8$.

[2] Per maggiori dettagli si veda l'articolo originale.

Capitolo 2

Il teorema di Bernstein

Prima di dare una dimostrazione del teorema di Bernstein per $n = 2$ e di studiare poi, un po' più in dettaglio, il discorso fatto sui coni minimi nell'introduzione e il teorema di Bernstein nella sua versione generale, si vuole far notare una proprietà dell'equazione delle superfici minime:
si consideri il problema di minimizzare l'area del grafico delle funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che $f \equiv \phi$ su $\partial\Omega$, con ϕ funzione assegnata sufficientemente regolare; si sta, cioè, cercando di risolvere il problema di minimo

$$\min \left\{ \mathcal{J}(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx \;\middle|\; f \equiv \phi \text{ su } \partial\Omega \right\}.$$

Certamente, se g risolve il problema di minimo ed è abbastanza regolare, allora è una soluzione della (0.2).
Viceversa, dal fatto che $\mathbb{R}^n \ni p \mapsto \sqrt{1 + |p|^2}$ è strettamente convessa, segue che, se g risolve la (0.2), per ogni f tale che $f \equiv g$ su $\partial\Omega$,

$$\mathcal{J}(f) \geq \mathcal{J}(g) + \int_\Omega \frac{\langle \nabla g, \nabla(f - g) \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} dx = \mathcal{J}(g),$$

da cui g è un minimo. Si è dunque dimostrato che, nel caso particolare del problema di trovare grafici di area minima, risolvere l'equazione di Eulero-Lagrange legata al funzionale area, e cioè la (0.2), è condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione risolva il problema di minimo. Questa è una proprietà generale dei funzionali convessi; la stretta convessità di $\mathcal{J}$ permette poi di concludere che il minimo, se esiste, è unico.

2.1 Il caso $n = 2$

Nel 1915, Bernstein dimostrò il suo famoso teorema sui grafici minimali:

Teorema 2.1 (Bernstein - vedi [6])**.** *Sia $f(x,y)$ una soluzione C^2 dell'equazione delle superfici minime nel piano:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)=0. \tag{2.1}$$

Allora f è affine.

Tra le molte dimostrazioni presenti di questo teorema, la seguente, di Nitsche (vedi [26]), ha certamente il pregio di essere relativamente breve e semplice, ma ha il difetto che, utilizzando metodi dell'analisi complessa, non è estendibile a dimensione superiore.
Dimostrazione.
Si noti innazitutto che la (2.1) può essere equivalentemente riscritta come

$$(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}=0 \tag{2.2}$$

e che, dalla (2.2), segue l'esistenza di una funzione $\Phi(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\Phi_{xx}=\frac{1+f_x^2}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

$$\Phi_{xy}=\frac{f_xf_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

$$\Phi_{yy}=\frac{1+f_y^2}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

Si può infatti dimostrare, in maniera assolutamente analoga a come si dimostrerebbe che un campo vettoriale è un gradiente se e solo se vale la condizione delle derivate incrociate, che, date tre funzioni A, B, C, esiste V tale che

$$\nabla^2 V=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

se e solo se $\partial_y A = \partial_x B$ e $\partial_y B = \partial_x C$, condizioni che, nel nostro caso particolare, sono proprio espresse dalla (2.2) [1].
Tale Φ verifica l'equazione

$$\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2 = 1. \tag{2.3}$$

Modulo il seguente lemma, che ci dice che Φ_{xx} e Φ_{yy} sono costanti, f_x e f_y sono costanti, da cui la tesi. □

Lemma 2.2. *Se $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ verifica la (2.3) in tutto il piano, allora è un polinomio di secondo grado.*

DIMOSTRAZIONE.
A meno di cambiare Φ con $-\Phi$, si può supporre che Φ sia convessa, dal momento che, per la (2.3), $\det(\nabla^2\Phi) = 1$ e dunque gli autovalori dell'hessiano sono concordi e, per la continuità delle derivate seconde, sono sempre o entrambi positivi o entrambi negativi.
Si consideri ora la mappa $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\xi(x, y) = x + \Phi_x(x, y)$$
$$\eta(x, y) = y + \Phi_y(x, y).$$

Si vuole dimostrare che F è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ in sé.
Poiché

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 1 + \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{xy} & 1 + \Phi_{yy} \end{pmatrix},$$

dalla (2.3) si ottiene $\det(\nabla F) = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + 2 > 0$, da cui F è un diffeomorfismo locale.
Il fatto che F sia iniettiva segue dalla convessità di Φ:

$$F(v) = F(w) \Rightarrow v + \nabla\Phi(v) = w + \nabla\Phi(w) \Rightarrow v - w = \nabla\Phi(w) - \nabla\Phi(v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle \nabla\Phi(v) - \nabla\Phi(w), v - w \rangle = -\|v - w\|^2 \Rightarrow v = w.$$

Per dimostrare invece la surgettività di F, fissato $w \in \mathbb{R}^2$, si consideri la funzione $g_w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$g_w(v) = \frac{\|v\|^2}{2} + \Phi(v) - \langle v, w \rangle.$$

[1] Si noti che, in verità, la (2.2) è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione Φ che verifichi le condizioni richieste. La necessità segue, infatti, semplicemente imponendo $\partial_y \Phi_{xx} = \partial_x \Phi_{xy}$ o, equivalentemente, $\partial_y \Phi_{xy} = \partial_x \Phi_{yy}$.

Essendo Φ convessa, g_w avrà un unico punto di minimo $\tilde{v}$ e in tale punto si ha

$$0 = \nabla g_w(\tilde{v}) = \tilde{v} + \nabla\Phi(\tilde{v}) - w = F(\tilde{v}) - w.$$

F è dunque un diffeomorfismo ed esiste $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1.
Si ponga ora $\zeta = \xi + i\eta$ e $w(\zeta) = x - \Phi_x(x, y) - i(y - \Phi_y(x, y))$, con $(x, y) = F^{-1}(\xi, \eta)$.
Osservando che

$$\partial_\xi x = \frac{1 + \Phi_{yy}}{\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + 2}$$

$$\partial_\eta x = \partial_\xi y = \frac{-\Phi_{xy}}{\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + 2}$$

$$\partial_\eta y = \frac{1 + \Phi_{xx}}{\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + 2},$$

è un semplice conto verificare che w è una funzione olomorfa intera.
Inoltre, utilizzando sempre la (2.3), si ha

$$|w'(\zeta)|^2 = \frac{\Phi_{xx} + \Phi_{yy} - 2}{\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + 2} < 1,$$

da cui, per il teorema di Liouville, w' è costante. D'altra parte

$$\Phi_{xx} = \frac{|1 - w'|^2}{1 - |w'|^2} = c_1$$

$$\Phi_{yy} = \frac{|1 + w'|^2}{1 - |w'|^2} = c_2$$

e, quindi, Φ è un polinomio di secondo grado. $\square$

2.2 Il caso generale

Per poter ottenere il teorema di Bernstein in tutta la sua generalità, occorre prima di tutto introdurre la variazione prima e seconda dell'area e, poi, vedere qualche risultato sulla non esistenza di coni minimi singolari.

2.2.1 Variazione prima e seconda dell'area

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme minimo dentro Ω con ∂E regolare e si consideri una famiglia di diffeomorfismi $\{F_t\}$ tali che $F_0 = I$ e $F_t - I$ ha supporto compatto uniforme dentro B_1.
Detti $E_t = F_t(E)$ e $A(t) = \int_\Omega |D\chi_{E_t}|$, per la proprietà di minimalità di E si ha:

$$\frac{d}{dt}A(t)\Big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}A(t)\Big|_{t=0} \geq 0$$

Prendendo $F_t = I + t\nu\zeta$, con $\zeta \in C_0^1$ e ν la normale a ∂E entrante, si ottiene

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |D\chi_{E_t}|\right)\Big|_{t=0} = \int_{\partial E} \mathscr{H}\zeta d\mathcal{H}^{n-1} \Rightarrow \mathscr{H} \equiv 0$$

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2}\left(\int_\Omega |D\chi_{E_t}|\right)\Big|_{t=0} = \int_{\partial E} \left(|\delta\zeta|^2 - (c^2 - \mathscr{H}^2)\zeta^2\right) d\mathcal{H}^{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{\partial E} \left(|\delta\zeta|^2 - c^2\zeta^2\right) d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0$$

dove $\mathscr{H} = \mathscr{H}(x)$ è la curvatura media della superficie ∂E nel punto x, $c^2 = c(x)^2$ è la somma dei quadrati delle curvature principali di ∂E in x e $\delta\zeta$ indica il gradiente tangenziale di ζ, i.e. $\delta\zeta = \nabla\zeta - \langle\nabla\zeta, \nu\rangle\nu$.

2.2.2 Coni minimi

Ricordando quanto detto sopra, passiamo ora a dimostrare il seguente:

Teorema 2.3 (Simons - vedi [28]). *Sia C un cono tale che ∂C è regolare in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Si supponga poi $\mathscr{H} \equiv 0$ e che la variazione seconda dell'area sia non negativa, ossia*

$$\int_{\partial C} \left(|\delta\zeta|^2 - c^2\zeta^2\right) d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0 \tag{2.4}$$

per ogni $\zeta \in C_0^1$ tale che spt $\zeta \cap \{0\} = \emptyset$.
Allora o ∂C è un iperpiano oppure $n \geq 8$.

Dimostrazione.
Sostituendo ζ con $c\zeta$ nella (2.4) e ricordando che $\mathscr{H} \equiv 0$, è solo un lungo conto dimostrare che essa implica

$$\int_{\partial C} \left(|\delta\zeta|^2 - \frac{2\zeta^2}{|x|^2} \right) c^2 d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0 \tag{2.5}$$

per ogni $\zeta \in C_0^1$ tale che spt $\zeta \cap \{0\} = \emptyset$. La stessa equazione vale poi per approssimazione per ogni ζ tale che

$$\int_{\partial C} \zeta^2 c^2 |x|^{-2} d\mathcal{H}^{n-1} < +\infty.$$

Essendo ∂C un cono, $\nu(x)$ è una funzione omogenea di grado 0, da cui $\delta_i \nu_\alpha$ è omogenea di grado -1 e dunque $c^2 = \sum_{i,j} (\delta_i \nu_j)^2$ è omogenea di grado -2. Allora, affinché l'integrale converga, basta che converga

$$\int_{\partial C} \zeta^2 |x|^{-4} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Detto ora $r_1 = \max\{|x|, 1\}$, $r = |x|$, ponendo $\zeta(x) = r^\alpha r_1^\beta$ e utilizzando la formula di coarea (teorema B.4), si ottiene

$$\int_{\partial C} \zeta^2 |x|^{-4} d\mathcal{H}^{n-1} = \int_0^{+\infty} \int_{\partial C \cap \partial B_r} r^{2\alpha-4} r_1^{2\beta} d\mathcal{H}^{n-2} dr =$$

$$= \int_0^{+\infty} r^{2\alpha-4} r_1^{2\beta} \mathcal{H}^{n-2}(\partial C \cap \partial B_r) dr = \mathcal{H}^{n-2}(\partial C \cap \partial B_1) \int_0^{+\infty} r^{2\alpha+n-6} r_1^{2\beta} dr.$$

Prendendo $\alpha > \frac{5-n}{2}$ e $\alpha + \beta < \frac{5-n}{2}$, l'integrale converge; dalla (2.5) segue allora

$$0 \leq (\alpha^2 - 2) \int_{\partial C \cap B_1} r^{2\alpha-2} c^2 d\mathcal{H}^{n-1} + [(\alpha+\beta)^2 - 2] \int_{\partial C \setminus B_1} r^{2(\alpha+\beta)-2} c^2 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Se ora $\left(\frac{5-n}{2}\right)^2 < 2$, si possono scegliere α e β in modo che $\alpha^2 < 2$ e $(\alpha+\beta)^2 < 2$, da cui o $c \equiv 0$, e dunque ∂C è un iperpiano, oppure $(5-n)^2 \geq 8$, e dunque $n \geq 8$. $\square$

A questo punto non è difficile dimostrare che non esistono coni minimi singolari in $\mathbb{R}^n$ per $n \leq 7$.
Infatti vale la seguente:

Proposizione 2.4. *Sia C un cono minimo con vertice in 0 e sia $x_0 \in \partial C \setminus \{0\}$. Per $t > 0$, si definisca*

$$C_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_0 + t(x - x_0) \in C\}.$$

Allora esiste una successione (t_j) convergente a 0 tale che C_{t_j} converge a un cono minimo Q. Vale poi che Q è un cilindro (ossia $Q = A \times \mathbb{R}$), avente come asse la retta congiungente 0 con x_0, e che A è a sua volta un cono minimo.

Si supponga ora che C sia un cono minimo in $\mathbb{R}^n$, singolare in 0 e anche in un altro punto $x_0 \neq 0$. Dal momento che C è un cono, tutti i punti della semiretta uscente da 0 e passante per x_0 devono essere singolari. A meno di ruotare C, si può allora supporre che questa semiretta coincida con l'asse delle x_n. Facendo ora un *blow-up* di C intorno a x_0, si ottiene un cilindro minimo Q tale che l'asse delle x_n giace su ∂Q. Inoltre, si può dimostrare che il limite di una successione di punti singolari è ancora un punto singolare, da cui tutti i punti dell'asse x_n sono singolari. Si ha così che $Q = A \times \mathbb{R}$, con A cono minimo in $\mathbb{R}^{n-1}$ singolare nell'origine. Iterando ancora questo argomento si ottiene il seguente:

Teorema 2.5. *Sia C un cono minimo in $\mathbb{R}^n$, singolare in 0. Allora esiste $k \leq n$ e un cono $A \subset \mathbb{R}^k$ tale che A è minimo e ha solo una singolarità in 0.*

Mettendo insieme i teoremi 2.3 e 2.5, segue che non esistono coni minimi singolari in $\mathbb{R}^n$ per $n \leq 7$, dal momento che ogni cono minimo deve soddisfare $\mathscr{H} \equiv 0$ e la (2.4).

2.2.3 Il teorema di Bernstein per $n \leq 7$

Si può dunque passare a mostrare più in dettaglio l'idea di Fleming [15].
A tal fine, si darà un cenno delle dimostrazioni di due teoremi: il primo su insiemi di perimetro minimo; il secondo, invece, è il teorema di Bernstein sui grafici minimi nella sua forma più generale, che seguirà come corollario di una sua forma più debole.

Teorema 2.6. *Sia E un insieme di perimetro minimo in $\mathbb{R}^n$ tale che $0 \in \partial E$. Allora o ∂E è un iperpiano oppure $n \geq 8$.*

Dimostrazione. (cenno)
Per $j \in \mathbb{N}$ si ponga

$$E_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid jx \in E\} = \frac{E}{j}.$$

Ovviamente, gli insiemi E_j hanno perimetro minimo in $\mathbb{R}^n$, da cui vale

$$\int_{B_R} |D\chi_{E_j}| \leq \frac{1}{2} n\omega_n R^{n-1};$$

ricordando allora che BV si immerge compatto in L^1, tramite un procedimento diagonale si ottiene una sottosuccessione (E_{r_j}) convergente a un insieme C. Il fatto che esso sia ancora un insieme minimo segue sostanzialmente dalla semicontinuità inferiore del perimetro rispetto alla convergenza in L^1, proprietà che può essere facilmente dimostrata a partire dalla definizione di perimetro data all'inizio del capitolo, mentre è meno elementare la dimostrazione che C sia un cono.
Dato questo per buono, da disuguaglianze per insiemi minimi segue, per quasi ogni $R > 0$,

$$\omega_{n-1} \leq (Rr_j)^{1-n} \int_{B_{Rr_j}} |D\chi_E| = R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_{E_{r_j}}| \to R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_C|. \tag{2.6}$$

Si supponga ora $n \leq 7$. In questo caso C deve essere un semispazio, da cui

$$R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_C| = \omega_{n-1}.$$

Usando ora il fatto che, per un insieme minimo, $R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_E|$ è crescente in R, per la (2.6) risulta

$$R^{1-n} \int_{B_R} |D\chi_E| = \omega_{n-1} \quad \forall R > 0.$$

Ricordiamo ora la seguente disuguaglianza per insiemi di perimetro minimo:

$$\left(\int_{\partial B_1} |\chi_E(\rho x) - \chi_E(rx)| d\mathcal{H}^{n-1} \right)^2 \leq$$

$$\leq 2 \int_{B_\rho - B_r} |x|^{1-n} |D\chi_E| \left(\rho^{1-n} \int_{B_\rho} |D\chi_E| - r^{1-n} \int_{B_r} |D\chi_E| \right) \quad \forall r < \rho,$$

dove il valore di χ_E su ∂B_1 è da intendersi nel senso delle tracce per funzioni BV. Notando ora che il membro di destra è nullo, si ottiene che E è un cono, da cui $E = C$ e ∂E è un iperpiano. □

Lemma 2.7 (vedi [24]). *Sia f una soluzione dell'equazione delle superfici minime su tutto $\mathbb{R}^n$ con gradiente limitato. Allora f è affine.*

Dimostrazione.
Per $k = 1, \dots, n$, le funzioni $g_k = \partial_{x_k} f$ risolvono l'equazione

$$\partial_{x_i} \left(a_{ij}(x) \partial_{x_j} g \right) = 0 \tag{2.7}$$

con

$$a_{ij}(x) = \frac{\delta_{ij}(1 + |\nabla f|^2) - \partial_{x_i} f \partial_{x_j} f}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}} \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Essendo $|\nabla f|$ limitato su tutto $\mathbb{R}^n$, esiste una costante ν, indipendente da x, tale che

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

i.e. l'equazione (2.7) è (uniformemente) ellittica.
Si consideri allora, fissato $k \in \{1, \dots, n\}$, la funzione $w = g_k - \inf g_k$.
w è allora una funzione non negativa che verifica la (2.7); dunque, dalla disuguaglianza di Harnack (teorema B.3), si ottiene

$$\sup_{B_R} w \leq C \inf_{B_R} w \quad \forall R > 0,$$

con C indipendente da R, da cui, passando al limite per $R \to +\infty$, $\sup_{\mathbb{R}^n} w \leq 0$, il che implica $\partial_{x_k} f$ costante per $k = 1, \dots, n$. □

Teorema 2.8. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una soluzione, definita su tutto $\mathbb{R}^n$, dell'equazione delle superfici minime, con $n \leq 7$. Allora f è affine.*

Dimostrazione. (cenno)
Per il lemma 2.7 basta dimostare che $|\nabla f|$ è limitato.
Sia dunque F il sottografico di f e siano F_j i *blow-down* di F come nel teorema 2.6.
Allora, per ogni j, l'insieme F_j è il sottografico della funzione $f_j(x) = \frac{1}{j} f(jx)$.
Si può dimostrare che F è un insieme minimo e, dunque, ragionando come nel teorema 2.6, si ottiene che una sottosuccessione (F_{r_j}) converge a un cono minimo $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Questo cono sarà a sua volta il sottografico di una funzione $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$.
Detti ora $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = +\infty\}$ e $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = -\infty\}$, si ha che,

essendo C un cono, P e N sono coni in $\mathbb{R}^n$ con vertice in 0; vale inoltre che P e N sono a loro volta coni minimi. Essendo dunque $n \leq 7$, P e N sono semispazi, da cui

$$g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \in P \\ -\infty & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus P. \end{cases}$$

Ciò significa che C è un semispazio e ∂C è un iperpiano verticale.
Ripetendo nuovamente il ragionamento utilizzato nel teorema 2.6, si ha $F = C$, il che è impossibile perché ∂F, e cioè il grafico di f, non può essere un iperpiano verticale.
Dunque g è in verità una funzione a valori reali tale che il suo sottografico è un insieme di perimetro minimo; vale allora che g è localmente limitata dentro $\mathbb{R}^n$, da cui si può dedurre che le funzioni f_j sono equilimitate dentro la palla unitaria, e quindi

$$\sup_{B_{r_j}} f(x) \leq \gamma r_j. \tag{2.8}$$

Ricordiamo ora la seguente stima a priori sul gradiente delle soluzioni dell'equazione delle superfici minime su tutto $\mathbb{R}^n$ dimostrata da Bombieri, De Giorgi e Miranda [8]:

$$|\nabla f(x)| \leq C_1 \exp\left[C_2 \left(\frac{\sup_{B_R(x)} f - f(x)}{R}\right)\right], \tag{2.9}$$

con C costante indipendente da R e da x.
Mettendo insieme la (2.8) e la (2.9) si ottiene dunque

$$|\nabla f(x)| \leq C_1 \exp\left[C_2 \left(\gamma - \frac{f(x)}{r_j}\right)\right],$$

da cui segue la tesi passando al limite per $j \to +\infty$. □

2.2.4 Minimalità dei coni di Simons

Diamo innanzitutto la definizione di quasi-soluzione:

Definizione 2.9. *Sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Si dice che f è una quasi-soluzione dell'equazione delle superfici minime dentro Ω se il suo sottografico F minimizza localmente il perimetro dentro $Q = \Omega \times \mathbb{R}$.*

Si osservi che, per quanto notato nel teorema 2.6, data una succesione di insiemi minimi esiste una sottosuccessione convergente a un insieme che è, a sua volta, minimo; da questo segue, dunque, che ogni successione (f_k) di quasi-soluzioni ammette una sottosuccessione convergente quasi ovunque a una quasi-soluzione.
Osserviamo, inoltre, che la dimostrazione del teorema 2.8 funziona ancora se si suppone solo che f sia una quasi-soluzione [2].
Vogliamo adesso vedere che questo risultato non può essere migliorato:

Teorema 2.10. *Sia*

$$S = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^m,\ x^2 - y^2 > 0,\ m \geq 4\},$$

ossia il cono di Simons in R^{2m}. Allora la funzione

$$f = \begin{cases} +\infty & se\ x \in S \\ -\infty & se\ x \notin S \end{cases}$$

è una quasi-soluzione in $\mathbb{R}^{2m}$.

Dimostrazione. (vedi [19])
Sia

$$g(x, y) = |x|^4 - |y|^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m.$$

Allora, essendo $m \geq 4$, g soddisfa

$$g \text{ div} \left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} \right) \geq 0$$

su tutto $\mathbb{R}^{2m}$. g è dunque una sottosoluzione per l'equazione delle superfici minime in S e una soprasoluzione in $\mathbb{R}^{2m} \setminus S$ [3]. Lo stesso è poi vero per la successione di funzioni

$$g_k := \frac{g(kx, ky)}{k} = k^3 g(x, y).$$

Si considerino i problemi di minimo in $W^{1,\infty}(B_R)$:

$$\min \left\{ \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx \;\middle|\; f \equiv g_k \text{ su } \partial B_R \right\},$$

[2] Questa osservazione ci sarà poi utile nel teorema 3.17.
[3] Per la definizione di sopra e sottosoluzione si veda appendice B, Teorema B.7.

con $R > 0$ fissato.
Grazie al fatto che il bordo e il dato al bordo sono regolari e che il bordo ha curvatura media non negativa, si può dimostrare che ciascun problema di minimo ammette un'unica soluzione regolare f_k. Dalla simmetria delle g_k si deduce che $f_k \equiv 0$ su ∂S e, dal principio del massimo (Teorema B.7),

$$\begin{cases} f_k \geq g_k & \text{in } S \\ f_k \leq g_k & \text{in } \mathbb{R}^{2m} \setminus S \end{cases}$$

da cui, facendo tendere k a $+\infty$, si ottiene $f_k \to f$. La tesi segue, dunque, dall'osservazione fatta sopra e dall'arbitrarietà di R. □

Concludiamo ricordando che, come già detto nell'introduzione, vale ben di più di quanto si è dimostrato: per $n = 8$, esiste una soluzione su tutto $\mathbb{R}^n$ dell'equazione delle superfici minime che non è affine. Per costruirla, si utilizza il cono di Simons in R^8 : si costruiscono prima opportune sopra- e sotto-soluzioni dell'equazione e poi, partendo da queste, si dimostra l'esistenza di una soluzione che è positiva dentro S, nulla su ∂S e negativa nella parte rimanente. In particolare, questa soluzione avrà, per il lemma 2.7, crescita più che lineare.

Capitolo 3

La congettura di De Giorgi

3.1 I casi $n = 2$ e $n = 3$

Si dimostrerà, in maniera praticamente identica a parte alcune difficoltà tecniche in più per il caso $n = 3$, il seguente teorema, che non è altro che una generalizzazione della congettura di De Giorgi.

Teorema 3.1 (vedi [2])**.** *Sia $F \in C^2(\mathbb{R})$ e sia u una soluzione limitata su tutto $\mathbb{R}^n$, con $n = 2$ o $n = 3$, dell'equazione semilineare*

$$\Delta u = F'(u), \tag{3.1}$$

con u che verifica la condizione di monotonia

$$\partial_{x_n} u > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Allora tutti gli insiemi di livello $\{u = s\}$ sono iperpiani.

La cosa interessante da notare è che, nei due casi particolari $n = 2$ e $n = 3$, la congettura è vera senza fare nessuna ipotesi sul potenziale F, al quale si richiede solo di essere regolare. Anzi, per $n = 2$, il teorema vale in ipotesi ancora più generali:

Teorema 3.2 (vedi [14])**.** *Siano $f \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R})$ e $a \in C^{1,1}_{loc}(0, +\infty)$, con a che verifica opportune ipotesi di crescita (verificate da $a \equiv 1$) [1]. Sia $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una soluzione di*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(|\nabla u|)\nabla u) + f(u) = 0 & \text{in } D'(\mathbb{R}^2) \\ |\nabla u| > 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

[1] Per maggiori dettagli si veda l'articolo originale.

con $|\nabla u| \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. *Si assuma infine che esista* $\delta < 1$ *tale che*

$$|arg\ (\nabla u)(x)| = O(\ln^\delta |x|) \quad per\ |x| \to +\infty.$$

Allora u *è unidimensionale, cioè esistono* $\nu \in S^1$ *e* $g \in C^2(\mathbb{R})$ *tali che* $u(x) = g(\nu \cdot x)$ *e* $|g'(x)| > 0$.

Dimostrazione del teorema 3.1.
Nel corso della dimostrazione si avrà bisogno di una serie di lemmi e teoremi, le cui dimostrazioni sono riportate alla fine per semplificare la lettura.
Sia nel caso $n = 2$ che nel caso $n = 3$, il punto chiave della dimostrazione sarà il seguente teorema tipo-Liouville:

Teorema 3.3 (vedi [5]). *Sia* $\phi \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *una funzione positiva.*
Si assuma che $\sigma \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *soddisfi*

$$\sigma \mathrm{div}(\phi^2 \nabla \sigma) \geq 0 \quad in \quad \mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

in senso distribuzionale e che, per ogni $R > 1$,

$$\int_{B_R} (\phi\sigma)^2 dx \leq CR^2 \tag{3.4}$$

per una certa costante C, *indipendente da* R. *Allora* σ *è costante.*

Per applicare questo teorema alla dimostrazione del teorema 3.1, si considerino le funzioni

$$\phi := \partial_{x_n} u > 0$$

e

$$\sigma_i := \frac{\partial_{x_i} u}{\partial_{x_n} u} = \frac{\partial_{x_i} u}{\phi}$$

per ogni $i = 1, \ldots, n-1$. Basta allora dimostrare che ciascun σ_i è costante, dal momento che questo implicherebbe $\nabla(u) = a|\nabla(u)|$, con a vettore unitario costante, e che dunque gli insiemi di livello di u sono iperpiani ortogonali ad a.
Si noti che, poiché $\phi^2 \nabla \sigma_i = \phi \nabla \partial_{x_i} u - \partial_{x_i} u \nabla \phi$, e dal momento che sia $\partial_{x_i} u$ sia ϕ risolvono la stessa equazione lineare $\Delta v = F''(u) v$, si ha

$$\mathrm{div}(\phi^2 \nabla \sigma_i) = \langle \nabla \phi, \nabla \partial_{x_i} u \rangle + \phi \Delta \partial_{x_i} u - \langle \nabla \partial_{x_i} u, \nabla \phi \rangle - \partial_{x_i} u \Delta \phi =$$

$$= \phi(F''(u) \partial_{x_i} u) - \partial_{x_i} u (F''(u) \phi) = 0,$$

e dunque la (3.3) è verificata. Per quanto riguarda la (3.4), poiché $\phi\sigma_i = \partial_{x_i} u$, si tratta di verificare che vale

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx \le CR^2 \quad \forall R > 1, \tag{3.5}$$

con C indipendente da R.

Nel caso $n = 2$, la (3.5) segue da stime $W^{2,p}$, con $p > n$, applicate all'equazione $\Delta u = F'(u)$ in ogni palla $B_2(x)$ di raggio 2: si ha infatti, poiché u e $F'(u)$ sono in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, che

$$||u||_{W^{2,p}(B_1(x))} \le C\left(||u||_{L^\infty(B_2(x))} + ||F'(u)||_{L^p(B_2(x))}\right) \le \tilde{C} \quad \forall p \in [1, +\infty) \tag{3.6}$$

con $\tilde{C}$ indipendente da x. Grazie alle immersioni di Sobolev, $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ per $p > n$ e, dunque, $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, da cui segue la (3.5).

Nel caso $n = 3$, la (3.5) vale ancora ma è più complicato dimostrarla.
Si definisca innanzitutto

$$\overline{u}(x') := \lim_{x_n \to +\infty} u(x', x_n)$$

e

$$\underline{u}(x') := \lim_{x_n \to -\infty} u(x', x_n)$$

(si noti che, per la (3.2), la definizione ha senso); si osservi che, per la (3.6), abbiamo $F'(u) \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\nabla F'(u) = F''(u)\nabla u$ e

$$\Delta \partial_{x_i} u = F''(u)\partial_{x_i} u$$

in senso debole, per ogni $i = 1, \dots n$.
Con le stesse stime usate sopra, si ottiene una stima uniforme della norma $W^{3,p}$ di u in ogni palla di raggio 1 e, ricordando che, per $p > n$, $W^{3,p} \hookrightarrow C^{2,\alpha}$ con $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, si ottiene $\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_1(x))} \le C$ $\forall \alpha \in (0,1)$, con C indipendente da x, e dunque $\|u\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le \tilde{C}$.
Per Ascoli-Arzelà, otteniamo allora che esiste una successione $x_{n_k} \to +\infty$ tale che $u(x', x_{n_k})$ converge in $C^2(\mathbb{R}^n)$ a $\overline{u}(x')$ e quindi

$$\Delta \overline{u} + L = F'(\overline{u}),$$

con $L(x') = \lim_{k \to +\infty} \partial_{x_n x_n} u(x', x_{n_k})$; allora un semplice ragionamento sulla limitatezza di u dà $L \equiv 0$; ripetendo lo stesso ragionamento con $\underline{u}$, si ottiene che $\overline{u}$ e $\underline{u}$ risolvono la (3.1) su $\mathbb{R}^{n-1}$. Si avrà poi bisogno del seguente lemma di locale minimalità:

Lemma 3.4. *Sia u una soluzione limitata della (3.1) su $\mathbb{R}^n$ che verifica la condizione di monotonia (3.2) e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato regolare. Allora*

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\right) dx \leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 + F(v)\right) dx \tag{3.7}$$

per ogni funzione $v \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che $v \equiv u$ su $\partial\Omega$ e

$$\underline{u}(x') \leq v(x', x_n) \leq \overline{u}(x') \quad \forall x = (x', x_n) \in \Omega.$$

A questo punto si può dimostrare il seguente:

Teorema 3.5. *Sia u soluzione limitata della (3.1) su $\mathbb{R}^3$ che verifica la condizione di monotonia (3.2). Vale allora la (3.5) per ogni $R > 1$ con C indipendente da R.*

Dimostrazione.
Per prima cosa si vuole vedere quando l'intervallo $[\sup\ \underline{u}, \inf\ \overline{u}]$, con $\overline{u}$ e $\underline{u}$ definite precedentemente, è non vuoto.
Si consideri $\overline{u}(x')$. Per quanto visto prima, $\overline{u}$ risolve la (3.1) su $\mathbb{R}^2$; vale inoltre il seguente:

Lemma 3.6. *Sia u soluzione limitata della (3.1) su tutto $\mathbb{R}^n$ che verifica la (3.2) e sia $\overline{u}(x') := \lim_{x_n \to +\infty} u(x', x_n)$. Allora esiste una funzione $\phi \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$ $\forall p < \infty$ tale che $\phi > 0$ e*

$$\Delta\phi - F''(\overline{u})\phi \leq 0 \quad su\ \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.8}$$

Si considerino dunque, per $i = 1, 2$, le funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^2$

$$\sigma_i = \frac{\partial_{x_i}\overline{u}}{\phi},$$

con ϕ data dal lemma 3.6.
Si noti che, essendo $\phi > 0$, σ_i è ben definita e si ha poi sufficiente regolarità affinché valga

$$\mathrm{div}(\phi^2 \nabla \sigma_i) = \phi \Delta \partial_{x_i}\overline{u} - \partial_{x_i}\overline{u}\Delta\phi,$$

da cui, per la (3.8),

$$\sigma_i \mathrm{div}(\phi^2 \nabla \sigma_i) = \partial_{x_i}\overline{u}\Delta\partial_{x_i}\overline{u} - (\partial_{x_i}\overline{u})^2(\Delta\phi/\phi) =$$

$$= (\partial_{x_i}\overline{u})^2 F''(\overline{u}) - (\partial_{x_i}\overline{u})^2(\Delta\phi/\phi) \geq 0.$$

Vale allora la (3.3); per quanto riguarda la (3.4), basta osservare che $\phi\sigma_i = \partial_{x_i}\overline{u}$ è limitata e che siamo in dimensione 2. Dal teorema 3.3, si ottiene che σ_i è costante, da cui

$$\partial_{x_i}\overline{u} = c_i\phi \tag{3.9}$$

per qualche costante c_i.
Se $c_1 = c_2 = 0$, allora $\overline{u}$ è costante.
Se almeno un c_i è diverso da 0, allora, per la (3.9), $\overline{u}$ è costante lungo la direzione $(c_2, -c_1)$ e, dunque, preso $a = (c_1, c_2)/|(c_1, c_2)|$, si ottiene $\overline{u}(x') = h(a \cdot x')$, con $h \in C^2(\mathbb{R})$. Inoltre, sempre per la (3.9), $c_i\phi = c_i h'(a \cdot x')/|(c_1, c_2)|$, da cui $h' > 0$. Segue allora

$$h'' - F'(h) = 0 \Rightarrow (h'' - F'(h))h' = 0 \Rightarrow F(h) - \frac{1}{2}h'^2 = \overline{C}.$$

Poiché h è limitata (perché tale è u), se $h' > 0$ (cioè $\overline{u}$ non è costante) si ha $\liminf_{t\to\pm\infty} h'(t) = 0$, da cui, detti $\overline{m} = \inf\ \overline{u}$ e $\overline{M} = \sup\ \overline{u}$, $F(\overline{m}) = F(\overline{M}) = \overline{C}$ e $F > \overline{C}$ in $(\overline{m}, \overline{M})$.
Analogamente, detti $\underline{m} = \inf\ \underline{u}$ e $\underline{M} = \sup\ \underline{u}$, se $\underline{u}$ non è costante si ha $F(\underline{m}) = F(\underline{M}) = \underline{C}$ e $F > \underline{C}$ in $(\underline{m}, \underline{M})$.
Da ciò si ottiene che, considerando le quattro possibili situazioni (cioè $\overline{u}$ e $\underline{u}$ costanti o meno), l'unico caso in cui $\underline{M} > \overline{m}$, e cioè in cui l'intervallo $[\sup\ \underline{u}, \inf\ \overline{u}]$ è vuoto, si ha quando $\underline{m} = \overline{M}$ e $\underline{m} = \overline{m}$, caso che verrà trattato a parte alla fine.
Nei rimanenti casi, ovvero quelli in cui l'intervallo $[\sup\ \underline{u}, \inf\ \overline{u}]$ è non vuoto, si noti che, per quanto visto sopra, esiste un $s \in [\sup\ \underline{u}, \inf\ \overline{u}]$ tale che

$$F(s) = c_u := \min\{F(t) \mid \inf\ u \le t \le \sup\ u\}.$$

Sia allora $\phi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $0 \le \phi_R \le 1$, $\phi_R \equiv 1$ in B_{R-1}, $\phi_R \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_R$ e $||\nabla\phi_R||_\infty \le 2$, e si consideri

$$v_R := (1 - \phi_R)u + \phi_R s.$$

Questa funzione verifica le ipotesi del lemma 3.4 con $\Omega = B_R$; ricordando allora che $\nabla u \in L^\infty$, si ottiene:

$$\int_{B_R} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx \le \int_{B_R} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) - c_u\right) dx \le$$

$$\le \int_{B_R} \left(\frac{1}{2}|\nabla v_R|^2 + F(v_R) - c_u\right) dx = \int_{B_R\setminus B_{R-1}} \left(\frac{1}{2}|\nabla v_R|^2 + F(v_R) - c_u\right) dx \le$$

$$\leq \tilde{C}\mathcal{L}^3(B_R \setminus B_{R-1}) \leq CR^2$$

per ogni $R > 1$, con C indipendente da R [2].
Nel caso in cui l'intervallo $[\sup\ \underline{u}, \inf\ \overline{u}]$ è vuoto, si consideri invece

$$v_R := (1 - \phi_R)u + \phi_R\overline{u}$$

e $c_u := F(\overline{m})$.
Usando il fatto che $F \geq F(\overline{m})$ nell'intervallo $[\inf u, \sup u]$ e che v_R verifica ancora le ipotesi del lemma 3.4, si può ragionare esattamente come sopra ottenendo, in questo caso,

$$\int_{B_R} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx \leq CR^2 + \int_{B_{R-1}} \left(\frac{1}{2}|\nabla\overline{u}(x')|^2 + F(\overline{u}(x')) - c_u\right) dx.$$

Si tratta ora di stimare l'energia dentro B_{R-1}; ricordando che $\overline{u}(x') = h(a \cdot x')$, con h funzione di una sola variabile, si ha

$$\int_{B_{R-1}} \left(\frac{1}{2}|\nabla\overline{u}|^2 + F(\overline{u}) - c_u\right) dx \leq \tilde{C}R^2 \int_{1-R}^{R-1} \left(\frac{1}{2}h'(s)^2 + F(h(s)) - c_u\right) ds.$$

Inoltre, per quanto visto precedentemente, $F(h) - c_u = \frac{1}{2}h'^2$ e dunque

$$\int_{1-R}^{R-1} \left(\frac{1}{2}h'^2 + F(h) - c_u\right) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} h'^2 \leq (\overline{M} - \overline{m}) \sup h' \leq (\overline{M} - \overline{m})\sqrt{2D},$$

con $D = \max_{t\in[\overline{m},\overline{M}]} F(t) - F(\overline{M})$, da cui la tesi. □

Per concludere, restano solo da dimostrare i lemmi e il teorema tipo-Liouville:

Dimostrazione del teorema 3.3.
Sia ζ una funzione C^∞ su $\mathbb{R}^+$ tale che $0 \leq \zeta \leq 1$ e

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$$

[2] Si noti come la stima trovata non dipenda dalla dimensione: se u è una soluzione della (3.1) su $\mathbb{R}^n$ che verifica la condizione di monotonia (3.2), allora

$$\int_{B_R} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx \leq CR^{n-1}$$

per ogni $R > 1$, con C indipendente da R

Per $R > 1$ sia $\zeta_R(x) = \zeta\left(\frac{|x|}{R}\right)$ per $x \in \mathbb{R}^n$.
Moltiplicando la (3.3) per ζ_R^2 e integrando per parti su tutto $\mathbb{R}^n$, si ottiene

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_R^2 \sigma \,\mathrm{div}(\phi^2 \nabla\sigma) = -\int_{\mathbb{R}^n} \phi^2 \langle \nabla\sigma, \nabla\zeta_R \rangle 2\zeta_R \sigma - \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_R^2 \phi^2 |\nabla\sigma|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_R^2 \phi^2 |\nabla\sigma|^2 \leq 2 \int_{B_{2R}\setminus B_R} (\zeta_R \phi |\nabla\sigma|)(\phi\sigma |\nabla\zeta_R|) \leq$$

$$\leq 2 \left[\int_{B_{2R}\setminus B_R} \zeta_R^2 \phi^2 |\nabla\sigma|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{B_{2R}\setminus B_R} \phi^2 \sigma^2 |\nabla\zeta_R|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2 \sup \zeta'^2 \left[\int_{B_{2R}\setminus B_R} \zeta_R^2 \phi^2 |\nabla\sigma|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{R^2} \int_{B_{2R}\setminus B_R} (\phi\sigma)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \tilde{C} \left[\int_{B_{2R}\setminus B_R} \zeta_R^2 \phi^2 |\nabla\sigma|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{R^2} \int_{B_{2R}} (\phi\sigma)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

con $\tilde{C}$ costante indipendente da R.
Dunque, per la (3.4),

$$\int_{\mathbb{R}^n} \zeta_R^2 \phi^2 |\nabla\sigma|^2 \leq \overline{C} \left[\int_{B_{2R}\setminus B_R} \zeta_R^2 \phi^2 |\nabla\sigma|^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.10}$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}^n} \zeta_R^2 \phi^2 |\nabla\sigma|^2 \leq C.$$

Mandando ora $R \to \infty$, si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi^2 |\nabla\sigma|^2 \leq C.$$

Da ciò segue che il membro di destra della (3.10) tende a zero per $R \to \infty$ e, ricordando che $\phi > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi^2 |\nabla\sigma|^2 = 0 \Rightarrow |\nabla\sigma|(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

da cui σ è costante. □

Dimostrazione del lemma 3.4.
Sia v il minimo assoluto di

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 + F(v)\right) dx$$

all'interno della classe delle funzioni ammissibili

$$\mathcal{A} := \{v \in W^{1,2}(\Omega) \mid \underline{u}(x') \le v(x) \le \overline{u}(x'),\ v|_{\partial\Omega} \equiv u|_{\partial\Omega}\},$$

che esiste per compattezza debole e semicontinuità inferiore del funzionale.
Si vuole dimostrare che $u = v$. Si ponga dunque $u^t(x) := u(x', x_n + t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Poiché

$$\lim_{t\to+\infty} u^t(x) = \overline{u}(x'),$$

si riesce a concludere, usando la compattezza di $\overline{\Omega}$, che, per t sufficientemente grande, il grafico di u^t sta sopra il grafico di v.
Se infatti, per assurdo, esistesse una successione $t_k \to +\infty$ tale che, per ogni k, esiste x_k con $u^{t_k}(x_k) \le v(x_k)$, si potrebbe estrarre una sottosuccessione (t_{k_h}) tale che $x_{k_h} \to \tilde{x}$. Allora, dalla limitatezza dei gradienti di u e v, che segue dalle stime ellittiche utilizzate precedentemente nella dimostrazione del teorema 3.1, si otterrebbe $\overline{u}(\tilde{x}) = v(\tilde{x})$.
Dal momento, però, che v è soluzione di

$$\begin{cases} \Delta v = F'(v) & \text{in } \Omega \\ v = u & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

si ha che la funzione $\phi = \overline{u} - v$ risolve la seguente equazione:

$$\begin{cases} \Delta \phi = c(x)\phi & \text{in } \Omega \\ \phi \ge 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

con

$$c(x) := \begin{cases} \frac{F'(\overline{u}(x)) - F'(v(x))}{\overline{u}(x) - v(x)} & \text{se } \overline{u}(x) \ne v(x) \\ 0 & \text{se } \overline{u}(x) = v(x). \end{cases}$$

Allora, dal principio del massimo (teorema B.6), si avrebbe $\overline{u} \equiv v$, il che contraddirrebbe il fatto che $v|_{\partial\Omega} \equiv u|_{\partial\Omega}$.
Si inizi ora a far decrescere t fino a un certo t_0 in corrispondenza del quale i due grafici si toccano per la prima volta.
$\psi = u^{t_0} - v$ è una funzione non negativa su $\partial\Omega$ che risolve

$$\Delta\psi = d(x)\psi$$

con

$$d(x) := \begin{cases} \frac{F'(u^{t_0}(x)) - F'(v(x))}{u^{t_0}(x) - v(x)} & \text{se } u^{t_0}(x) \neq v(x) \\ 0 & \text{se } u^{t_0}(x) = v(x). \end{cases}$$

Sempre dal principio del massimo, si ottiene che il primo punto di contatto si deve avere su $\partial\Omega$, da cui $t_0 = 0$ e $v \leq u$. Allo stesso modo si ottiene $v \geq u$, il che prova che $u = v$ e, dunque, u è un minimo locale in Ω. □

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 3.6.
Si ricordi che, come notato precedentemente,

$$\Delta\partial_{x_n} u = F''(u)\partial_{x_n} u \tag{3.11}$$

su tutto $\mathbb{R}^n$.
Poiché $\partial_{x_n} u > 0$ e $\partial_{x_n} u \in C^1$, presa $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, moltiplicando la (3.11) per $\xi^2/\partial_{x_n} u$ e integrando per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{2\xi}{\partial_{x_n} u} \langle \nabla\partial_{x_n} u, \nabla\xi \rangle + F''(u)\xi^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\xi^2}{(\partial_{x_n} u)^2} |\nabla\partial_{x_n} u|^2 dx.$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz segue allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla\xi|^2 + F''(u)\xi^2 \right) dx \geq 0 \quad \forall\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{3.12}$$

che corrisponde a dire che la variazione seconda dell'energia associata all'equazione (3.1), calcolata in u, è non-negativa. Si vuole ora dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(|\nabla\eta|^2 + F''(\overline{u})\eta^2 \right) dx \geq 0 \quad \forall\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{3.13}$$

Per far ciò, si prenda $\rho > 0$ e $\psi_\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, con $0 \leq \psi_\rho \leq 1, 0 \leq \psi'_\rho \leq 2$, $\psi_\rho = 0$ in $(-\infty, \rho) \cup (2\rho + 2, +\infty)$ e $\psi_\rho = 1$ in $(\rho + 1, 2\rho + 1)$.
Usando la (3.12) con $\xi(x) = \eta(x')\psi_\rho(x_n)$, dopo aver diviso per $\alpha_\rho = \int \psi_\rho^2$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla\eta(x')|^2 + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(|\eta(x')|^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi'^2_\rho(x_n)}{\alpha_\rho} \right) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(|\eta(x')|^2 \int_{\mathbb{R}} F''(u(x', x_n)) \frac{\psi_\rho^2(x_n)}{\alpha_\rho} \right) \geq 0.$$

Passando ora al limite per $\rho \to +\infty$ e tenendo presente che $F \in C^2$ e che, essendo u, $\overline{u}$ continue e $u(x', x_n)$ monotona in x_n, la convergenza di $u(x', x_n)$ a $\overline{u}(x')$ è uniforme sui compatti di $\mathbb{R}^{n-1}$, si ottiene la (3.13).
Detto ora $B'_R = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x'| < R\}$, si consideri il problema di minimo

$$\min_{v \in W_0^{1,2}(B'_R)} \left\{ \int_{B'_R} \Big(|\nabla v|^2 + F''(\overline{u}) v^2 \Big) dx \;\middle|\; \int_{B'_R} v^2 dx = 1 \right\}.$$

Si ottiene così una $\phi_R \in W_0^{1,2}(B'_R)$ tale che

$$-\Delta \phi_R + F''(\overline{u})\phi_R = \lambda_{1,R}\phi_R, \tag{3.14}$$

con $\lambda_{1,R}$ il primo autovalore di $-\Delta + F''(\overline{u})$.
Utilizzando il fatto che $\phi_R \equiv 0$ su $\partial B'_R$, si ha

$$\int_{\mathbb{B}'_R} \Big(|\nabla \phi_R|^2 + F''(\overline{u})\phi_R^2 \Big) dx = \lambda_{1,R} \int_{\mathbb{B}'_R} \phi_R^2 dx,$$

da cui, per la (3.13),

$$\lambda_{1,R} = \frac{\int_{\mathbb{B}'_R} \left(|\nabla \phi_R|^2 + F''(\overline{u})\phi_R^2 \right) dx}{\int_{\mathbb{B}'_R} \phi_R^2 dx} \geq 0.$$

Notando poi che $W_0^{1,2}(B'_r) \subset W_0^{1,2}(B'_R)$ se $r \leq R$, segue che $(\lambda_{1,R})$ è una successione decrescente in R e, in particolare, limitata. Allora, da stime uniformi $W^{2,p}$ dentro ogni compatto K, preso un altro compatto K' con $K \subset \overset{\circ}{K'}$, si ottiene dunque

$$||\phi_R||_{W^{2,p}(K)} \leq C(||F''(\overline{u})||_{L^p(K')} + \ \lambda_{1,R})||\phi_R||_{L^p(K')} \leq \tilde{C}||\phi_R||_{L^p(K')}, \tag{3.15}$$

con $\tilde{C}$ che non dipende da R; per *boot-strap* è allora facile vedere, grazie alle immersioni di Sobolev, che, dalla (3.15), segue $\phi_R \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$ $\forall p \in [1, +\infty)$.
A questo punto, a meno di scambiare ϕ_R con $-\phi_R$, possiamo supporre che esista un punto $x_R \in B_R$ tale che $\phi_R(x_R) \geq 0$.
Notando che anche $|\phi_R| \in W_0^{1,2}(B'_R)$ risolve il problema di minimo, si consideri $w_R = |\phi_R| - \phi_R$. Dal momento che w_R risolve la (3.14), si può applicare il principio del massimo (teorema B.6) e, notando che $w_R(x_R) = 0$, si ha $w_R \equiv 0$, da cui $\phi_R \geq 0$.
Riapplicando ora il principio del massimo a ϕ_R, si ottiene $\phi_R > 0$ e, a meno di

rinormalizzazioni, si può supporre $\phi_R(0) = 1$.
Ricordando che, per quanto fatto notare sopra, la successione $(\lambda_{1,R})$ è limitata, dalla disuguaglianza di Harnack (teorema B.1) segue che, fissato un qualunque compatto K, le funzioni ϕ_R sono limitate uniformemente in R dentro K.
Per la (3.15) la successione (ϕ_R) è dunque limitata in $W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$ e, per le immersioni compatte di Sobolev, esiste una sottosuccessione (ϕ_{R_i}) convergente in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$ a una funzione $\phi \geq 0$. Ancora dalla (3.15), applicata alle funzioni $\phi_{R_i} - \phi_{R_j}$, segue che la sottosuccessione (ϕ_{R_i}) è di Cauchy in $W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$, da cui $\phi \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$.
Dal momento che, per ogni $R_i > 0$,

$$\Delta\phi_{R_i} - F''(\overline{u})\phi_{R_i} = -\lambda_{1,R_i}\phi_{R_i} \leq 0,$$

posto $\lambda = \lim_{i\to+\infty} \lambda_{1,R_i}$, passando al limite si ottiene

$$\Delta\phi - F''(\overline{u})\phi = -\lambda\phi \leq 0,$$

da cui la (3.8). Infine, ancora per il principio del massimo, $\phi > 0$. $\square$

La dimostrazione del teorema 3.1 è così completata. $\square$

3.2 Il caso generale

Come si è visto nel precedente paragrafo, la congettura di De Giorgi è vera per $n = 2$ e $n = 3$ senza nessuna ipotesi sul potenziale F e, soprattutto, senza usare nulla del teorema di Bernstein. Nella dimostrazione del caso generale, ossia per $n \leq 8$, di O. Savin [27], che risale al 2003, risultano invece di fondamentale importanza tutti i discorsi euristici fatti nell'introduzione; in particolare, il potenziale F dovrà essere analogo a quello di De Giorgi, ossia $\frac{(1-u^2)^2}{4}$. Resta da dire che, per $n \geq 9$, non si sa dire ancora nulla a meno che non si facciano forti ipotesi addizionali, per esempio sulla crescita all'infinito degli insiemi di livello (si veda il teorema 3.17 *(ii)*).
Si consideri dunque il funzionale

$$\mathcal{E}(u, \Omega) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\right) dx,$$

con $|u| \leq 1$ e $F \in C^2[-1, 1]$, $F(-1) = F(1) = 0$, $F > 0$ su $(-1, 1)$, $F'(-1) = F'(1) = 0$, $F''(-1) > 0$ e $F''(1) > 0$.

Introduciamo poi i funzionali riscalati

$$\mathcal{E}_R(u,\Omega) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2R}|\nabla u|^2 + RF(u)\right) dx,$$

notando che, se u è un minimo locale di $\mathcal{E}(u,\Omega)$, allora $u_R(x) := u(Rx)$ sono minimi locali per $\mathcal{E}(\cdot, \frac{\Omega}{R})$.
Per comodità di notazione, in certi casi si considereranno i riscalamenti di $\mathcal{E}$ dati da

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u,\Omega) := \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}F(u)\right) dx,$$

e, in corrispondenza, le funzioni $u_\varepsilon(x) := u(\frac{x}{\varepsilon})$.
Facciamo infine la seguente ipotesi aggiuntiva su u :

$$\lim_{x_n \to \pm\infty} u(x', x_n) = \pm 1 \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Prima di dare la dimostrazione della congettura di De Giorgi per $n \leq 8$ in questa forma leggermente più debole (ossia con la suddetta ipotesi aggiuntiva sul comportamento di u per $x_n \to \pm\infty$), occorre fare qualche richiamo e dare la definizione di soluzione di viscosità.

3.2.1 Risultati preliminari e soluzioni di viscosità

I seguenti risultati risulteranno fondamentali ai fini della dimostrazione:

Teorema 3.7 (vedi [21])**.** *Siano $u_k : \Omega \to [-1,1]$ minimi locali per i funzionali $\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(\cdot,\Omega)$, con $\varepsilon_k \to 0$. Allora esiste una sottosuccessione (u_{k_m}) tale che*

$$u_{k_m} \to \chi_E - \chi_{\Omega\setminus E} \quad in\ L^1_{loc}(\Omega),$$

con E insieme di perimetro minimo dentro Ω.
Inoltre, se $A \Subset \Omega$ è un aperto tale che $\int_{\partial A} |D\chi_E| = 0$, allora

$$\lim_{m\to+\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(u_{k_m}, A) = P(E,A)\int_{-1}^{1}\sqrt{2F(s)}ds.$$

Teorema 3.8 (vedi [10])**.** *Dati $\alpha > -1$, $\beta < 1$, se u minimizza $\mathcal{E}$ dentro B_R e $u(0) \geq \alpha$, allora*

$$\mathcal{L}^n(\{u > \beta\} \cap B_r) \geq Cr^n \quad \forall r \geq R_0(\alpha,\beta),$$

con C costante che dipende solo da n ed F.

Servirà poi conoscere la definizione di sopra- e sotto-soluzione di viscosità:

Definizione 3.9. *Sia $L(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0$ una equazione alle derivate parziali, con $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Una funzione $u \in C^0(\overline{\Omega})$ è una sotto-soluzione (risp. sopra-soluzione) di viscosità di L se vale la seguente condizione:*
dato $x_0 \in \Omega$, per ogni $\phi \in C^2(\Omega)$ tale che $u - \phi$ ha massimo (risp. minimo) in x_0 vale

$$L(x_0, u(x_0), \nabla\phi(x_0), \nabla^2\phi(x_0)) \geq 0 \quad (\textit{risp. } \leq 0).$$

u si dice, poi, soluzione di viscosità se è sia una sopra- che una sotto-soluzione di viscosità.

Sostanzialmente le sopra- e sotto-soluzioni di viscosità sono un tipo di soluzioni deboli per equazioni alle derivate parziali. Nel caso di equazioni ellittiche, per esse valgono molte delle proprietà di cui godono le soluzioni classiche, tra cui il seguente:

Teorema 3.10 (principio del massimo)**.** *Sia $u \in C^0(\overline{\Omega})$, L un operatore differenziale ellittico. Allora*

(i) Se u è una sotto-soluzione di viscosità di L e $u \leq 0$ su $\partial\Omega$, allora $u \leq 0$ dentro Ω.

(ii) Se u è una sopra-soluzione di viscosità di L e $u \geq 0$ su $\partial\Omega$, allora $u \geq 0$ dentro Ω.

3.2.2 La dimostrazione per $n \leq 8$

Possiamo ora dare un'idea della dimostrazione del seguente teorema, dal quale seguiranno, come semplici corollari, il teorema 3.16 e la dimostrazione della congettura di De Giorgi [3].

Teorema 3.11. *Sia u un minimo locale di $\mathcal{E}$ su tutto $\mathbb{R}^n$ con $u(0) = 0$. Si supponga che esistano delle successioni di numeri positivi θ_k e l_k, e una succesione di vettori unitari ξ_k tali che $l_k \to +\infty$, $\frac{\theta_k}{l_k} \to 0$, e*

$$\{u = 0\} \cap (\{|\pi_{\xi_k} x| < l_k\} \times \{|\langle x, \xi_k\rangle| < l_k\}) \subset \{|\langle x, \xi_k\rangle| < \theta_k\},$$

dove $\pi_{\xi_k} x = x - \langle x, \xi_k\rangle\xi_k$. Allora l'insieme di livello $\{u = 0\}$ è un iperpiano.

[3] Per maggiori dettagli si veda [27].

Dimostrazione. (cenno) Per comodità di scrittura, durante tutto il teorema si considereranno i riscalamenti $u_\varepsilon(x) := u(\frac{x}{\varepsilon})$, anziché quelli dati da $u_R(x) := u(Rx)$. Enunciamo innanzitutto due lemmi, il primo dei quali è una sorta di disuguaglianza di Harnack per insiemi di livello di minimi che siano, già per ipotesi, abbastanza piatti, mentre il secondo è una versione apparentemente più forte del primo lemma, anche se, come si vedrà, seguirà proprio da esso.

Lemma 3.12. *Sia u un minimo locale di $\mathcal{E}$ nel cilindro $\{|x'| < l\} \times \{|x_n| < l\}$ e si assuma che*

$$\{u = 0\} \subset \{|x_n| < \theta\}, \quad u(0) = 0.$$

Allora esiste una piccola costante $\eta_0 > 0$, dipendente solo da n e da F, tale che, dato $\theta_0 > 0$, esiste $\varepsilon_0(\theta_0) > 0$, dipendente solo da n, F e θ_0, tale che se

$$\frac{\theta}{l} < \varepsilon_0(\theta_0), \quad \theta_0 < \theta,$$

allora

$$\{u = 0\} \cap \{|x'| < \eta_0 l\} \subset \{|x_n| < (1 - \eta_0)\theta\}.$$

Lemma 3.13. *Sia u un minimo locale di $\mathcal{E}$ nel cilindro $\{|x'| < l\} \times \{|x_n| < l\}$ e si assuma che*

$$\{u = 0\} \subset \{|x_n| < \theta\}, \quad u(0) = 0.$$

Allora esistono due piccole costanti $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$, dipendenti solo da n, tali che, dato $\theta_0 > 0$, esiste $\varepsilon_1(\theta_0) > 0$, dipendente solo da n, F e θ_0, tale che se

$$\frac{\theta}{l} < \varepsilon_1(\theta_0), \quad \theta_0 < \theta,$$

allora

$$\{u = 0\} \cap (\{|\pi_\xi x| < \eta_2 l\} \times \{|\langle x, \xi\rangle| < \eta_2 l\}) \subset (\{|\pi_\xi x| < \eta_2 l\} \times \{|\langle x, \xi\rangle| < \eta_1 \theta\})$$

per un qualche vettore unitario ξ.

Essendo la dimostrazione del teorema alquanto articolata, per chiarezza d'esposizione sarà divisa in tre passi.
Occorre però fare prima una osservazione preliminare:
si definiscano

$$H(s) := \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2F(\zeta)}} d\zeta, \quad g(t) := H^{-1}(t);$$

è un semplice conto verificare che $g''(t) = F'(g(t))$, da cui g è una soluzione unidimensionale dell'equazione

$$\Delta u = F'(u). \tag{3.16}$$

1° passo: la dimostrazione del lemma 3.12.
Essendo la dimostrazione particolarmente lunga e, soprattutto, estremamente complessa, se ne darà solo un'idea a larghe linee.
Innanzitutto si costruisce una famiglia di superfici di rotazione in $\mathbb{R}^{n+1}$, che denoteremo con $S(Y,R)$, con $Y = (y, y_{n+1})$. Prendendo in modo opportuno tali superfici, si ottiene che esse risolvono la (3.16) a meno di un errore di $\frac{C}{R}$, i.e. $|\Delta S(Y,R) - F'(S(Y,R))| \leq \frac{\overline{C}}{R}$, con $\overline{C}$ universale, e si riesce inoltre a dimostrare la seguente:

Proposizione 3.14. *Sia ξ un vettore perpendicolare a e_{n+1} e A un chiuso contenuto in $P_\xi \cap \{|x_{n+1}| \leq \frac{1}{4}\}$, dove P_ξ indica l'iperpiano ortogonale a ξ e passante per l'origine. Si supponga poi che, per ogni $Y \in A$, la superficie $S(Y + t\xi, R)$, con R grande, stia sopra il grafico di u quando $t \to -\infty$ e, per t che cresce, essa tocchi il grafico u da sopra per la prima volta in un punto (punto di contatto). Se B denota la proiezione lungo ξ dei punti di contatto su P_ξ, allora esiste $c > 0$ costante universale tale che $\mathcal{L}^n(A) \leq c\mathcal{L}^n(B)$.*

A questo punto si definiscano i seguenti insiemi:

$$L = P_{e_n} \cap \{|x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}\}, \quad Q_l = \{(x', 0, x_{n+1}) \mid |x'| \leq l,\ |x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}\}.$$

Sia poi $\tilde{D}^k$ l'insieme dei punti sul grafico di u che, per un certo Y, hanno per un certo Y, $S(Y, RC^{-k})$ tangente da sopra, con C costante sufficientemente grande, e siano

$$D_k = L \cap \pi_{e_n}(\tilde{D}^k), \quad E_k = \{X \in L \mid \operatorname{dist}(X, D_k) \leq a\},$$

con a grande. Ciò che si dimostra è che, facendo crescere k, gli insiemi E_k invadono L in misura, i.e. $\mathcal{L}^n(L \setminus E_k) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Infine, si riescono ad ottenere stime sulla misura della proiezione su L dei punti del grafico di u dei quali si ha un controllo sull'$n-$esima coordinata; se si hanno poi anche informazioni sull'esistenza di un superficie $S(Y, R_0)$ tangente da sopra nel punto e sull'angolo formato dal gradiente di u nel punto con il versore e_n, si riescono ad ottenere ulteriori stime.

Si assuma ora, per assurdo, che un punto $x_0 \in \{u = 0\}$, con $|x_0'| < l$, sia vicino all'insieme $\{x_n = -\theta\}$. Allora, si riesce a far vedere che u è vicino, nel cilindro $\{|x'| < \frac{l}{2}\} \times \{|x_n| < \frac{l}{2}\}$, nella direzione e_n a $g(x_n + \theta)$, ossia $u(x) \sim g(x_n + \theta)$. Utilizzando le stime di densità ottenute precedentemente, mettendosi in un cilindro più piccolo $A_l = \{|x'| < \frac{l}{10}\} \times \{|x_n| < \frac{l}{10}\}$ e stimando l'energia $\mathcal{E}(u, A_l)$, si ottiene che essa è troppo grande rispetto a quella che dovrebbe essere. Si ricordi, infatti, che il teorema 3.7 ci permetteva di avere una stima sul limite dell'energia dei funzionali riscalati, stima che, in questo caso, sarebbe contraddetta.

2° passo: il lemma 3.12 implica il lemma 3.13.
Ciò che si vuole sostanzialmente ottenere è che, se $\{u = 0\}$ è contenuto in un cilindro di $\mathbb{R}^n$ con centro nell'origine sufficientemente piatto, esiste un cilindro, sempre con centro nell'origine ma che potrebbe essere ruotato, ancora più schiacciato del precedente. Inoltre, il fattore di riscalamento è dato da due costanti universali entrambe minori di 1.
L'idea di base è trovare una famiglia di sopra-soluzioni di viscosità per la (3.16). Per fare ciò, occorre prendere un opportuno potenziale F_l definito su $[s_l - 1, 1]$, con s_l abbastanza piccolo, ottenuto modificando di poco il potenziale originario F, ottenendo, come prima, una funzione unidimensionale g_l che verifica $g_l'' = F_l'(g_l)$, $g_l(0) = 0$ e che, moralmente, differisce di poco da g. g_l sarà dunque definita su un intervallo massimale della forma $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$, con $l > 0$ grande. Ponendola ora uguale a $s_l - 1$ su $(-\infty, -\frac{l}{2})$, si ottiene una funzione $C^{1,1}$ definita su $(-\infty, \frac{l}{2})$.
Si consideri ora la famiglia di superfici di rotazione in $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Psi(y, l) := \{x_{n+1} = g_l(|x - y| - l)\}.$$

Si può allora dimostrare che, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, $\Psi(y, l)$ è il grafico di una stretta sopra-soluzione di viscosità (i.e. $\Delta\Psi(y, l) < F'(\Psi(y, l))$) ovunque essa è definita eccetto che sulla sfera $\{|x - y| = l\}$.
Successivamente, si costruisce una stretta sopra-soluzione che vale 0 su una superficie $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ con curvatura media positiva. Più precisamente, presa $M \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}$ e definita $\|M\| := \max_{|x|=1} |Mx|$, si consideri

$$\Gamma = \left\{x_n = P(x') = \frac{\varepsilon}{2} x'^T M x' + \sigma\langle \xi, x'\rangle\right\} \cap \left\{|x'| < \frac{\sigma}{\varepsilon}\right\},$$

$$\Delta P = \mathrm{tr}\ M \geq \delta, \quad \|M\| \leq \frac{1}{\delta}, \quad |\xi| \leq \frac{1}{\delta}$$

con $\delta > 0$ piccolo. Allora, esiste $\sigma(\delta) > 0$ tale che, se $\varepsilon \leq \sigma \leq \sigma(\delta)$, modificando appena F in modo da ottenere un potenziale opportuno F_Γ e ottenuta, come al

solito, g_Γ, allora la funzione $g_\Gamma(d_\Gamma)$ è la stretta sopra-soluzione richiesta, dove d_Γ rappresenta la distanza con segno da Γ, con $d_\Gamma > 0$ sopra Γ.
A questo punto si può dimostrare il seguente:

Lemma 3.15. *Sia u un minimo locale di $\mathcal{E}$ in $\{|x'| < l\} \times \{|x_n| < l\}$ e si assuma $u(0) = 0$ e $u < 0$ sotto la superficie*

$$\Gamma_1 = \left\{ x_n = P_1(x') = \frac{\theta}{l^2}\frac{1}{2}x'^T Mx' + \frac{\theta}{l}\langle \xi, x'\rangle \right\},$$

$$\|M\| \leq \frac{1}{\delta}, \quad |\xi| \leq \frac{1}{\delta}$$

con $\delta > 0$ piccolo. Esiste allora $\sigma(\delta) > 0$ piccolo tale che, se

$$\frac{\theta}{l} \leq \sigma(\delta), \quad \theta \geq \delta,$$

allora

$$tr\ M \leq \delta.$$

In un certo senso, ciò che questo lemma afferma è dunque che, se l'insieme di livello $\{u = 0\}$ sta sopra opportuni paraboloidi, allora è il grafico di una sopra-soluzione di viscosità di $\Delta f = \delta$.
DIMOSTRAZIONE. (CENNO)
Se per assurdo fosse tr $M > \delta$, per quanto visto prima, presa la superficie

$$\Gamma_2 = \{x_n = P_2(x') = P_1(x') - \frac{\varepsilon\delta}{2}|x'|^2\} \cap \{|x'| < l\},$$

con $\varepsilon = \frac{\theta}{l^2}$, $\sigma = \frac{\theta}{l}$, se σ è abbastanza piccolo allora $g_{\Gamma_2}(d_{\Gamma_2})$ è una stretta sopra-soluzione.
Si vuole utilizzare ora il teorema 3.8. Sia dunque $\alpha < 0$ tale che F' è crescente in $[-1, \alpha]$ e $\beta = 0$. Esiste allora una costante universale R_0 tale che, se $u(x) \geq \alpha$, allora

$$B_{R_0}(x) \cap \{u = 0\} \neq \emptyset.$$

Allora, se $l \geq 8R_0$,

$$u(x) < \alpha \quad \text{per } x \in B_{\frac{l}{4}}((0, -l/2)).$$

Dal momento che $\Psi((0, -l/2), l/4)$ è una sopra-soluzione della 3.16 in $B_{\frac{l}{4}}((0, -l/2))$ ed è nulla al bordo, per il teorema 3.10 u è sotto $\Psi((0, -l/2), l/4)$ dentro tutta la

palla.
Si faccia scivolare la superficie lungo una direzione ν, con $\langle \nu, e_{n+1}\rangle = 0$, $\langle \nu, e_n\rangle \geq 0$, finché non tocca il grafico di u. Essendo $\Psi((0,-l/2), l/4)$ una sopra-soluzione stretta ovunque eccetto che sull'insieme di livello 0, si trova che i punti di contatto devono trovarsi sull'insieme di livello $\{u = 0\}$. Da questo segue

$$u(x) \leq g_{\frac{l}{4}}(d_{\Gamma_1}) \text{ se } |x'| \leq \frac{l}{2},\ |x_n| \leq \frac{l}{2}. \tag{3.17}$$

Inoltre, da opportune stime, si riesce a ottenere

$$g_{\Gamma_2}(d_{\Gamma_2}) > g_{\frac{l}{4}}(d_{\Gamma_1}) \text{ se } |x'| = \frac{l}{2},\ |d_{\Gamma_1}| \leq \frac{l}{4}. \tag{3.18}$$

Si prenda allora $g_{\Gamma_2}(d_{\Gamma_2})$ e la si trasli dal basso verso l'alto, lungo la direzione e_n, nel cilindro $\{|x'| \leq \frac{l}{2}\} \times \{|x_n \leq \frac{l}{2}|\}$, finchè non tocca u. Per la (3.17) e la (3.18) il punto di contatto non può trovarsi su $\{|x'| = \frac{l}{2}\}$ e quindi deve essere un punto interno, il che è in contrasto col fatto che $g_{\Gamma_2}(d_{\Gamma_2})$ è una stretta sopra-soluzione e col teorema 3.10. $\square$

Siamo finalmente pronti a far vedere come dal lemma 3.12 segua il lemma 3.13.
Si assuma per assurdo che esistano u_k, θ_k, l_k tali che u_k è un minimo locale di $\mathcal{E}$, $u_k(0) = 0$, l'insieme di livello $\{u_k = 0\}$ è contenuto nel cilindro

$$\{|x'| < l_k\} \times \{|x_n| < \theta_k\},$$

$\theta_k \geq \theta_0$, $\frac{\theta_k}{l_k} \to 0$ per $k \to +\infty$ e, comunque si prenda ξ_k vettore unitario,

$$\{u_k = 0\} \cap (\{|\pi_{\xi_k} x| < \eta_2 l_k\} \times \{|\langle x, \xi_k\rangle| < \eta_2 l_k\}) \not\subset$$
$$\not\subset (\{|\pi_{\xi_k} x| < \eta_2 l_k\} \times \{|\langle x, \xi_k\rangle| < \eta_1 \theta_k\}).$$

Sia allora A_k il riscalamento dell'insieme di livello $\{u_k = 0\}$ dato da

$$(x', x_n) \in \{u_k = 0\} \mapsto (y', y_n) \in A_k, \quad y' = \frac{x'}{l_k}, \quad y_n = \frac{x_n}{l_k}.$$

A_k è, ossia, il sottoinsieme ottenuto da $\{u_k = 0\}$ mandando il cilindro

$$\{|x'| < l_k\} \times \{|x_n| < \theta_k\}$$

nel cilindro

$$\{|y'| < 1\} \times \{|y_n| < 1\}.$$

Claim 1: A_k ha una sottosuccessione convergente uniformemente, per $|y'| \leq \frac{1}{2}$, a un insieme $A_\infty = \{(y', w(y'))\}$, dove w è una funzione Holderiana.

Per dimostrare ciò, si fissi y'_0, con $|y'_0| \leq \frac{1}{2}$, e si supponga $(y'_0, y_k) \in A_k$. Applicando ripetutamente il lemma 3.12 alla funzione u_k nel cilindro

$$\{|x' - l_k y'_0| < \frac{l_k}{2}\} \times \{|x_n - \theta_k y_k| < 2\theta_k\},$$

nel quale l'insieme $\{u_k = 0\}$ è intrappolato, si ottiene che esistono una costante universale $\eta_0 > 0$ e una funzione crescente $\varepsilon_0(\theta) > 0$, con $\varepsilon_0(\theta) \to 0$ per $\theta \to 0$, tali che $\{u_k = 0\}$ è intrappolato nel cilindro

$$\{|x' - l_k y'_0| < \frac{l_k}{2}\eta_0^m\} \times \{|x_n - \theta_k y_k| < 2(1-\eta_0)^m \theta_k\}$$

se $4(\theta_k/l_k) \leq [\eta_0/(1-\eta_0)]^m \varepsilon_0(2(1-\eta_0)^m\theta_k)$, da cui riscalando

$$A_k \cap \{|y' - y'_0| < \frac{1}{2}\eta_0^m\} \subset \{|y_n - y_k| < 2(1-\eta_0)^m\}.$$

A questo punto non è difficile far vedere che, fissato m_0, gli insiemi A_k, per k abbastanza grande, sono compresi tra i grafici di due successioni di fuzioni (a_k) e (b_k) aventi modulo di continuità equilimitato e tali che $\|a_k - b_k\|_\infty \leq C(1-\eta_0)^{m_0}$. La tesi segue, allora, dal teorema di Ascoli-Arzelà con un procedimento diagonale.

Claim 2: w è armonica nel senso delle viscosità.

La dimostrazione è per assurdo. Si fissi un polinomio quadratico

$$y_n = P(y') = \frac{1}{2} y'^T M y' + \langle \xi, y' \rangle, \quad \|M\| < \frac{1}{\delta}, \quad |\xi| < \frac{1}{\delta},$$

tale che $\Delta P = \mathrm{tr}\ M > \delta$, $P(y') + \delta|y'|^2$ tocca il grafico di w in un punto che possiamo supporre essere 0, e che stia sotto il grafico per $|y'| < 2\delta$. Allora, per k grande, si trovano dei punti (y'_k, y_{k_n}) vicini a 0 tali che $P(y') + C_k$, con C_k costante opportuna, tocca A_k da sotto nel punto (y'_k, y_{k_n}) e rimane sotto per $|y' - y'_k| < \delta$. Questo implica, eventualmente dopo aver effettuato una traslazione, che esiste una superficie

$$\left\{ x_n = \frac{\delta^2 \theta_k}{(\delta l_k)^2} \frac{1}{2} x'^T M x' + \frac{\delta^2 \theta_k}{\delta l_k} \langle \frac{\xi_k}{\delta}, x' \rangle \right\},$$

con $|\xi_k| < \frac{2}{\delta}$, che tocca $\{u_k = 0\}$ nell'origine e gli sta sotto nel cilindro $|x'| < \delta l_k$.
Tutto ciò però contraddice il lemma 3.15 dal momento che $\theta_k \geq \theta_0$, $\frac{\theta_k}{l_k} \to 0$ e $\Delta P > \delta$.
Dunque w verifica, nel senso delle viscosità, $\Delta w \leq 0$. Scambiando $u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ con $u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$, che è ancora un minimo locale di $\mathcal{E}$, si può vedere abbastanza facilmente che segue anche l'altra disuguaglianza.

Si può dimostrare che essere armonica nel senso delle viscosità è equivalente a essere armonica in senso classico. Esistono allora $0 < \eta_1 < \eta_2$ piccoli, dipendenti solo da n, tali che $|w - \langle \xi, y' \rangle| < \frac{\eta_1}{2}$ per $|y'| < 2\eta_2$.
Riscalando all'indietro e usando il fatto che A_k converge uniformemente al grafico di w, si può concludere che, per k sufficientemente grande,

$$\{u_k = 0\} \cap \{|x'| < \frac{3}{2}\eta_2 l_k\} \subset \{|x_n - \frac{\theta_k}{l_k}\langle x, \xi_k \rangle| < \frac{3}{4}\eta_1 \theta_k\} \subset \{|x_n| < \frac{3}{2}\eta_1 \theta_k\},$$

il che contraddice l'ipotesi iniziale.

3° passo: dal lemma 3.13 segue la tesi.
Si fissi $\theta_0 > 0$ e si scelga k abbastanza grande in modo che $\frac{\theta_k}{l_k} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1(\theta_0)$.
Se $\theta_k \geq \theta_0$, si può applicare il lemma 3.13 per ottenere che l'insieme di livello $\{u = 0\}$ è intrappolato in un cilindro più schiacciato. Applicando ripetutamente il lemma 3.13, finché l'altezza del cilindro non diventa minore di θ_0, si ottiene, in un opportuno sistema di coordinate,

$$\{u = 0\} \cap (\{|y'| < l'_k\} \times \{|y_n| < l'_k\}) \subset \{|y_n| < \theta'_k\},$$

con $\eta_1 \theta_0 \leq \theta'_k \leq \theta_0$ e $\frac{\theta'_k}{l'_k} \leq \frac{\theta_k}{l_k} \leq \varepsilon$, da cui $l'_k \geq \frac{\eta_1 \theta_0}{\varepsilon}$.
Mandando ε a 0, si ottiene che $\{u = 0\}$ è contenuto in una striscia infinita di altezza θ_0. La tesi segue allora dall'arbitrarietà di ε.
Se, invece, risultava $\theta_k < \theta_0$ per ogni k tale che $\frac{\theta_k}{l_k} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1(\theta_0)$, prendendo una sottosuccessione (ξ_{k_j}) convergente a un certo vettore unitario ξ, si ottiene

$$\{u = 0\} \cap (\{|\pi_{\xi_{k_j}} x| < l_{k_j}\} \times \{|\langle x, \xi_{k_j} \rangle| < l_{k_j}\}) \subset \{|\langle x, \xi_{k_j} \rangle| \leq \theta_0\}$$

definitivamente. Facendo tendere j a $+\infty$, si ottiene come prima che $\{u = 0\}$ è contenuto in una striscia infinita di altezza θ_0, da cui la tesi. $\square$

Come conseguenza del teorema 3.11 seguono i due seguenti teoremi:

Teorema 3.16. *Sia u un minimo locale di $\mathcal{E}$ su tutto $\mathbb{R}^n$, con $n \leq 7$ e $u(0) = 0$. Allora gli insiemi di livello di u sono iperpiani.*

Dimostrazione.
Ovviamente è sufficiente dimostrare la tesi per l'insieme di livello $\{u = 0\}$.
Come notato sopra, le funzioni riscalate $u_R(x) := u(Rx)$ sono minimi locali per i funzionali $\mathcal{E}_R$ dentro $\mathbb{R}^n$. Allora, per il teorema 3.7, esiste una sottosuccessione $R_k \to +\infty$ tale che

$$u_{R_k} \to \chi_E - \chi_{\Omega \setminus E} \text{ in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

con E insieme di perimetro minimo. Da questo, grazie al teorema 3.8, segue la convergenza uniforme dentro ogni compatto degli insiemi $\{u_{R_k} = 0\}$ a ∂E, ossia la tesi del teorema 1.8.
Si fissi, infatti, un compatto e si supponga, per assurdo, che non ci sia convergenza uniforme; esisterebbe allora una successione (x_k) di punti, con $x_k \in \{u_{R_k} = 0\}$, tali che $(x_k) \subset B_\delta(y)$ e, possiamo supporre, $B_{2\delta}(y) \subset E$. Allora, dal teorema 3.8, per k abbastanza grande si ha

$$\mathcal{L}^n(\{u_{R_k} < 0\} \cap B_{2\delta}(y)) \geq C\mathcal{L}^n(B_{2\delta}(y)),$$

da cui, per la convergenza in L^1_{loc},

$$1 \leq \fint_{\{u_{R_k}<0\} \cap B_{2\delta}(y)} |1 - u_{R_k}| \leq \frac{1}{C} \fint_{B_{2\delta}(y)} |1 - u_{R_k}| \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

il che è assurdo.
Essendo $n \leq 7$ e $0 \in \partial E$, per il teorema 2.6 ∂E è un iperpiano passante per l'origine che, a meno di un cambiamento di coordinate, possiamo supporre sia $\{x_n = 0\}$. Tutto ciò implica

$$\{u_{R_k} = 0\} \cap B_1 \subset \{|x_n| \leq \delta_k\},$$

con $\delta_k \to 0$. Riscalando, si ottiene

$$\{u = 0\} \cap B_{R_k} \subset \{|x_n| \leq \delta_k R_k\}.$$

Dal teorema 3.11 segue dunque la tesi. □

Teorema 3.17. *Sia u una soluzione su tutto $\mathbb{R}^n$ di*

$$\Delta u = F'(u)$$

tale che $|u| \leq 1$, $\partial_{x_n} u > 0$, $\lim_{x_n \to \pm\infty} u(x', x_n) = \pm 1$. Allora:

(i) *Se $n \leq 8$, gli insiemi di livello di u sono iperpiani.*

(ii) *Se l'insieme di livello $\{u = 0\}$ ha crescita al più lineare all'infinito, allora gli insiemi di livello di u sono iperpiani per ogni n.*

Dimostrazione.
Già sappiamo, per il lemma 3.4, che u è un minimo locale per $\mathcal{E}$ dentro $\mathbb{R}^n$. Si supponga $u(0) = 0$ e si definisca $u_R(x) := u(Rx)$. Come nel teorema 3.16, esiste una sottosuccessione $R_k \to +\infty$ tale che

$$u_{R_k} \to \chi_E - \chi_{\mathbb{R}^n \setminus E} \ \text{ in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

con E insieme di perimetro minimo. Dall'ipotesi di monotonia 3.2 segue allora che $\mathbb{R}^n \setminus E$ è un sottografico di una quasi-soluzione. Inoltre, nel caso *(ii)*, ∂E sarà, in particolare, il grafico di una soluzione. Dal lemma 2.7 e dal teorema 2.8 segue, in entrambi i casi, che ∂E è un iperpiano passante per l'origine. Ragionando come nel teorema 3.16 si ottiene la tesi. $\square$

Appendice A

Modica-Mortola e convergenza dei minimi locali

Per mostrare meglio il collegamento tra il teorema di Bernstein e la congettura di De Giorgi, dimostreremo il teorema di Modica-Mortola nella versione che ci interessa e il teorema 3.7 (vedi [21], [22], [23]).
Richiamiamo prima di tutto la definizione delle energie

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u, \Omega) = \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} F(u) \right) dx, \quad |u| \leq 1,$$

con $F \in C^2[-1, 1]$, $F(-1) = F(1) = 0$, $F > 0$ su $(-1, 1)$.

Teorema A.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo Lipschitziano.*

(i) Se u_k è una successione in $L^1(\Omega)$, con $|u_k| \leq 1$, convergente a u_0 per $k \to +\infty$, tale che

$$\liminf_{k \to +\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, \Omega) < +\infty \tag{A.1}$$

per una successione $\varepsilon_k \to 0$, allora

$$u_0 = \chi_E - \chi_{\Omega \setminus E}$$

per un qualche insieme E misurabile e

$$P(E, \Omega) \int_{-1}^{1} \sqrt{2F(s)} ds \leq \liminf_{k \to +\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, \Omega).$$

(ii) Se $E \subset \Omega$ è un insieme misurabile, allora esiste una successione $(u_k) \subset L^1(\Omega)$, con $|u_k| \leq 1$, tale che

$$u_k \to \chi_E - \chi_{\Omega\setminus E} \quad \textit{in } L^1(\Omega),$$

$$P(E,\Omega)\int_{-1}^{1}\sqrt{2F(s)}ds = \lim_{k\to+\infty}\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k,\Omega).$$

Dimostrazione.
(i) Per la (A.1), esiste una sottosuccessione (u_{k_m}) tale che $\lim_{m\to+\infty}\int_\Omega F(u_{k_m})dx = 0$, da cui $F(u_0)=0$ quasi ovunque. Ciò implica

$$u_0 = \chi_E - \chi_{\Omega\setminus E}$$

con $E=\{u_0=1\}$. Per la formula di coarea per funzioni BV (teorema B.5), presa $H(t)=\int_0^t\sqrt{2F(s)}ds$, si ha

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k,\Omega) = \int_\Omega\left(\frac{\varepsilon_k}{2}|\nabla u_k|^2 + \frac{1}{\varepsilon_k}F(u_k)\right)dx \geq \int_\Omega\sqrt{2F(u_k)}|\nabla u_k|dx =$$

$$= \int_\Omega|\nabla H(u_k)|dx = \int_{H(-1)}^{H(1)}P(\{H(u_k)>y\},\Omega)dy = \int_{-1}^{1}\sqrt{2F(s)}P(\{u_k>s\},\Omega)ds.$$

Si fissi $\delta>0$ piccolo. Allora, ricordando che $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, se $\delta-1\leq s\leq 1-\delta$,

$$\mathcal{L}^n(\{u_k>s\}\triangle E) \leq \frac{1}{\delta}\int_\Omega|u_k-u_0|dx,$$

da cui $\chi_{\{u_k>s\}}\to\chi_E$ in $L^1(\Omega)$ per $k\to+\infty$. Dalla stima precedente, dalla semicontinuità del perimetro e dal lemma di Fatou si ottiene

$$\liminf_{k\to+\infty}\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k,\Omega) \geq \liminf_{k\to+\infty}\int_{-1}^{1}\sqrt{2F(s)}P(\{u_k>s\},\Omega)ds \geq$$

$$\geq \int_{-1}^{1}\sqrt{2F(s)}\liminf_{k\to+\infty}P(\{u_k>s\},\Omega)ds \geq P(E,\Omega)\int_{\delta-1}^{1-\delta}\sqrt{2F(s)}ds.$$

Dall'arbitrarietà di δ segue il punto *(i)*.
(ii) Se $P(E,\Omega)=+\infty$, la tesi segue dal punto *(i)*; possiamo dunque supporre $P(E,\Omega)<+\infty$.

Si fissi $\delta > 0$, si definisca $c_\delta := \max\{F(s) \mid s \in [-1, \delta-1] \cup [1-\delta, 1]\}$, e si consideri la funzione $F_\delta : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$F_\delta(s) := \begin{cases} 0 & \text{se } s = -1 \\ c_\delta & \text{se } -1 \le s \le \delta - 1 \\ F(s) & \text{se } \delta - 1 \le s \le 1 - \delta \\ c_\delta & \text{se } 1 - \delta \le s \le 1 \\ 0 & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

Sia poi $H_\delta : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$H_\delta(s) := \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2F(t)}} dt,$$

e $g_\delta : \mathbb{R} \to [-1,1]$,

$$g_\delta(s) := \begin{cases} -1 & \text{se } s < H_\delta(-1) \\ H_\delta^{-1}(s) & \text{se } H_\delta(-1) \le s \le H_\delta(1) \\ 1 & \text{se } H_\delta(1) < s. \end{cases} \tag{A.2}$$

Si noti che g_δ è Lipschitziana e $\frac{1}{2}(g'_\delta(t))^2 = F_\delta(g_\delta(t))$.
Non è difficile dimostrare che E, essendo un insieme di perimetro finito, può essere approssimato da una successione (E_j) di insiemi con bordo C^∞ tali che

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_j \cap \Omega) = P(E_j, \Omega) \to P(E, \Omega)$$

per $j \to +\infty$. L'idea è, infatti, quella di considerare innanzitutto la successione di funzioni (f_η) ottenuta mollificando χ_E, i.e. $f_\eta = \rho_\eta * \chi_E$, con $\rho_\eta(x) := \eta^{-n}\rho(\frac{x}{\eta})$ e $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ tale che $\operatorname{spt}(\rho) \subset B_1$ e $\int \rho = 1$. A questo punto, gli insiemi approssimanti saranno dati da una opportuna succesione estratta da

$$E_{\eta,t} = \{x \mid f_\eta(x) > t\};$$

infatti, per il teorema di Sard, fissato η, $\partial E_{\eta,t}$ è regolare per quasi ogni t.
Si definisca ora $u_{\varepsilon,j} = g_\delta(d_{\partial E_j}/\varepsilon)$, dove $d_{\partial E_j}$ rappresenta la distanza con segno da ∂E_j, con $d_{\partial E_j} > 0$ su E_j. Dal momento che

$$\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u_{\varepsilon,j}|^2 = \frac{1}{\varepsilon}F(u_{\varepsilon,j}),$$

si ha

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u_{\varepsilon,j}, \Omega) = \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u_{\varepsilon,j}|^2 + \frac{1}{\varepsilon}F(u_{\varepsilon,j}) \right) dx \le \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u_{\varepsilon,j}|^2 + \frac{1}{\varepsilon}F_\delta(u_{\varepsilon,j}) \right) dx \le$$

$$\leq \int_\Omega \sqrt{2F_\delta(u_{\varepsilon,j})}|\nabla u_{\varepsilon,j}|dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{2F_\delta(s)}P(\{u_{\varepsilon,j} > s\}, \Omega)ds \leq$$

$$\leq (\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_j \cap \Omega) + O(\varepsilon)) \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2F(s)} + O(\delta)\right) ds.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ e per $j \to +\infty$ si ottiene

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u_{\varepsilon,j}, \Omega) \leq P(E, \Omega) \int_{-1}^{1} \sqrt{2F(s)}ds + O(\delta).$$

Mandando δ a 0 e ricordando che, per il punto *(i)*,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u_{\varepsilon,j}, \Omega) \geq P(E, \Omega) \int_{-1}^{1} \sqrt{2F(s)}ds,$$

segue la tesi. □

Vogliamo ora dimostrare un risultato simile di convergenza di minimi locali, nel senso della seguente definizione.

Definizione A.2. *Diciamo che una funzione $u \in L^1(\Omega)$ è un minimo locale del funzionale $\mathcal{E}_\varepsilon(\cdot, \Omega)$ se, per ogni aperto $A \Subset \Omega$ e ogni funzione $v \in L^1(\Omega)$ tale che spt$(v) \subset A$, si ha*

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u, \Omega) \leq \mathcal{E}_\varepsilon(u + v, \Omega).$$

Come si può vedere, $u \equiv \pm 1$ sono gli unici due minimi assoluti di $\mathcal{E}_\varepsilon$ per ogni ε, ma, non essendo interessanti, si supporrà sempre che i minimi locali siano non banali e, dunque, per il principio del massimo (teorema B.6), sempre strettamente compresi tra -1 e 1.
Abbiamo ora bisogno di due lemmi che si useranno nella dimostrazione del teorema 3.7.

Lemma A.3. *Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^n$ e $C \Subset A \cup B$ aperto. Siano poi $\varepsilon_k \to 0$ e (u_k) e (v_k) due successioni, rispettivamente in $L^1(A, [-1, 1])$ e in $L^1(B, [-1, 1])$, tali che*

$$u_k - v_k \to 0 \quad \text{in } L^1(A \cap B).$$

Allora esiste una successione $(w_k) \subset L^1(C, [-1, 1])$ tale che:

(i)

$$w_k(x) = \begin{cases} u_k(x) & \text{se } x \in C \setminus B \\ v_k(x) & \text{se } x \in C \setminus A \end{cases}$$

(ii)
$$\limsup_{k\to+\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(w_k, C) \le \limsup_{k\to+\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, A) + \limsup_{k\to+\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(v_k, B).$$

DIMOSTRAZIONE.
Senza perdita di generalità possiamo assumere che esista una costante $\tilde{C} > 0$ tale che
$$\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, A) + \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(v_k, B) \le \tilde{C} \quad \forall k.$$
Essendo $C \Subset A \cup B$, $C \setminus B$ sarà relativamente compatto dentro A. Possiamo allora trovare un aperto $D \Subset A$ con bordo regolare tale che
$$\overline{C} \setminus B \subset D \subset \overline{D} \subset A.$$

Per ogni ε_k si considerino dunque gli insiemi
$$D_{i,k} := \{x \mid i\varepsilon_k \le d_{\partial D}(x) \le (i+1)\varepsilon_k\} \text{ per } 0 \le i \le \frac{c}{\varepsilon_k},$$
dove $d_{\partial D}$ rappresenta la distanza con segno da ∂D, con $d_{\partial D} < 0$ su D, e la costante c è scelta sufficientemente piccola in modo che $c < \operatorname{dist}(\partial A, D)$ e $d_{\partial D}$ sia regolare in un intorno di ampiezza c di ∂D. Si fissi $\delta > 0$ piccolo. Essendo $D_{i,k} \cap C \subset A \cap B$,
$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{c}{\varepsilon_k}\right]} \left[\varepsilon_k(\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, D_{i,k}) + \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(v_k, D_{i,k})) + \int_{D_{i,k}\cap C} |u_k - v_k| dx\right] \le$$
$$\le \varepsilon_k(\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, A) + \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(v_k, B)) + \int_{A\cap B} |u_k - v_k| dx \le \varepsilon_k \tilde{C} + \int_{A\cap B} |u_k - v_k| dx \le \frac{c}{2}\delta$$
per tutti i k abbastanza grandi, da cui esiste un indice i_0 tale che
$$\varepsilon_k(\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, D_{i_0,k}) + \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(v_k, D_{i_0,k})) + \int_{D_{i_0,k}\cap C} |u_k - v_k| dx \le \delta\varepsilon_k. \tag{A.3}$$

Si definisca
$$w_k = \eta_k u_k + (1 - \eta_k) v_k,$$
dove $\eta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $0 \le \eta_k \le 1$, $|\nabla \eta_k| \le \frac{2}{\varepsilon_k}$, $\operatorname{spt}(\nabla \eta_k) \subset D_{i_0,k}$ e
$$\eta_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C \setminus B \\ 0 & \text{se } x \in C \setminus A. \end{cases}$$

Si ha, allora,

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(w_k, C) \leq \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, A) + \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(v_k, B) + \int_{D_{i_0,k}\cap C} \left(\frac{\varepsilon_k}{2}|\nabla w_k|^2 + \frac{1}{\varepsilon_k}F(w_k) \right) dx. \quad \text{(A.4)}$$

Non è difficile vedere che si può trovare una costante abbastanza grande a, che dipende solo da F, tale che

$$F(w_k) = F(\eta_k u_k + (1-\eta_k)v_k) \leq F(u_k) + a|u_k - v_k|.$$

Inoltre, essendo u_k e v_k a valori in $[-1, 1]$,

$$|\nabla w_k|^2 \leq 2|\eta_k \nabla u_k + (1-\eta_k)\nabla v_k|^2 + 2|(u_k - v_k)\nabla \eta_k|^2 \leq 2|\nabla u_k|^2 + 2|\nabla v_k|^2 + \frac{8}{\varepsilon_k^2}|u_k - v_k|.$$

Mettendo insieme la (A.3), la (A.4) e queste ultime due stime si ottiene

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(w_k, C) \leq \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, A) + \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(v_k, B) + 2a\delta,$$

da cui la tesi. □

Lemma A.4. *Si assuma che (u_k) sia una successione di minimi locali per $\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(\cdot, \Omega)$ e sia $A \Subset \Omega$ un aperto. Allora esiste una costante $C(A)$, che dipende solo da A e da F, tale che*

$$\limsup_{k\to+\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, A) \leq C(A).$$

Dimostrazione.
Sia D un aperto limitato, con bordo regolare, tale che $\overline{A} \subset D \subset \overline{D} \subset \Omega$.
Si definisca $v_k := g_{\frac{1}{2}}(d_{\partial D}/\varepsilon_k)$, dove $g_{\frac{1}{2}}$ è la funzione g_δ, definita nella (A.2), con $\delta = \frac{1}{2}$ e $d_{\partial D}$ è la distanza con segno da ∂D, con $d_{\partial D} < 0$ su D. Allora, essendo $u_k - v_k \equiv 0$ su $\partial(\{u_k > v_k\})$ e $v_k \equiv -1$ su A per k abbastanza grande, poichè $u_k > -1$ dentro Ω si ottiene

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, A) \leq \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, \{u_k > v_k\}) \leq \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(v_k, \{u_k > v_k\}) \leq \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(v_k, \Omega)$$

da cui, ragionando come nella stima di $\mathcal{E}_\varepsilon(u_{\varepsilon,j}, \Omega)$ nella dimostrazione del punto *(ii)* del teorema A.1, segue

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_k}(v_k, \Omega) \leq (\mathcal{H}^{n-1}(\partial D) + O(\varepsilon_k)) \int_{-1}^{1} \sqrt{2F_{\frac{1}{2}}(s)}ds,$$

e dunque
$$\limsup_{k\to+\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, A) \le \mathcal{H}^{n-1}(\partial D) \int_{-1}^{1} \sqrt{2F_{\frac{1}{2}}(s)}ds.$$
$\square$

Dimostrazione del teorema 3.7.
Sia A un aperto relativamente compatto dentro Ω. Dal lemma A.4 segue
$$\limsup_{k\to+\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, A) \le C(A).$$
Si definisca $H(t) = \int_0^t \sqrt{2F(s)}ds$. Poiché
$$\int_A |\nabla H(u_k)|dx = \int_A \sqrt{2F(u_k)}|\nabla u_k|dx \le$$
$$\le \int_A \left(\frac{\varepsilon_k}{2}|\nabla u_k|^2 + \frac{1}{\varepsilon_k}F(u_k)\right) dx = \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_k, A) \le C(A)$$
ed essendo $(H(u_k)) \subset L^\infty(A)$, essa è una succesione limitata in $BV(A)$. Per l'immersione compatta di BV in L^1 si può dunque estrarre, con un procedimenteo diagonale, una sottosuccesione $H(u_{k_m})$ convergente in $L^1_{loc}(\Omega)$ e, si può supporre, convergente anche quasi ovunque. Dal momento che H^{-1} è una funzione continua definita su un intervallo limitato a valori in $[-1, 1]$, per convergenza dominata si ottiene che u_{k_m} converge in $L^1_{loc}(\Omega)$.
Come nella parte *(i)* del teorema A.1, si ottiene un insieme misurabile $E \subset \Omega$ tale che
$$u_{k_m} \to \chi_E - \chi_{\Omega\setminus E} \text{ in } L^1_{loc}(\Omega).$$
Vogliamo dimostrare che E è un insieme di perimetro minimo dentro Ω.
Siano dunque B e C due aperti tali che C ha bordo regolare e
$$B \subset \overline{B} \subset C \subset \overline{C} \subset A.$$
Sia F un insieme misurabile in A che coincide con E fuori da B. Per il teorema A.1 esiste una successione $(v_{k_m}) \subset L^1(C)$, convergente a $\chi_F - \chi_{C\setminus F}$, tale che
$$\lim_{m\to+\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(v_{k_m}, C) = P(F, C) \int_{-1}^{1} \sqrt{2F(s)}ds.$$

Dal lemma A.3, presi $A = A \setminus B$, $B = C$ e $C = A$, possiamo costruire una successione (w_{k_m}), con

$$w_{k_m}(x) = \begin{cases} u_{k_m}(x) & \text{se } x \in A \setminus C \\ v_{k_m}(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$

e tale che, fissato $\delta > 0$,

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(w_{k_m}, A) \leq \mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(u_{k_m}, A \setminus B) + \mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(v_{k_m}, C) + \delta$$

per tutte le m sufficientemente grandi. Dal momento che u_{k_m} è un minimo locale,

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(u_{k_m}, A) \leq \mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(w_{k_m}, A),$$

da cui

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(u_{k_m}, B) \leq \mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(v_{k_m}, C) + \delta,$$

e quindi

$$\limsup_{m \to +\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(u_{k_m}, B) \leq P(F, C) \int_{-1}^{1} \sqrt{2F(s)}ds.$$

Essendo C un insieme arbitrario con bordo regolare contenente B, possiamo concludere che

$$\limsup_{m \to +\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(u_{k_m}, B) \leq \int_{\overline{B}} |D\chi_F| \int_{-1}^{1} \sqrt{2F(s)}ds. \tag{A.5}$$

Per il punto *(i)* del teorema A.1 si ottiene

$$\int_B |D\chi_E| \leq \int_{\overline{B}} |D\chi_F|$$

per ogni insieme B per cui E e F coincidono al di fuori di esso. Ciò implica

$$\int_A |D\chi_E| \leq \int_A |D\chi_F|,$$

da cui E è un insieme di perimetro minimo dentro Ω.
Prendendo, infine, $F = E$ nella (A.5) e supponendo $\int_{\partial B} |D\chi_E| = 0$, si conclude che

$$\lim_{m \to +\infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_{k_m}}(u_{k_m}, B) = P(E, B) \int_{-1}^{1} \sqrt{2F(s)}ds.$$

Il teorema 3.7 è così dimostrato. $\square$

Appendice B

Richiami

Sono qui riportati i teoremi richiamati in precedenza:

Teorema B.1 (disuguaglianza di Harnack (versione 1))**.** *Sia $u \geq 0$ una soluzione, dentro Ω, dell'equazione ellittica*

$$a_{ij}\partial_{x_i x_j} u + b_i \partial_{x_i} u + cu = 0,$$

e sia $V \Subset \Omega$ connesso. Allora esiste una costante C, che dipende solo da V e dai coefficienti dell'equazione, tale che

$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

DIMOSTRAZIONE.
Daremo, per semplicità, una dimostrazione della disuguaglianza di Harnack nel caso particolare in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ è una soluzione dell'equazione ellittica in forma di divergenza

$$Lu = \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j} u) + b_i \partial_{x_i} u = 0,$$

con $a_{ij}, b_i \in C^0(\overline{\Omega})$ limitati.
Notiamo innanzitutto che possiamo supporre $u > 0$, a meno di considerare $u + \varepsilon$ in luogo di u e poi mandare ε a 0 (si noti infatti che, non essendoci termini lineari in u ma solo nelle sue derivate, $L(u + \varepsilon) = 0$). Sia $\eta \in C_0^1(\Omega)$. Allora

$$\partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j} u) + b_i \partial_{x_i} u = 0 \Rightarrow \int_\Omega \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j} u)\frac{\eta^2}{u} + \int_\Omega b_i \partial_{x_i} u \frac{\eta^2}{u} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Omega a_{ij}\partial_{x_j}u\partial_{x_i}\left(\frac{\eta^2}{u}\right) - \int_\Omega b_i\partial_{x_i}u\frac{\eta^2}{u} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Omega a_{ij}\partial_{x_j}u\partial_{x_i}u\frac{\eta^2}{u^2} = \int_\Omega 2\frac{\eta}{u}a_{ij}\partial_{x_j}u\partial_{x_i}\eta - \int_\Omega b_i\partial_{x_i}u\frac{\eta^2}{u}.$$

Sia dunque ν la costante di uniforme ellitticità. Ricordando che $a_{ij}, b_i \in L^\infty$ e che, presi $a, b \geq 0$, $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2$, si ottiene

$$\int_\Omega \nu|\nabla u|^2\frac{\eta^2}{u^2} \leq \int_\Omega \left(\varepsilon|\nabla u|^2\frac{\eta^2}{u^2} + \frac{1}{\varepsilon}C_a|\nabla\eta|^2\right) + \int_\Omega \left(\varepsilon|\nabla u|^2\frac{\eta^2}{u^2} + \frac{1}{4\varepsilon}C_b|\eta|^2\right),$$

con C_a e C_b costanti che dipendono da a_{ij} e da b_i rispettivamente.
Prendendo ora $\varepsilon = \frac{\nu}{4}$ si giunge a

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\frac{\eta^2}{u^2} \leq C\int_\Omega \left(|\nabla\eta|^2 + |\eta|^2\right),$$

con $C = C(L)$. Fissata allora una palla $B_R(x)$ tale che $B_{2R}(x) \subset \Omega$, prendendo η tale che $\eta \equiv 1$ in $B_R(x)$, $\eta \equiv 0$ in $\Omega \setminus B_{2R}(x)$, si ottiene la stima

$$\int_{B_R} |\nabla(\log u)|^2 \leq C\int_{B_{2R}} \left(|\nabla\eta|^2 + |\eta|^2\right) \leq \tilde{C}(R, L),$$

con $\tilde{C}(R, L)$ indipendente da u.
Sia dunque $w = \log u$. Richiamiamo ora una versione debole del principio del massimo:

Teorema B.2 (principio del massimo, versione debole)**.** *Sia $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ soluzione dell'equazione ellittica in forma di divergenza*

$$Lu = \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j}u) + b_i\partial_{x_i}u = 0,$$

con $a_{ij}, b_i \in C^0(\overline{\Omega})$. Allora

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Supponiamo, senza perdita di generalità, che $0 \in \Omega$ e che $B_{2R} \subset \Omega$ per un certo R. Il teorema ci dice allora che, detta

$$\omega(r) := \mathrm{osc}_{\partial B_r} w,$$

si ha
$$\omega(r)=\mathrm{osc}_{\overline{B}_r} w$$
e, in particolare, $\omega(r)$ è una funzione non decrescente di r.
Da questo segue che, preso $0<r<R$,
$$\omega(r)\leq\frac{1}{R-r}\int_r^R\omega(\rho)d\rho.$$
Usando il fatto che, presi due punti $x_1=\rho e^{i\theta_1}$ e $x_2=\rho e^{i\theta_2}$,
$$w(x_1)-w(x_2)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\partial_\theta w(\rho,\theta)d\theta,$$
e che vale
$$|\nabla w|^2(\rho,\theta)=|\partial_\rho w|^2(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho^2}|\partial_\theta w|^2(\rho,\theta)\Rightarrow\rho|\nabla w|(\rho,\theta)\geq|\partial_\theta w|(\rho,\theta),$$
abbiamo
$$\omega(r)\leq\frac{1}{R-r}\int_r^R\int_0^{2\pi}|\partial_\theta w(\rho,\theta)|d\theta d\rho\leq\frac{1}{R-r}\int_r^R\int_0^{2\pi}|\nabla w(\rho,\theta)|\rho d\theta d\rho\leq$$
$$\leq\frac{1}{R-r}\int_{B_R}|\nabla w|\leq\frac{\sqrt{\pi}R}{R-r}\left[\int_{B_R}|\nabla w|^2\right]^{\frac{1}{2}}\leq\frac{\sqrt{\pi}R}{R-r}\tilde{C}(R,L)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{R-r}\overline{C}(R,L).$$
Prendendo $r=\frac{R}{2}$, si ottiene che, per ogni $x,y\in B_{\frac{R}{2}}$,
$$|\log u(x)-\log u(y)|\leq C(R,L)\Rightarrow\left|\frac{u(x)}{u(y)}\right|\leq e^{C(R,L)}.$$
Si noti che questa disuguaglianza vale, ovviamente, in ogni palla di centro x e raggio R tale che $B_{2R}(x)\subset\Omega$.
Essendo dunque V connesso e $\overline{V}$ compatto, preso $R=\frac{1}{4}\mathrm{dist}(V,\partial\Omega)$, si può coprire $\overline{V}$ con un numero finito di palle $\{B_i\}_{i=1}^N$, ciascuna di raggio $\frac{R}{2}$ e tali che $B_{i-1}\cap B_i\neq\emptyset$ per $i=2,\dots,N$.
Da ciò si può concludere, per ogni $x,y\in V$,
$$\left|\frac{u(x)}{u(y)}\right|\leq e^{NC(R,L)}\Rightarrow\sup_V u\leq e^{NC(R,L)}\inf_V u=C(V,L)\inf_V u.$$
Si noti infine come la stima trovata valga, per approssimazione, nelle sole ipotesi che u sia una soluzione debole e che i coefficienti a_{ij} e b_i siano in L^∞. $\square$

Teorema B.3 (disuguaglianza di Harnack (versione 2)). *Sia $u \in W^{1,2}_{loc}$ una soluzione debole non negativa dell'equazione ellittica in forma di divergenza*

$$\partial_{x_i}\left(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u\right) = 0$$

dentro una palla B_R, con $a_{ij} \in L^\infty$.
Allora, per ogni $\alpha < 1$, esiste una costante $C = C(\alpha)$ tale che

$$\sup_{B_{\alpha R}} u \leq c(\alpha) \inf_{B_{\alpha R}} u.$$

Teorema B.4 (formula di coarea). *Sia $S \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{H}^k-$rettificabile, i.e. unione numerabile di $k-$superfici Lipschitziane a meno di un insieme $\mathcal{H}^k-$nullo, e siano $f : S \to \mathbb{R}^m$ Lipschitziana e $g : S \to \mathbb{R}$ misurabile; si supponga inoltre $m \leq k$. Si denoti poi con $d^S f(x)$ il differenziale della restrizione di f al tangente approssimato a S in x, che si può dimostrare esistere $\mathcal{H}^k-$quasi ovunque. Allora*

$$\int_S g(x)Jf(x)d\mathcal{H}^k(x) = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{f^{-1}(y)\cap S} g(x)d\mathcal{H}^{k-m}(x)\right)dy,$$

dove, detta $d^S f^*$ l'aggiunta di $d^S f$, $Jf(x) := \sqrt{det(d^S f(x) \circ d^S f^*(x))}$ (si noti che $d^S f \circ d^S f^*$ è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^m$ e dunque la definizione ha senso). In particolare, prendendo $f(x) = |x|$ $(m = 1)$, si ottiene

$$\int_S g(x)d\mathcal{H}^k(x) = \int_0^{+\infty}\left(\int_{\partial B_r \cap S} g(x)d\mathcal{H}^{k-1}(x)\right)dr.$$

Teorema B.5 (formula di coarea per funzioni BV). *Sia $f \in BV(\Omega)$. Allora*

$$\int_\Omega |Df| = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{f > t\}, \Omega)\ dt.$$

Teorema B.6 (principio del massimo, versione forte). *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una soluzione regolare dell'equazione ellittica*

$$-a_{ij}\partial_{x_i x_j}u + b_i\partial_{x_i}u + cu = 0,$$

con $u \geq 0$ su $\partial\Omega$, $a_{ij}, b_i, c \in C^0(\Omega)$ e Ω connesso. Allora o $u > 0$ o $u \equiv 0$ in Ω.

Dimostrazione.
Supponiamo dapprima $c > 0$. In questo caso il teorema è noto, ma noi, per completezza, ne dimostreremo la versione debole, cioè che $u \geq 0$ in Ω.

Supponiamo, per assurdo, che esista un punto di minimo interno x_0 tale che $u(x_0) < 0$. Si avrà allora $\nabla u(x_0) = 0$ e $\nabla^2 u(x_0)$ semidefinita positiva. Mettendosi in un sistema di coordinate in cui $(a_{ij}(x_0))$ sia una matrice diagonale $(d_{ii}(x_0))$, detta y la variabile rispetto al nuovo sistema di riferimento, si ha, essendo $(a_{ij}(x_0))$ definita positiva,

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\partial_{x_i x_j} u(x_0) = \sum_i d_{ii}(x_0)\partial_{y_i y_i} u(x_0) \geq 0,$$

da cui

$$-a_{ij}(x_0)\partial_{x_i x_j} u(x_0) + b_i(x_0)\partial_{x_i} u(x_0) + c(x_0)u(x_0) \leq c(x_0)u(x_0) < 0,$$

il che è assurdo.
Vediamo ora come il caso generale si possa ricondurre a questo.
Sia $v = e^{-\lambda x_1} u$; quindi v risolve l'equazione ellittica

$$\tilde{L}(v) = L(e^{\lambda x_1} v)e^{-\lambda x_1} = 0,$$

dove $\tilde{L}$ è un operatore differenziale con coefficienti $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}$ ed è pertanto ellittico. Inoltre, $\tilde{c} = L(e^{\lambda x_1})e^{-\lambda x_1} = a_{11}\lambda^2 + b_1\lambda + c > 0$ per λ sufficientemente grande, dal momento che l'ellitticità di L implica $a_{11} > 0$.
Se esistesse, dunque, un punto interno in cui $u = 0$, si avrebbe $v = 0$, da cui $v \equiv 0$ e quindi $u \equiv 0$. $\square$

Teorema B.7 (principio del massimo per l'equazione delle superfici minime)**.** *Siano $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ rispettivamente una soprasoluzione e una sottosoluzione dell'equazione delle superfici minime, ossia*

$$div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) \leq 0$$

e

$$div\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}}\right) \geq 0.$$

Se $u \geq v$ su $\partial\Omega$, allora $u \geq v$ in Ω.

Dimostrazione.
Definiamo

$$\mathcal{J}(f, \Omega) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}.$$

Per la convessità di $\mathcal{J}$, comunque prese f e g sufficientemente regolari, risulta

$$\mathcal{J}(f,\Omega) \geq \mathcal{J}(g,\Omega) + \int_\Omega \frac{\langle \nabla g, \nabla(f-g)\rangle}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}dx,$$

da cui è facile vedere che la definizione di soprasoluzione (risp. sottosoluzione) è equivalente a chiedere che, per ogni w tale che $w \geq u$ (risp. $w \leq v$), $\mathcal{J}(w,\Omega) \geq \mathcal{J}(u,\Omega)$ (risp. $\mathcal{J}(w,\Omega) \leq \mathcal{J}(v,\Omega)$).
Supponiamo, per assurdo, che l'insieme

$$K = \{x \in \Omega \mid u(x) < v(x)\}$$

sia non vuoto. Prendendo $w = \max\{u,v\}$, si ha $\mathcal{J}(w,\Omega) \geq \mathcal{J}(u,\Omega)$, da cui

$$\mathcal{J}(v,K) \geq \mathcal{J}(u,K).$$

In maniera analoga, prendendo $w = \min\{u,v\}$, si ottiene

$$\mathcal{J}(v,K) \leq \mathcal{J}(u,K),$$

e dunque

$$\mathcal{J}(v,K) = \mathcal{J}(u,K).$$

Essendo $u \equiv v$ su ∂K e $u < v$ dentro K, si deve avere $\nabla u \neq \nabla v$ in un insieme dentro K di misura positiva. Dalla stretta convessità di $\mathcal{J}$ segue, dunque,

$$\mathcal{J}(\frac{u+v}{2},K) < \frac{\mathcal{J}(u,K)}{2} + \frac{\mathcal{J}(v,K)}{2} = \mathcal{J}(u,K),$$

il che è assurdo, essendo u una soprasoluzione. □

Teorema B.8 (Riesz). *Sia $L : C_0(\Omega,\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo su $C_0(\Omega,\mathbb{R}^m)$, dove $C_0(\Omega,\mathbb{R}^m)$ rappresenta la chiusura, rispetto alla norma del sup, di $C_c(\Omega,\mathbb{R}^m)$. Allora esiste una misura vettoriale di Radon $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_m)$ su Ω tale che*

(i) $L(f) = \int_\Omega f d\mu = \sum_{i=1}^m \int_\Omega f_i d\mu_i$.

(ii) $\|L\| = \int_\Omega |\mu|$.

Bibliografia

[1] G. Alberti: *Variational models for phase transition: an approach via* $\Gamma-$*convergence*, in: L. Ambrosio, N. Dancer: *Calculus of variations and partial differential equations. Topics on geometrical evolution problems and degree theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[2] G. Alberti, L. Ambrosio, X. Cabré: *On a long-standing conjecture of E. De Giorgi: simmetry in* $3D$ *for general non linearities and a local minimality property*, Acta Appl. Math., **65** 2001, no. 1-3, 9-33.

[3] L. Ambrosio: *Corso introduttivo alla Teoria Geometrica della Misura ed alle Superfici Minime*, Appunti Scuola Normale Sup. Pisa, 1997.

[4] L. Ambrosio, X. Cabré: *Entire solution of semilinear elliptic equation in* $\mathbb{R}^3$ *and a conjecture of De Giorgi*, J. American Math. Soc., **13** 2000, 725-739.

[5] H. Berestycki, L. A. Caffarelli, L. Nirenberg: *Further qualitative properties for elliptic equations in an unbounded domains*, Annali Scuola Normale Sup. Pisa, **25** 1997, 69-94.

[6] S. Bernstein: *Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique*, Comm. Soc. Math. de Kharkov (2), **15** 1915-1917, 38-45.

[7] E. Bombieri, E. De Giorgi, E. Giusti: *Minimal cones and the Bernstein problem*, Inv. Math., **7** 1969, 243-268.

[8] E. Bombieri, E. De Giorgi, M. Miranda: *Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche*, Arch. Rat. Mech. Anal., **32** 1965, 255-267.

[9] X. Cabré, L. A. Caffarelli: *Fully Nonlinear Elliptic Equation*, American Math. Soc., 1995.

[10] L. A. Caffarelli, A. Cordoba: *Uniform convergence of a singular perturbation problem*, Comm. Pure Appl. Math., **48** 1995, no. 1, 1-12.

[11] E. De Giorgi: *Una estensione del teorema di Bernstein*, Annali Scuola Normale Sup. Pisa (3), **19** 1965, 79-85.

[12] E. De Giorgi: *Convergence problems for functionals and operators*, in: *Proc. Int. Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1978)*, Pitagora, Bologna, 1979, 131-188.

[13] L. C. Evans: *Partial Differential Equation*, American Math. Soc., 1999.

[14] A. Farina: *One-dimensional symmetry for solution of quasilinear equation in* $\mathbb{R}^2$, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8), **6** 2003, no. 3, 685-692.

[15] W. H. Fleming: *On the oriented Plateau problem*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **11** 1962, 69-90.

[16] N. Ghoussoub, C. Gui: *On a conjecture of De Giorgi and some related problems*, Math. Ann, **311** 1998, 481-491.

[17] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1983.

[18] E. Giusti: *Minimal Surfaces and Function of Bounded Variation*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 1984.

[19] U. Massari, M. Miranda: *A remark on minimal cones*, Boll. Un. Mat. Ital. (6), **2**-A 1983, 123-125.

[20] M. Miranda: *Il Teorema di Bernstein*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **43** 1995, 203-207.

[21] L. Modica: $\Gamma-$*convergence to minimal surfaces problem and global solutions of* $\Delta u = 2(u^3 - u)$, in: *Proc. Int. Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1978)*, Pitagora, Bologna, 1979, 223-244.

[22] L. Modica: *The gradient theory of phase transitions and minimal interface criterion*, Arch. Rat. Mech. Anal., **98** 1987, no. 2, 123-142.

[23] L. Modica, S. Mortola: *Un esempio di* $\Gamma-$*convergenza*, Boll. Un. Mat. Ital. B (5), **14** 1977, no. 1, 285-299.

[24] J. Moser: *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **14** 1961, 577-591.

[25] J. Moser: *Minimal solution of variational problems on a torus*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, **43** 1986, no. 3, 252-253.

[26] J. C. C. Nitsche: *Elementary proof of Bernstein's theorems on minimal surfaces*, Ann. of Math., **66** 1957, 543-544.

[27] O. Savin: *Phase Transition: Regularity of Flat Level Sets*, PhD. Thesis, University of Texas at Austin, 2003.

[28] J. Simons: *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math (2), **88** 1968, 62-105.

[29] N. S. Trudinger: *A New Proof of the Interior Gradient Bound for the Minimal Surface Equation in n Dimensions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **69** 1972, no. 4, 821-823.