



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Il teorema di Poincaré-Hopf per varietà differenziabili

Relatore:
Prof.
Paolo Piazza

Candidato:
Alessio Cela
matricola 1714250

Anno Accademico 2017-2018
Dipartimento di Matematica 'Guido Castelnuovo'

Indice

Introduzione	III
Contenuto	III
1 Varietà differenziabili	1
1.1 Varietà e mappe lisce	1
1.2 Fibrato tangente e derivata	4
1.3 Il teorema della funzione inversa	6
1.4 Sottovarietà	8
2 Approssimazioni	12
2.1 Lemma di Sard	12
2.2 Partizione dell'unità	13
2.3 Intorno tubolare	16
2.4 Omotopia	19
2.5 Trasversalità	21
2.6 Applicazione: il teorema di Brouwer	23
3 Intersezioni orientate	26
3.1 Orientazione	26
3.2 Numero d'intersezione	29
3.3 Teoria del grado	31
4 Il teorema di Poincaré-Hopf	35
4.1 Campi di vettori e caratteristica di Eulero	35
4.2 Indice di un campo di vettori	36
4.3 Dimostrazione del teorema di Poincaré-Hopf	39
4.4 Applicazione: non pettinabilità della sfera	41
4.5 Esistenza di un campo di vettori mai nullo	43
5 Cenni sulla teoria di Morse	48
5.1 Gradiente di una funzione	48

5.2	Funzioni di Morse	49
5.3	Rivisitazione del teorema di Poincaré-Hopf	53
	Bibliografia	58

Introduzione

Lo scopo della seguente tesi è quello di fornire una dimostrazione intrinseca del teorema di Poincaré-Hopf, il quale lega la caratteristica di Eulero di una varietà compatta e orientata con la somma degli indici di un campo di vettori con finiti zeri su di essa.

In particolare la somma di tali indici dipende esclusivamente dalla varietà e non dal campo di vettori considerato.

Gli strumenti utilizzati sono quelli della topologia e dell'analisi vettoriale, attraverso i quali nei primi capitoli sono ottenuti una serie di strumenti tipici della topologia differenziale.

La presentazione è nel complesso completa: fatte alcune eccezioni, i risultati proposti sono seguiti da una possibile dimostrazione. Le eccezioni sono: la dimostrazione del lemma di Sard, la classificazione delle varietà 1-dimensionali compatte e connesse e il teorema di immersione di Whitney. Le loro dimostrazioni sono reperibili in quasi ogni testo di topologia differenziale e nella trattazione sono comunque proposti rimandi più precisi.

Contenuto

Il capitolo 1 è interamente dedicato alla definizione di varietà e alla costruzione di esse come controimmagini tramite funzioni trasverse a una data sottovarietà della varietà d'arrivo.

Il capitolo 2 contiene invece una serie di risultati di approssimazione: prima mappe continue sono approssimate con mappe C^∞ , poi mappe C^∞ con mappe ancora C^∞ e trasverse a una data sottovarietà della varietà d'arrivo.

Useremo approssimanti omotope alla mappa di partenza. Il risultato sarà una riduzione della teoria dell'omotopia all'omotopia C^∞ , più semplice.

Al termine del capitolo è riportata una dimostrazione del teorema di punto fisso di Brouwer, dovuta a Morris Hirsch, basata sui risultati fino al quel

punto ottenuti.

Nel capitolo 3 viene sviluppata la teoria delle intersezioni orientate e, come suo caso particolare, la teoria del grado. Ne derivano una serie di esempi notevoli riportati al termine del capitolo.

I primi tre capitoli vengono finalmente impiegati nel capitolo 4: attraverso la teoria delle intersezioni orientate viene definita la caratteristica di Eulero di una varietà compatta e orientata come la sua autointersezione nel fibrato tangente; attraverso la teoria del grado la nozione di indice di un campo di vettori in un suo zero isolato.

L'equivalenza fra la definizione di caratteristica di Eulero da noi proposta e quella data usando l'omologia può ottenersi usando le disuguaglianze di Morse e il teorema di Poincaré-Hopf. Noi non lo faremo, bensì rimandiamo a [1], pagine 161-164.

Sempre nel capitolo 4 sono presentate la dimostrazione del teorema di Poincaré-Hopf e del teorema di non pettinabilità della sfera.

La dimostrazione del teorema di Poincaré-Hopf riportata è differente da quella presente nei testi della bibliografia. In particolare, il campo di vettori considerato è supposto essere semplicemente continuo senza alcuna ipotesi di differenziabilità. Questo risultato si ottiene grazie a una serie di approssimazioni, lecite in virtù del contenuto del capitolo 2.

Infine nel capitolo 5 viene sviluppata la parte della teoria di Morse relativa alle funzioni di Morse. Quindi, nel caso di una varietà compatta e orientata viene legata la caratteristica di Eulero della varietà alla differenza fra il numero di indici pari e il numero di indici dispari di una qualsiasi funzione di Morse sulla varietà.

Capitolo 1

Varietà differenziabili

Cominciamo richiamando la definizione e le proprietà fondamentali di una varietà differenziabile. Questo sarà utile per capire quanto verrà assunto nel proseguo e per fissare le notazioni. Dopo di ciò, introdurremo il concetto fondamentale di trasversalità e cercheremo di capire il motivo del nostro interesse per esso.

1.1 Varietà e mappe lisce

Sia M uno spazio topologico di Hausdorff e a base numerabile. M si dice **varietà topologica** di dimensione m se ammette un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ tale che per ogni $i \in I$ esista $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ omeomorfismo su un aperto di \mathbb{R}^m .

Chiameremo in tal caso la coppia (φ_i, U_i) **carta** su M e la collezione $\Phi = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ **atlante** su M .

Diremo poi che Φ è C^∞ se per ogni $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ la funzione di transizione $\varphi_j \circ (\varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)})$ è C^∞ e che due atlanti C^∞ sono compatibili se la loro unione è un atlante C^∞ .

L'essere compatibili è una relazione di equivalenza e pertanto ogni atlante C^∞ è contenuto in un unico atlante massimale Ψ . La coppia (M, Ψ) si dice **varietà differenziabile** (o C^∞ o liscia) di dimensione m .

Talvolta avremo bisogno di parlare anche di varietà di dimensione 0. Queste coincidono con gli spazi topologici discreti formati da numerabili punti.

Se nella precedente definizione si sostituisce \mathbb{R}^m con $\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$ si ottiene la definizione di **varietà con bordo** topologica e C^∞ di dimensione m . In tal caso le funzioni di transizione sono definite su aperti di \mathbb{H}^m . Una

funzione f definita su un aperto di \mathbb{H}^m è C^∞ se è localmente la restizione di una funzione $\tilde{f} \in C^\infty$ definita su un aperto di \mathbb{R}^m . La matrice Jacobiana di \tilde{f} in un punto di \mathbb{H}^m dipende esclusivamente da f .

Siano M una varietà con bordo, $p \in M$ e (φ, U) carta su M in p (ossia $p \in U$). Se $\varphi(p) \notin \partial\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{H}^m \mid x_m = 0\}$, per ogni altra carta (ψ, V) in p su M si ha $\psi(p) \notin \partial\mathbb{H}^m$. Questo segue per le varietà topologiche dal teorema di invarianza del dominio e nel caso di varietà C^∞ dal teorema della funzione inversa.

Un tale punto si dice punto interno di M e l'insieme dei **punti interni** di M si indica con $\text{int}(M)$. Il suo complementare è l'insieme dei **punti di bordo** di M e si indica con ∂M . $\text{Int}(M)$ è aperto in M e pertanto ∂M è chiuso in M .

∂M ammette un atlante C^∞ , che indicheremo con $\Psi|\partial M$, indotto da M nella maniera seguente: se $p \in \partial M$ e (φ, U) è una carta in p su M , identificando $\partial\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{m-1}$ poichè $U \cap \partial M = \varphi^{-1}(\partial\mathbb{H}^m)$, possiamo scegliere $(\varphi|_{U \cap \partial M}, U \cap \partial M)$ come carta su ∂M in p .

Nel seguito tutte le varietà considerate saranno C^∞ e, a meno che non diversamente specificato, è ammesso che abbiano bordo.

Siano M, N varietà e $f : M \rightarrow N$ una mappa. Diremo che f è C^∞ (o **liscia**) se per ogni $p \in M$ esistono due carte (φ, U) e (ψ, V) rispettivamente su M e N con $p \in U$, $f(p) \in V$ e $f(U) \subseteq V$, dette adattate a f in p , tali che la composizione $\psi f \varphi^{-1}$ sia C^∞ .

Osserviamo che se f è C^∞ , comunque prese (φ, U) e (ψ, V) , carte adattate a f , la composizione $\psi f \varphi^{-1}$ è C^∞ . Infatti se $\varphi(p) \in \varphi(U)$, scegliendo due carte (φ_0, U_0) e (ψ_0, V_0) adattate a f con $p \in U_0$ e $\psi_0 f \varphi_0^{-1} \in C^\infty$, in $\varphi(U \cap U_0)$ possiamo scrivere

$$\psi f \varphi^{-1} = (\psi \psi_0^{-1})(\psi_0 f \varphi_0^{-1})(\varphi_0 \varphi^{-1})$$

e pertanto $\psi f \varphi^{-1}$ è C^∞ in un intorno di $\varphi(p)$.

Segue dalle definizioni che una mappa C^∞ è continua.

Diremo poi che f è un **diffeomorfismo** se è C^∞ con inversa C^∞ . In tal caso se $\partial M \neq \emptyset$ necessariamente $\partial N \neq \emptyset$, $f(\partial M) = \partial N$ e $f|_{\partial M} : \partial M \rightarrow \partial N$ è un diffeomorfismo.

Infine f si dice un **diffeomorfismo locale** se ogni punto p di M possiede un intorno U in M tale che $f(U) \subseteq N$ sia un aperto e $f|_U^{f(U)}$ sia un diffeomorfismo.

Introduciamo ora una serie di varietà che useremo più volte per proporre degli esempi.

Esempio 1.1.1. Lo **spazio proiettivo reale** $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ è definito come il quoziente di $\mathbb{R}^{m+1} - 0$ per la relazione di equivalenza

$$x \sim y \text{ se esiste } \lambda \in \mathbb{R} - 0 \text{ tale che } x = \lambda y.$$

$\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ è omeomorfo a $S^m / \{\pm I\}$, in particolare è di Hausdorff, a base numerabile e compatto.

Gli insiemi $U_i = \{[p_0, \dots, p_m] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^m \mid p_i \neq 0\}$ al variare di $i = 0, \dots, m$ formano un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ e

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \varphi_i([p_0, \dots, p_m]) = \left(\frac{p_0}{p_i}, \dots, \frac{p_{i-1}}{p_i}, \frac{p_{i+1}}{p_i}, \dots, \frac{p_m}{p_i} \right)$$

è un omeomorfismo con inversa

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow U_i \quad \varphi_i^{-1}(x_1, \dots, x_m) = [x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_m].$$

Dunque per $i < j$ $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_j \neq 0\}$, per $i > j$ $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_{j+1} \neq 0\}$ e in entrambi i casi $\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ è una mappa liscia. Concludiamo che la collezione $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=0, \dots, m}$ costituisce un atlante C^∞ su $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$.

Esempio 1.1.2. Lo **spazio proiettivo complesso** $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ è definito in maniera del tutto simile a quello reale.

$\mathbb{C}\mathbb{P}^m = (\mathbb{C}^{m+1} - 0) / \sim$ dove $x \sim y$ se esiste $\lambda \in \mathbb{C} - 0$ tale che $x = \lambda y$. Si tratta di uno spazio di Hausdorff, compatto e a base numerabile (si veda ad esempio [5]).

Identificando \mathbb{C}^m con \mathbb{R}^{2m} tramite $(z_1, \dots, z_m) \longmapsto (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ se $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$; l'argomento di sopra fornisce un atlante C^∞ su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$.

Esempio 1.1.3. $SO(m, \mathbb{R}) = \{B \in \text{Mat}(m, \mathbb{R}) \mid BB^T = I \text{ e } \det B = 1\}$ ammette una struttura di varietà C^∞ per mezzo del cosiddetto **atlante di Cayley**.

Sia $U \subseteq \text{Mat}(m, \mathbb{R})$ l'aperto formato dalle matrici X con $\det(X + I) \neq 0$. Osserviamo che per $X \in U$ è ben definito il rapporto $\frac{I-X}{I+X}$, essendo

$$\begin{aligned} (I - X)(I + X)^{-1} &= (I + X)^{-1}(I + X)(I - X)(I + X)^{-1} = \\ &= (I + X)^{-1}(I - X)(I + X)(I + X)^{-1} = \\ &= (I + X)^{-1}(I - X). \end{aligned}$$

Chiameremo $\frac{I-X}{I+X}$ trasformata di X . È facile verificare che la trasformata di X è ancora in U e la sua trasformata è di nuovo X . Inoltre X è antisimmetrica se e soltanto se la sua trasformata è in $\text{SO}(m, \mathbb{R})$: se $X^T = -X$, allora $I - X = (I + X)^T$ e $\det \frac{I-X}{I+X} = 1$, coincidendo poi la trasposta dell'inversa con l'inversa della trasposta

$$\frac{I - X}{I + X} \left(\frac{I - X}{I + X} \right)^T = \frac{I - X}{I + X} \frac{I + X}{I - X} = I;$$

viceversa se X è in U e $XX^T = I$ allora

$$\begin{aligned} \frac{I - X}{I + X} + \left(\frac{I - X}{I + X} \right)^T &= \frac{I - X}{I + X} + \frac{I - X^T}{I + X^T} = \\ &= \frac{I + X^T - X - XX^T + I + X - X^T - X^T X}{X + X^T + 2I} = 0. \end{aligned}$$

In particolare questo prova che se $\det(X + I) \neq 0$ e $XX^T = I$ allora $\det(X) = 1$.

Indichiamo con V l'intersezione di U con lo spazio delle matrici antisimmetriche e per ogni $C \in \text{SO}(m, \mathbb{R})$ definiamo

$$\varphi_C^{-1} : V \longrightarrow \text{SO}(m, \mathbb{R}) \quad \varphi_C^{-1}(X) = C \frac{I - X}{I + X},$$

un omeomorfismo sull'insieme $\{B \in \text{SO}(m, \mathbb{R}) \mid \det(I + C^{-1}B) \neq 0\}$, aperto di $\text{SO}(m, \mathbb{R})$. Essendo $\varphi_C^{-1}(0) = C$ e

$$\varphi_C : \varphi_C^{-1}(V) \longrightarrow V \quad \varphi_C(B) = \frac{I - C^{-1}B}{I + C^{-1}B},$$

le funzioni di transizione risultano lisce e abbiamo un atlante C^∞ su $\text{SO}(m, \mathbb{R})$ di dimensione $m(m-1)/2$.

1.2 Fibrato tangente e derivata

Sia (M, Ψ) una varietà differenziabile di dimensione m , dove $\Psi = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$. Sul prodotto $M \times I \times \mathbb{R}^m$ introduciamo la seguente relazione:

$$(p, i, a) \sim (q, j, b) \text{ se } p = q \text{ e } D(\varphi_j \varphi_i^{-1})(\varphi_i(p))a = b.$$

\sim è una relazione di equivalenza.

La proprietà simmetrica segue dall'uguaglianza

$$D(\varphi_i \varphi_j^{-1})(\varphi_j(q)) = D(\varphi_j \varphi_i^{-1})(\varphi_i(p))^{-1}$$

per $p = q$ e la proprietà transitiva dalla regola di derivazione per la composizione di funzioni. Precisamente se $(p, i, a) \sim (q, j, b)$ e $(q, j, b) \sim (z, l, c)$, allora $p = q = z$ e

$$\begin{aligned} D(\varphi_l \varphi_i^{-1})(\varphi_i(p))a &= D(\varphi_l \varphi_j^{-1})(\varphi_j(p))D(\varphi_j \varphi_i^{-1})(\varphi_i(p))a = \\ &= D(\varphi_l \varphi_j^{-1})(\varphi_j(p))b = c. \end{aligned}$$

Lo spazio quoziente si chiama **fibrato tangente** di M e si indica con TM . La mappa $\pi : TM \rightarrow M$ $\pi([p, i, a]) = p$ è ben posta e per ogni $p \in M$ $\pi^{-1}(p) = M_p$ è lo **spazio tangente** a M in p .

Dotiamo ora TM di una topologia e una struttura C^∞ in modo che π risulti liscia.

Per ogni $(\varphi_i, U_i) \in \Psi$ e $TU_i = \pi^{-1}(U_i)$ sia

$$T\varphi_i : TU_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^m \quad T\varphi_i([p, i, a]) = (\varphi_i(p), a).$$

Siccome per ogni $i, j \in I$ la composizione

$$T\varphi_j(T\varphi_i)^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$$

è data dall'omeomorfismo

$$T\varphi_j(T\varphi_i)^{-1}(x, a) = (\varphi_j \varphi_i^{-1}(x), D(\varphi_j \varphi_i^{-1})(x)a)$$

TM ammette un'unica topologia che renda TU_i un aperto e $T\varphi_i$ un omeomorfismo per ogni $i \in I$. $\{(T\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ costituisce un atlante C^∞ su TM e avendosi il quadrato commutativo

$$\begin{array}{ccc} TU_i & \xrightarrow{\pi} & U_i \\ \downarrow T\varphi_i & & \downarrow \varphi_i \\ \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{pr_{\varphi_i(U_i)}} & \varphi_i(U_i) \end{array}$$

π risulta C^∞ .

Sia ora $p \in M$ e $(\varphi_i, U_i) \in \Psi$ carta in p . Chiamiamo $T_p\varphi_i$ la biezione ottenuta componendo

$$M_p \hookrightarrow TU_i \xrightarrow{T\varphi_i} \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{pr_{\mathbb{R}^m}} \mathbb{R}^m.$$

$T_p\varphi_i$ induce allora una struttura di \mathbb{R} -spazio vettoriale su M_p e tale struttura non dipende dalla particolare carta (φ_i, U_i) considerata. Se (φ_j, U_j) è un'altra carta in p si ha infatti il triangolo commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & M_p & \\
 T_p\varphi_i \swarrow & & \searrow T_p\varphi_j \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow[\cong]{D(\varphi_j\varphi_i^{-1})(\varphi_i(p))} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Osserviamo anche che se p è un punto di bordo $(\partial M)_p \subset M_p$ è naturalmente un sottospazio vettoriale.

Possiamo ora definire la derivata di una funzione $f : M \rightarrow N$ C^∞ nella maniera seguente: se $p \in M$ e $(\varphi_i, U_i), (\psi_s, V_s)$ sono carte rispettivamente su M e N in p e $f(p)$

$$Tf : TM \rightarrow TN \quad Tf([p, i, a]) = [f(p), s, D(\psi_s f \varphi_i^{-1})(\varphi_i(p))a]$$

Tale definizione è ben posta perché se (φ_j, U_j) e (ψ_l, V_l) sono altre carte in p e $f(p)$ rispettivamente vale:

$$D(\psi_s f \varphi_i^{-1})(\varphi_i(p)) = D(\psi_s \psi_l^{-1})(\psi_l(f(p))) D(\psi_l f \varphi_j^{-1})(\varphi_j(p)) D(\varphi_j \varphi_i^{-1})(\varphi_i(p)).$$

Se $p \in M$, chiameremo la restrizione $T_p f : M_p \rightarrow N_{f(p)}$ di Tf **derivata** di f in p . Dalle definizioni segue che $T_p f$ è lineare.

Notiamo infine che date $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$, dove f, g sono C^∞ , allora $TfTg = T(fg)$ e indicando con 1_M l'identità su M , $T1_M = 1_{TM}$ è l'identità su TM . In particolare se f è un diffeomorfismo anche Tf lo è.

1.3 Il teorema della funzione inversa

Definizione. Sia $f : M \rightarrow N$ C^∞ e $p \in M$. Diremo che f è un'immersione (rispettivamente una **summersione**) in p se $T_p f$ è iniettivo (rispettivamente suriettivo). Diremo quindi che f è un'**immersione** (rispettivamente una **summersione**) se è un'immersione (rispettivamente una **summersione**) in ogni punto di M . Infine chiamiamo f un'**immersione topologica** se è un'immersione e un omeomorfismo sull'immagine.

Ricordiamo di seguito l'enunciato del teorema della funzione inversa:

Teorema 1.3.1. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto, $x \in U$ e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^∞ . Se $Df(x)$ è non singolare, f mappa diffeomorficamente un intorno di x in un intorno di $f(x)$.*

Tale teorema è spesso usato in topologia differenziale per introdurre coordinate che riducano una data mappa a una più semplice. Ne sono esempio i seguenti due corollari.

Sia $f: M \rightarrow N$ C^∞ , $p \in M$ e assumiamo $\partial N = \emptyset$.

Corollario 1.3.2. *Supponiamo che $p \in \text{int}(M)$ e f sia una sommersione in p , oppure che $p \in \partial M$ e $f|_{\partial M}$ sia una sommersione in p .*

Allora esistono (φ, U) e (ψ, V) carte (adattate a f) in p e $f(p)$ rispettivamente, tali che

$$\psi f \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$$

In particolare f è una sommersione in un'intorno di p .

Dimostrazione. Cominciamo dal caso in cui $p \in \text{int}(M)$ e f è una sommersione in p . Usando le carte locali possiamo ridurci immediatamente alla situazione in cui $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ e $f(p) = 0$. Inoltre $Df(0)$ ha rango n e a meno di un isomorfismo lineare di \mathbb{R}^m non è restrittivo $Df(0) = \begin{pmatrix} I_n & | & 0 \end{pmatrix}$. La matrice Jacobiana in 0 di $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\varphi(x) = (f(x), x_{n+1}, \dots, x_m)$ è la matrice identità, quindi dal teorema della funzione inversa φ è un diffeomorfismo da un intorno U di 0 in un intorno $\varphi(U)$ di 0. Infine per ogni $x \in \varphi(U)$ si ha $f\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$.

Nel secondo caso $p \in \partial M$ e $f|_{\partial M}$ è una sommersione in p . Possiamo assumere $M = \partial\mathbb{H}^m$, $N = \mathbb{R}^n$, $p = f(p) = 0$. Inoltre siccome $D(f|_{\partial\mathbb{H}^m})(0)$ ha rango n , con un isomorfismo lineare di \mathbb{R}^m , che fissi $(0, \dots, 0, 1)$, ci riduciamo alla situazione in cui $D(f|_{\partial\mathbb{H}^m})(0) = \begin{pmatrix} I_n & | & 0 \end{pmatrix}$. Sia \tilde{f} un'estensione C^∞ di f in un intorno \tilde{U} di 0 in \mathbb{R}^m . Posto $\varphi: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\varphi(x) = (\tilde{f}(x), x_{n+1}, \dots, x_m)$, $D\varphi(0)$ è invertibile e pertanto φ mappa diffeomorficamente un intorno $U \subseteq \tilde{U}$ di 0 in un intorno $\varphi(U)$ di 0.

Per costruzione $\varphi(U \cap \mathbb{H}^m) = \varphi(U) \cap \mathbb{H}^m$ e $\varphi(U \cap \partial\mathbb{H}^m) = \varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^m$. Quindi possiamo prendere φ come carta in 0 e $f\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$ se $(x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U) \cap \mathbb{H}^m$. \square

Corollario 1.3.3. *Assumiamo $\partial M = \emptyset$.*

Se f è un'immersione in p esistono (φ, U) e (ψ, V) carte (adattate a f) in p e $f(p)$ rispettivamente tali che

$$\psi f \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

In particolare f è un'immersione in un intorno di p .

Dimostrazione. Con lo stesso argomento di sopra (questa volta usando un isomorfismo lineare di \mathbb{R}^n) possiamo assumere che $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$, $p = f(p) = 0$ e $Df(0) = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$. Sia allora $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $h(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_m) + (0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n)$. Essendo $Dh(0)$ l'identità troviamo un intorno Z di 0 che viene mappato da h diffeomorficamente su un intorno $h(Z) = V$ di 0 . Allora se $\psi = (h|_Z)^{-1}$ si ha $\psi f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ per ogni $(x_1, \dots, x_m) \in f^{-1}(V)$. \square

1.4 Sottovarietà

Definizione. Siano M e N due varietà e supponiamo $M \subseteq N$. Diremo che M è una **sottovarietà** di N , con $\text{codim}_N M = \dim N - \dim M$, se l'inclusione $M \hookrightarrow N$ è un'immersione topologica.

Esempio 1.4.1. Se $f : M \rightarrow N$ è un'immersione topologica, $f(M) \subseteq N$ è una sottovarietà (con la struttura C^∞ indotta da M).

Esempio 1.4.2. Sia $Z(M)$ la sezione zero di TM . Allora $Z(M) \subseteq TM$ è sottovarietà diffeomorfa a M tramite $j : M \hookrightarrow TM$ definita da $p \mapsto [p, 0]$. Infatti $\pi \circ j = 1_M$ e $j \circ (\pi|_{Z(M)}) = 1_{Z(M)}$. Identificheremo a volte M con la sua immagine in TM .

Esempio 1.4.3. Sia $f : M \rightarrow N$ C^∞ . Allora $\text{graph}(f) = \{(p, f(p)) \mid p \in M\} \subseteq M \times N$ è una sottovarietà. Infatti detta

$$F : M \rightarrow M \times N \quad F(p) = (p, f(p))$$

F è un'immersione topologica; avendosi $pr_M \circ F = 1_M$ e $F \circ (pr_M|_{\text{graph}(f)}) = 1_{\text{graph}(f)}$.

Nel caso di sottovarietà aventi bordo, restringeremo la nostra attenzione a quelle fra esse specificate dalla seguente

Definizione. Sia $M \subseteq N$ una sottovarietà, $\dim M = m \geq 1$. Diremo che M è **neat** se:

- (i) $\partial M = M \cap \partial N$;
- (ii) per ogni $p \in \partial M$ esiste una carta (ψ, V) su N tale che $M \cap V = \psi^{-1}(0 \times \mathbb{H}^m)$.

Essenzialmente mentre la prima condizione stabilisce esattamente quale sia il bordo di M in termini di quello di N , la seconda garantisce che ∂M intersechi ∂N come $0 \times \mathbb{H}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ interseca $\mathbb{R}^{n-1} \times 0 \subseteq \mathbb{R}^n$. In particolare se $p \in \partial M$, $M_p \not\subseteq (\partial N)_p$.

Proposizione 1.4.4. *Sia $M \subseteq N$ un sottoinsieme. Le seguenti sono equivalenti:*

- (i) M ammette una struttura di sottovarietà neat di N avente dimensione m ;
- (ii) per ogni $p \in M$ esiste una carta (ψ, V) su N in p tale che $M \cap V = \psi^{-1}(0 \times \mathbb{H}^m)$ se $p \in \partial N$, $M \cap V = \psi^{-1}(0 \times \mathbb{R}^m)$ se $p \in \text{int}(N)$.

Dimostrazione. Supponiamo valga (i). Se $p \in M \cap \partial N = \partial M$ la tesi segue dalle definizioni. Se invece $p \in \text{int}(N) \cap M = \text{int}(M)$, essendo $\text{int}(N)$ e $\text{int}(M)$ rispettivamente aperti di N e M , possiamo assumere $\partial M = \partial N = \emptyset$ e l'esistenza di (ψ, V) segue da 1.3.3. Precisamente, esistono (φ, \tilde{U}) , (ψ, \tilde{V}) carte su M e N rispettivamente in p , con $\tilde{U} \subseteq \tilde{V}$ e $\psi\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, $x \in \varphi(\tilde{U})$. Sia $A \times B \subseteq \psi(\tilde{V})$ un rettangolo aperto contenente $\psi(p)$ e tale che $A \subseteq \varphi(\tilde{U})$. Chiamiamo $U = \varphi^{-1}(A)$ e $V = \psi^{-1}(A \times B)$. Avendo M la topologia di sottospazio, $U = M \cap W$ per qualche aperto W di N (quì usiamo il fatto che l'inclusione è un omeomorfismo su M). A meno di sostituire V con $W \cap V$ possiamo assumere che $V \cap M = U$. Allora $\psi(V \cap M) = \psi(U) = \psi\varphi^{-1}(A) = A \times 0 = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times 0)$. Viceversa se vale (ii) la collezione delle $(\psi|_{V \cap M}, V \cap M)$ al variare di p in M fornisce un'atlante su M che rende M una sottovarietà neat di N . \square

Corollario 1.4.5. *Sia $M \subseteq N$ è una sottovarietà neat con $\text{codim}_N M = l < n$. Allora per ogni $p \in M$ esiste un aperto V di N , con $p \in V$, e una sommersione $\sigma : V \rightarrow \mathbb{R}^l$, che è anche una sommersione quando ristretta a $V \cap \partial N$, tale che $V \cap M = \sigma^{-1}(0)$.*

Dimostrazione. Sia $p \in M$ e (ψ, V) carta in p su N come in 1.4.4. Detta $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ la proiezione sulle prime l componenti, possiamo prendere $\sigma = \pi\psi$. Infatti $\sigma^{-1}(0) = \psi^{-1}(\pi^{-1}(0)) = V \cap M$, σ , essendo composizione di sommerzioni, è una sommersione e se $p \in \partial N$, ψ mappa $\partial N \cap V$ diffeomorficamente su $\psi(V) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times 0)$ e pertanto $\sigma|_{V \cap \partial N}$ è una sommersione. \square

Forniamo ora il tipico metodo con cui ottenere una sottovarietà neat (il quale, peraltro, costituisce il viceversa di 1.4.5).

Definizione. Sia $f : M \rightarrow N$ C^∞ . $q \in N$ si dice **valore regolare** per f se per ogni $p \in f^{-1}(q)$, $T_p f$ è surgettiva. Altrimenti q si dice **valore critico** per f .

Teorema 1.4.6. *Sia $f: M \rightarrow N$ C^∞ . Se $q \in N - \partial N$ è un valore regolare per entrambe f e $f|_{\partial M}$ e $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, allora $f^{-1}(q) \subseteq M$ è una sottovarietà neat di dimensione $m - n$.*

Dimostrazione. Siccome $q \in \text{int}(N)$ e $\text{int}(N)$ è un aperto di N non è restrittivo assumere $\partial N = \emptyset$.

Sia $p \in f^{-1}(q)$ e scegliamo (φ, U) e (ψ, V) carte in p e q rispettivamente come in 1.3.2. Diciamo $\varphi(p) = 0$ e $\psi(q) = 0$. Allora

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap f^{-1}(q)) &= \varphi(U \cap (\psi f)^{-1}(0)) = (\psi f \varphi^{-1})^{-1}(0) = \\ &= \{(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_m) \in \varphi(U)\}. \end{aligned}$$

La tesi segue da 1.4.4. □

Esempio 1.4.7. Sia $m \geq 1$ e $f: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x|^2 - 1$. 0 un è valore regolare per f perchè se $Df(x) = 2(x_1, \dots, x_{m+1}) \neq (0, \dots, 0)$ se $x \neq 0$. Pertanto $f^{-1}(0) = S^m$ è una sottovarietà (senza bordo) di \mathbb{R}^{m+1} .

Nel caso in cui M abbia bordo è necessario che q sia valore regolare per $f|_{\partial M}$ e non soltanto per f , come mostra il seguente esempio:

Esempio 1.4.8. Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Defi-

niamo $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = y - g(x)$. 0 è un valore regolare per f essendo f una sommersione, ma $f^{-1}(0)$ non è una varietà. Infatti $0 \in f^{-1}(0)$, ma ogni intorno di 0 in $f^{-1}(0)$ è sconnesso.

Introduciamo infine il concetto di trasversalità, che sarà pervasivo nel seguito.

Definizione. Sia $f: M \rightarrow N$ liscia. Sia poi $A \subseteq N$ una sottovarietà neat con $\partial A = \emptyset$ (in particolare $A \subseteq N - \partial N$). f si dice **trasversa** a A , e si scrive $f \pitchfork A$, se per ogni $p \in f^{-1}(A)$ si ha $T_p f(M_p) + A_{f(p)} = N_{f(p)}$.

Chiaramente tale condizione equivale a richiedere che la composizione

$$M_p \longrightarrow N_q \longrightarrow N_q/A_q \quad (q = f(p))$$

sia surgettiva.

Si tratta evidentemente di una generalizzazione del concetto di valore regolare. Ne segue pertanto una generalizzazione di 1.4.6.

Teorema 1.4.9. *Se $f \pitchfork A$, $f|_{\partial M} \pitchfork A$ e $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, allora $f^{-1}(A) \subseteq M$ è una sottovarietà neat e $\text{codim}_M f^{-1}(A) = \text{codim}_N A$.*

Dimostrazione. Sia $p \in f^{-1}(A)$ e $q = f(p)$. Per 1.4.5 esiste un intorno V di q in N e una immersione $\sigma : V \rightarrow \mathbb{R}^l$ ($l = \text{codim}_N A$) tale che $V \cap A = \sigma^{-1}(0)$. $U = f^{-1}(V)$ è aperto in M , $U \cap f^{-1}(A) = (\sigma \circ (f|_U))^{-1}(0)$ e entrambe $\sigma \circ (f|_U)$, $\sigma \circ (f|_{U \cap \partial M})$ sono trasverse a 0 per ipotesi (si veda anche l'osservazione seguente). La tesi segue pertanto da 1.4.6. \square

Osservazione 1.4.10. Nelle ipotesi del teorema, se $Z = f^{-1}(A)$, $p \in Z$ e $q = f(p)$, vale $Z_p = (T_p f)^{-1}(A_q)$.

Dimostrazione. La composizione

$$Z_p \hookrightarrow M_p \xrightarrow{T_p f} N_q \xrightarrow{\pi} N_q/A_q$$

è nulla essendo $T_p f(Z_p) \subseteq A_p$. Inoltre per l'ipotesi di trasversalità $\pi \circ T_p f$ è surgettiva, quindi il suo nucleo ha dimensione $\dim M - \text{codim}_N A = \dim M - \text{codim}_M Z = \dim Z$ e coincide pertanto con Z_p . \square

Capitolo 2

Approssimazioni

Lo scopo di questo secondo capitolo è quello di sviluppare la tecnologia necessaria alla trattazione dei capitoli successivi. Sebbene alcuni risultati possano apparire tecnici, essi vengono apprezzati non appena si guarda alle loro applicazioni. Fra esse una dimostrazione del teorema di punto fisso di Brouwer, riportata alla fine del capitolo.

2.1 Lemma di Sard

Definizione. Sia $f : M \rightarrow N$ liscia. $p \in M$ si dice **punto critico** per f se $T_p f$ non è surgettiva. Un punto non critico si dice **punto regolare** per f .

Se indichiamo con Σ_f l'insieme dei punti critici di f , $f(\Sigma_f)$ è l'insieme dei valori critici di f .

Definizione. Un sottoinsieme $X \subseteq M$ si dice di **misura nulla** in M se per ogni carta (φ, U) su M , $\varphi(U \cap X)$ è un sottoinsieme di misura nulla di \mathbb{R}^m .

Per verificare che X ha misura nulla è sufficiente trovare per ogni punto $p \in X$, una carta (φ_p, U_p) su M in p con $\varphi_p(U_p \cap X)$ di misura 0 in \mathbb{R}^m . Questo perchè possiamo sempre estrarre da $\{U_p\}_{p \in M}$ un sottoricoprimento numerabile di X , diffeomorfismi fra aperti di \mathbb{R}^m mandano insiemi di misura 0 in insiemi di misura 0 e unione numerabile di insiemi di misura 0 in \mathbb{R}^m ha misura 0.

Esplicitamente esistono $p_1, p_2, \dots \in X$ tali che $X \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_{p_i}$ e per ogni carta (φ, U) su M si ha

$$\varphi(U \cap X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N} : p_i \in U \cap X} (\varphi \varphi_{p_i}^{-1})(\varphi_{p_i}(U \cap U_{p_i} \cap X)).$$

Enunciamo ora, senza dimostrazione, il seguente teorema dovuto a Sard:

Teorema 2.1.1. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia. Allora $f(\Sigma_f)$ ha misura 0.*

Dimostrazione. Si veda [1] pagine 68-72. \square

Corollario 2.1.2. *Sia $f : M \rightarrow N$ liscia. Allora $f(\Sigma_f) \cup f(\Sigma_{f|_{\partial M}})$ ha misura 0 in N . In particolare l'insieme dei valori regolari per entrambe f e $f|_{\partial M}$ è denso in N .*

Dimostrazione. Se $\partial M = \emptyset$ scegliendo un atlante numerabile $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ su M , per ogni carta (V, ψ) su N possiamo scrivere

$$\psi(f(\Sigma_f) \cap V) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\psi f \varphi_i^{-1})(\varphi_i(\Sigma_f \cap U_i \cap f^{-1}(V))).$$

Dunque la tesi segue da 2.1.1, osservando che $\varphi_i(\Sigma_f \cap U_i \cap f^{-1}(V))$ è l'insieme dei valori critici di $\psi f(\varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V))})$.

Se invece $\partial M \neq \emptyset$, notando che $\Sigma_f \cap \partial M \subseteq \Sigma_{f|_{\partial M}}$, abbiamo $f(\Sigma_f) \cup f(\Sigma_{f|_{\partial M}}) = f(\Sigma_f \cap \text{int}(M)) \cup f(\Sigma_{f|_{\partial M}})$. Pertanto la tesi segue dal caso $\partial M = \emptyset$ e dal fatto che l'unione di due insiemi di misura nulla ha misura nulla. \square

2.2 Partizione dell'unità

Sia M una varietà differenziabile e $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ è un ricoprimento aperto di M .

Definizione. Una **partizione dell'unità** C^∞ su M subordinata a \mathcal{V} è una famiglia $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ di mappe C^∞ , $\lambda_j : M \rightarrow [0, 1]$ tali che:

- (i) $\text{supp}(\lambda_j) = \overline{\lambda_j^{-1}(\mathbb{R} - 0)} \subseteq V_j$ per ogni $j \in J$;
- (ii) $\{\text{supp}(\lambda_j)\}_{j \in J}$ sia localmente finita (i.e. ogni $p \in M$ ammette un intorno in M che intersechi finiti elementi della collezione $\{\text{supp}(\lambda_j)\}_{j \in J}$);
- (iii) $\sum_{j \in J} \lambda_j(p) = 1$ per ogni $p \in M$ (da (ii), in ogni punto, la somma è finita).

Definizione. Un **raffinamento** di un ricoprimento $\{W_j\}_{j \in J}$ di M è un altro ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di M per cui esista una funzione di raffinamento $\alpha : I \rightarrow J$ tale che $U_i \subseteq W_{\alpha(i)}$ per ogni $i \in I$.

Lemma 2.2.1. *Sia $\{\mu_i\}_{i \in I}$ una collezione di mappe $M \rightarrow [0, 1]$ C^∞ , con la proprietà che $\{\text{supp}(\mu_i)\}_{i \in I}$ raffini \mathcal{V} e soddisfacente (ii) e (iii). Allora, se α è una funzione di raffinamento, posto $\lambda_j : M \rightarrow [0, 1]$ $\lambda_j(p) = \sum_{i: \alpha(i)=j} \mu_i(p)$, $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ è una partizione dell'unità subordinata a \mathcal{V} .*

Dimostrazione. Essendo $\lambda_j^{-1}(\mathbb{R} - 0) = \bigcup_{i:\alpha(i)=j} \mu_i^{-1}(\mathbb{R} - 0)$, si ha, per locale finitezza, $\overline{\lambda_j^{-1}(\mathbb{R} - 0)} = \overline{\bigcup_{i:\alpha(i)=j} \mu_i^{-1}(\mathbb{R} - 0)}$. Questo implica (i) e (ii). Infine per ogni $p \in M$ $\sum_{j \in J} \lambda_j(p) = \sum_{j \in J} \sum_{i:\alpha(i)=j} \mu_i(p) = \sum_{i \in I} \mu_i(p) = 1$ e questo prova (iii). □

Definizione. Diremo che un atlante $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ su M è **adeguato** se $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^m$ (o \mathbb{H}^m) per ogni $i \in I$, $\{U_i\}_{i \in I}$ è localmente finita e $\bigcup_{i \in I} \varphi_i^{-1}(D^m(1)) = M$.

Per dimostrare l'esistenza di una partizione dell'unità subordinata a \mathcal{V} avremo bisogno di alcuni lemmi preliminari.

Lemma 2.2.2. *Uno spazio topologico X localmente compatto, Hausdorff e a base numerabile ammette un esaustione in compatti (i.e. una collezione numerabile di compatti $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ricoprenti X con la proprietà che $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$ per ogni n).*

Dimostrazione. Sia U_1, U_2, \dots una base numerabile di X con $\overline{U_i}$ compatto per ogni i . Poniamo $K_1 = \overline{U_1}$ e dato K_i , definiamo K_{i+1} per ricorrenza nella maniera seguente: detto j_i il minimo intero per cui $K_i \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{j_i}$, poniamo $K_{i+1} = \overline{U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{j_i} \cup U_{j_i+1}}$. □

Lemma 2.2.3. *Esiste una atlante $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ su M adeguato con la proprietà che $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ sia un raffinamento di \mathcal{V} .*

In particolare ogni ricoprimento aperto di M ammette un raffinamento aperto e localmente finito, ossia M è paracompatta.

Dimostrazione. Sia $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esaustione in compatti di M e poniamo $K_{-1} = K_0 = \emptyset$.

Se $p \in M$, esistono $n \geq 1$ e $j \in J$ tali che $p \in (K_n - \overset{\circ}{K}_{n-1}) \cap V_j$. Sia (φ_p, U_p) una carta in p con $U_p \subseteq (\overset{\circ}{K}_{n+1} - K_{n-2}) \cap V_j$, $\varphi_p(p) = 0$, $\varphi_p(U_p) = \mathbb{R}^m$ (o \mathbb{H}^m). Per ogni n , possiamo estrarre da $\{\varphi_p^{-1}(D^m(1))\}_{p \in M}$ un ricoprimento finito di $K_n - \overset{\circ}{K}_{n-1}$; siano $(\varphi_1^n, U_1^n), \dots, (\varphi_{h_n}^n, U_{h_n}^n)$ le corrispondenti carte. Allora $\{(\varphi_i^n, U_i^n)\}_{i=1, \dots, h_n}$ risolve il problema (la locale finitezza di $\mathcal{U} = \{U_i^n\}$ segue dal fatto che ciascun K_n interseca finiti elementi di \mathcal{U}). □

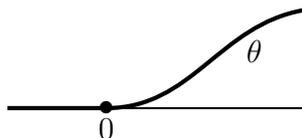
Lemma 2.2.4. *Per ogni $0 < a < b < \infty$ esiste $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ C^∞ con le seguenti proprietà:*

- (i) $\lambda(x) = 1$ se $|x| \leq a$;
- (ii) $0 < \lambda(x) < 1$ se $a < |x| < b$;
- (iii) $\lambda(x) = 0$ se $|x| \geq b$.

Dimostrazione.

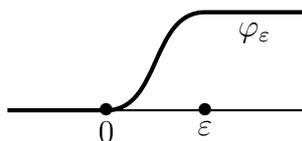
Detta

$$\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ e^{-1/t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$



e

$$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \varphi_\varepsilon(t) = \frac{\theta(t)}{\theta(t) + \theta(\varepsilon - t)} \quad (\varepsilon > 0),$$



possiamo prendere $\lambda(x) = 1 - \varphi_{b-a}(|x| - a)$.

□

Teorema 2.2.5. *Esiste una partizione dell'unità subordinata a \mathcal{V} .*

Dimostrazione. Da 2.2.1 e 2.2.3 basta provare che se $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ è un atlante adeguato su M , $\{U_i\}_{i \in I}$ ammette partizione dell'unità subordinata.

Sia λ come in 2.2.4 con $a = 1$ e $b = 2$ e $\tilde{\lambda}_i(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \notin U_i, \\ \lambda(\varphi_i(p)) & \text{se } p \in U_i. \end{cases}$

Basta scegliere $\lambda_i(p) = \frac{\tilde{\lambda}_i(p)}{\sum_{h \in I} \tilde{\lambda}_h(p)}$ (ben definita perchè ciascun $p \in M$ è in qualche $\varphi_h^{-1}(D^m(1))$, quindi il denominatore è mai nullo). □

Vediamo subito come utilizzare l'esistenza di partizioni dell'unità.

Definizione. Diremo che $f : M \longrightarrow N$ è liscia (o C^∞) su un sottoinsieme $Z \subseteq M$ se per ogni $p \in Z$ esiste un intorno U di p in M e una mappa liscia $\tilde{f} : U \longrightarrow N$ tale che $f|_{U \cap Z} = \tilde{f}|_{U \cap Z}$.

Definizione. Siano X e Y spazi topologici, di cui Y metrizzabile con metrica d_Y . Siano poi $\delta : X \rightarrow (0, \infty)$ una mappa continua e $f, g : X \rightarrow Y$ due funzioni. Diremo che f è una δ -**approssimazione** di g se $d_Y(f(x), g(x)) < \delta(x)$ per ogni $x \in X$.

Supponiamo data $\delta : M \rightarrow (0, \infty)$ continua.

Proposizione 2.2.6. *Sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e $Z \subseteq M$ un chiuso su cui g è C^∞ . Esiste una mappa liscia $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, coincidente con g su Z , che risulti una δ -approssimazione di g .*

Dimostrazione. Chiaramente possiamo assumere $n = 1$.

Per ogni $\bar{p} \in Z$ scegliamo un intorno $U_{\bar{p}}$ di \bar{p} in M e $g_{\bar{p}}$, definita su $U_{\bar{p}}$, liscia con $g|_{U_{\bar{p}} \cap Z} = g_{\bar{p}}|_{U_{\bar{p}} \cap Z}$. A meno di restringere $U_{\bar{p}}$ possiamo assumere che $|g_{\bar{p}}(p) - g(p)| < \delta(p)$ per ogni $p \in U_{\bar{p}}$.

Similmente per ogni $\bar{p} \in M - Z$ scegliamo un intorno $U_{\bar{p}}$ di \bar{p} in $M - Z$ con $|g(p) - g(\bar{p})| < \delta(p)$ per ogni $p \in U_{\bar{p}}$ e poniamo $g_{\bar{p}}(p) = g(\bar{p})$ per $p \in U_{\bar{p}}$.

Se $\{\lambda_{\bar{p}}\}_{\bar{p} \in M}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\{U_{\bar{p}}\}_{\bar{p} \in M}$, abbiamo f ponendo $f(p) = \sum_{\bar{p} \in M: p \in U_{\bar{p}}} \lambda_{\bar{p}}(p) g_{\bar{p}}(p)$. Infatti per ogni $p \in M$

$$\begin{aligned} |f(p) - g(p)| &= \left| \sum_{\bar{p} \in M: p \in U_{\bar{p}}} \lambda_{\bar{p}}(p) (g_{\bar{p}}(p) - g(p)) \right| \leq \\ &\leq \sum_{\bar{p} \in M: p \in U_{\bar{p}}} \lambda_{\bar{p}}(p) |g_{\bar{p}}(p) - g(p)| \leq \delta(p). \end{aligned}$$

□

2.3 Intorno tubolare

In questo paragrafo M sarà una varietà differenziabile di dimensione m e priva di bordo ($\partial M = \emptyset$).

Il seguente risultato è dovuto a Whitney:

Teorema 2.3.1. *Esiste un'immersione topologica $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, per qualche n .*

Ovviamente possiamo assumere $n > m$.

Identifichiamo M con la sua immagine tramite i . In particolare M_p sarà un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

Definiamo

$$N_M = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in M_p^\perp\}.$$

Lemma 2.3.2. N_M è una sottovarietà di dimensione n di $M \times \mathbb{R}^n$ e

$$\tau : N_M \longrightarrow M \quad \tau(p, v) = p$$

è una *summersione*.

Dimostrazione. Se $\bar{p} \in M$, scegliamo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto contenente \bar{p} e una *summersione* $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ tale che $\sigma^{-1}(0) = U \cap M$. Per ogni $p \in U \cap M$ è allora definita l'applicazione lineare

$$D\sigma(p)^T : \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Essendo $D\sigma(p)$ surgettiva, $D\sigma(p)^T$ è iniettiva e mappa \mathbb{R}^{n-m} isomorficamente su $(\text{Ker}(D\sigma(p)))^\perp = M_p^\perp$.

Per vederlo usiamo l'algebra lineare: se $w \in \text{Ker}(D\sigma(p)^T)$, allora per ogni $v \in \mathbb{R}^{n-m}$ si ha $\langle w, D\sigma(p)v \rangle = \langle D\sigma(p)^T w, v \rangle = 0$ e dalla surgettività di $D\sigma(p)$ deve essere $w = 0$, ossia $D\sigma(p)^T$ è iniettiva. Per la stessa ragione l'immagine di $D\sigma(p)^T$ è contenuta in $(\text{Ker}(D\sigma(p)))^\perp$. Infine per motivi dimensionali questi devono coincidere.

Resta pertanto definita un'immersione topologica

$$h : (U \cap M) \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n \quad h(p, w) = (p, D\sigma(p)^T w).$$

su $N_{U \cap M} = N_M \cap (U \times \mathbb{R}^n)$, aperto di N_M .

Infine il fatto che τ sia una *summersione* segue considerando il triangolo commutativo di seguito riportato

$$\begin{array}{ccc} (M \cap U) \times \mathbb{R}^{n-m} & \xrightarrow{h} & N_{M \cap U} \\ & \searrow \text{pr}_{M \cap U} & \swarrow \tau \\ & & M \cap U \end{array}$$

□

Sia ora $f : N_M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la restrizione di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n (x, y) \mapsto x + y$ a N_M . f è una mappa C^∞ e la sua derivata ha rango massimo su tutti i punti di $M = M \times 0 \subseteq N_M$, come segue osservando che $T_{(p,0)}f(M_p \times 0) \supseteq M_p$ e $T_{(p,0)}f(0 \times M_p^\perp) \supseteq M_p^\perp$. Quindi f ha rango massimo in un intorno di M in N_M , ristretta al quale risulta allora un locale diffeomorfismo. Inoltre f ristretta a M è un omeomorfismo su $f(M) = M$.

Lemma 2.3.3. f mappa diffeomorficamente un intorno aperto V di M in N_M in un intorno aperto di M in \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Per ogni $p \in M$ scegliamo un intorno aperto V_p di p in N_M con $f(V_p)$ un aperto in \mathbb{R}^n e $f|_{V_p}^{f(V_p)}$ un diffeomorfismo. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un raffinamento localmente finito e aperto del ricoprimento $\{f(V_p)\}_{p \in M}$ di $\bigcup_{p \in M} f(V_p)$, α una funzione di raffinamento e $g_j = (f|_{f^{-1}(U_j) \cap V_{\alpha(j)}}^{U_j})^{-1}$.

Per ogni $q \in M = f(M)$ esistono $U_1, \dots, U_l \in \mathcal{U}$ tali che $q \in U_1 \cap \dots \cap U_l$ e $q \notin U_i$ se $U_i \neq U_j$ per ogni $j = 1, \dots, l$. Allora $g_1(q) = \dots = g_l(q)$ e $U_q = \bigcap_{j=1}^l g_j^{-1}(\bigcap_{k=1}^l f^{-1}(U_k) \cap V_{\alpha(k)}) = \bigcap_{j=1}^l g_j^{-1}(\bigcap_{k=1}^l g_k(U_k))$ è un intorno aperto di q in $U_1 \cap \dots \cap U_l$ su cui g_1, \dots, g_l coincidono.

Dunque su U_q tutte le g_i definite in q coincidono.

Per ogni $i, j \in I$ definiamo poi $W_{ij} = \{q \in U_i \cap U_j \mid g_i(q) \neq g_j(q)\}$. Allora la famiglia delle $\overline{W_{ij}}$ (dove la chiusura è in \mathbb{R}^n) è localmente finita, essendolo quella delle W_{ij} , e $\overline{W_{ij}} \cap M = \emptyset$ per ogni i, j , essendo per ogni $q \in M$ $U_q \cap W_{ij} = \emptyset$. In definitiva, per ogni i $\tilde{U}_i = U_i - \bigcup_{j \in I} \overline{W_{ij}}$ è un aperto di \mathbb{R}^n e $U = \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ ricopre M . Su U le g_i s'incollano, definendo un'unica mappa $g : U \rightarrow g(U) \subseteq N_M$ liscia, che è un'inversa di $f|_U^U$, con $V = g(U) = \bigcup_{i \in I} g_i(\tilde{U}_i)$ un aperto di N_M contenente M . \square

Abbiamo infine ottenuto la

Proposizione 2.3.4. *Esiste un aperto U di \mathbb{R}^n contenente M e una mappa liscia $r : U \rightarrow M$ che è allo stesso tempo una retrazione e una sommersione.*

Dimostrazione. Basta scegliere r la composizione

$$U \xrightarrow{f^{-1}} V \xrightarrow{\tau} M$$

\square

Osservazione 2.3.5. Definiamo $\rho : M \rightarrow (0, \infty)$ $\rho(p) = \sup\{\varepsilon > 0 : D^n(p, \varepsilon) \subseteq U\}$. ρ è una funzione continua perchè se $p \in M$, per ogni $q \in M$ con $|p - q| < \rho(p)$ si ha $\rho(q) \geq \rho(p) - |p - q|$, ossia

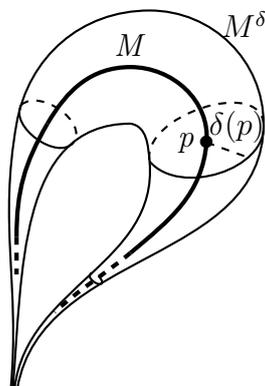
$$\rho(p) - \rho(q) \leq |p - q|.$$

D'altra parte la precedente disuguaglianza è ovvia se $|p - q| \geq \rho(p)$. Vale quindi per ogni $q \in M$. Scambiando poi i ruoli di p e q ottiamo che per ogni $p, q \in M$

$$|\rho(p) - \rho(q)| \leq |p - q|.$$

Questo prova la continuità di ρ .

Chiamiamo $M^\rho = \bigcup_{p \in M} D^n(p, \rho(p))$. Chiaramente $M^\rho \subseteq U$, inoltre da 2.2.6 esiste una funzione liscia $\delta : M \rightarrow (0, \infty)$ tale che $0 < \delta(p) < \rho(p)$ per ogni $p \in M$. È infatti sufficiente prendere δ soddisfacente $|\rho(p)/2 - \delta(p)| < \rho(p)/2$ per ogni $p \in M$. In particolare valgono le inclusioni $M^\delta \subseteq M^\rho \subseteq U$.

Figura 2.1. Intorno di raggio δ .

2.4 Omotopia

Supponiamo che M, N siano due varietà con $\partial N = \emptyset$. Indichiamo con $I = [0, 1]$.

In generale, se M ha bordo, $M \times I$ non è una varietà con le nostre definizioni, potendo avere degli angoli. Si pensi ad esempio al quadrato $I \times I$. Volendo includere tali oggetti nella teoria è sufficiente prendere come modello aperti di $\mathbb{R}^m = \{x \in \mathbb{R}^m | x_j \geq 0, \dots, x_n \geq 0, j \geq 1\}$, piuttosto che di \mathbb{R}^m o \mathbb{H}^m . Tuttavia, non volendo effettivamente parlare di angoli ma semplicemente del prodotto $M \times I$, ci limitiamo a tale osservazione.

Definizione. Siano $f, g : M \rightarrow N$ continue. Diremo che $F : M \times I \rightarrow N$ è un'omotopia fra f e g se F è continua, $F(p, 0) = f(p)$ e $F(p, 1) = g(p)$ per ogni $p \in M$. In tal caso f e g si dicono **omotope** e si scrive $f \simeq^F g$. Se F può scegliersi C^∞ , f e g si dicono C^∞ -omotope e si scrive $f \simeq_{C^\infty}^F g$.

Lemma 2.4.1. *La relazione di omotopia (rispettivamente di omotopia C^∞) è una relazione di equivalenza su $C^0(M, N)$ (rispettivamente su $C^\infty(M, N)$).*

Dimostrazione. Proviamo la transitività nel caso C^∞ , il resto è semplice.

Siano $f \simeq_{C^\infty}^F g$ e $g \simeq_{C^\infty}^G h$. Scegliamo $\varphi : I \rightarrow I$ C^∞ identicamente nulla per $t \leq 1/3$ e identicamente uguale a 1 per $t \geq 2/3$ (si veda 2.2.4). Allora

$$H : M \times I \rightarrow N \quad H(p, t) = \begin{cases} F(p, \varphi(2t)) & \text{se } |t| \leq 1/2, \\ G(p, \varphi(1 - 2t)) & \text{se } |t| \geq 1/2, \end{cases} \quad \text{è un'omotopia}$$

C^∞ fra f e h . □

Corollario 2.4.2. *Se M è connessa, M è connessa per archi C^∞ .*

Dimostrazione. Introduciamo su M la relazione seguente: $p \sim q$ se esiste un arco C^∞ in M da p a q . L'argomento nella precedente dimostrazione prova che \sim è di equivalenza su M . Inoltre usando le carte locali è chiaro che ciascuna classe è aperta in M ed essendo M connessa non può che esservi un'unica classe. \square

Proposizione 2.4.3. *Sia $Z \subseteq M$ un sottoinsieme chiuso e $g : M \rightarrow N$ una mappa continua e C^∞ su Z . Esiste un'omotopia $G : M \times I \rightarrow N$ tale che:*

- (i) $G(\cdot, 0) = g$;
- (ii) $f = G(\cdot, 1)$ è C^∞ ;
- (iii) $G(p, t) = g(p)$ per ogni $(p, t) \in Z \times I$.

Dimostrazione. Possiamo assumere che N sia una sottovarietà di \mathbb{R}^k per qualche k . Siano U, r e N^δ come nel paragrafo precedente. Da 2.2.6 esiste $\tilde{f} : M \rightarrow N^\delta \subseteq U$ C^∞ coincidente con g su Z .

$$G(p, t) = r(tg(p) + (1-t)\tilde{f}(p))$$

è l'omotopia cercata (fra g e $f = r \circ \tilde{f}$). \square

Proposizione 2.4.4. *Siano $f, g : M \rightarrow N$ C^∞ . Se $f \simeq g$, allora $f \simeq_{C^\infty} g$.*

Dimostrazione. Sia F omotopia fra f e g . Scegliamo $\varphi : I \rightarrow I$ liscia identicamente nulla per $t \leq 1/3$ e identicamente uguale a 1 per $t \geq 2/3$. Sia

$$H : M \times \mathbb{R} \rightarrow N \quad H(p, t) = \begin{cases} F(p, 0) & \text{se } t \leq 0, \\ F(p, \varphi(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ F(p, 1) & \text{se } t \geq 1; \end{cases} \quad H \text{ è liscia in un}$$

intorno di $M \times 0 \cup M \times 1$, chiuso di $M \times \mathbb{R}$. Osservando che $M \times \mathbb{R}$ è una varietà, la tesi segue dalla proposizione precedente. \square

Le ultime due proposizioni stabiliscono in definitiva l'equivalenza fra la teoria dell'omotopia e la teoria dell'omotopia C^∞ nel caso di varietà.

Esempio 2.4.5. Sia $n \geq 2$, vediamo che $\pi_1(S^n) = 0$.

Sia $\alpha : I \rightarrow S^n$ continua con $\alpha(0) = \alpha(1) = N$ il polo nord. Sia poi $\varphi : I \rightarrow I$ una funzione liscia, uguale a 0 per $t \leq 1/3$ e a 1 per $t \geq 2/3$. Siccome $\alpha \simeq \alpha\varphi$, esiste $\tilde{\alpha}$ liscia e omotopa ad α tramite un'omotopia costante su $0 \times I$ e $1 \times I$. Per 2.1.2, $\tilde{\alpha}$ non può essere surgettiva ed essendo $S^n - \{\text{pto}\} \approx \mathbb{R}^n$, $\tilde{\alpha}$ è omotopa a una curva costante.

2.5 Trasversalità

Esattamente come nella sezione precedente mappe continue sono state approssimate con mappe lisce, in questa mappe lisce verranno approssimate con mappe trasverse a un fissata sottovarietà della varietà d'arrivo.

A tal proposito, siano M e N varietà con $\partial N = \emptyset$ e $A \subseteq N$ una sottovarietà con $\partial A = \emptyset$.

Teorema 2.5.1. *Sia S una varietà priva di bordo e $F : M \times S \rightarrow N$ C^∞ . Supponiamo che entrambe F e $F|_{\partial(M \times S)} \pitchfork A$. Posto per ogni $s \in S$ $f_s = F(\cdot, s)$, esiste $s \in S$ tale che f_s e $f_s|_{\partial M} \pitchfork A$.*

Dimostrazione. Detta $Z = F^{-1}(A) \subseteq M \times S$, Z è una sottovarietà neat di $M \times S$. Sia $\pi : M \times S \rightarrow S$ la proiezione sul secondo fattore. Per 2.1.2, è sufficiente provare che se $s \in S$ è un valore regolare per $\pi|_Z$ allora $f_s \pitchfork A$ e se $s \in S$ è un valore regolare per $\pi|_{\partial Z}$ allora $f_s|_{\partial M} \pitchfork A$.

Siano allora $s \in S$ regolare per $\pi|_Z$ e $q = f_s(p) \in A$. Essendo $F \pitchfork A$

$$T_{(p,s)}F(M_p \times S_s) + A_q = N_q,$$

ossia per ogni $v \in N_q$, esiste $(w, e) \in M_p \times S_s$ tale che $T_{(p,s)}F(w, e) - v \in A_q$. Essendo poi s un valore regolare per $\pi|_Z$

$$T_{(p,s)}\pi(Z_{(p,s)}) = S_s,$$

pertanto esiste in $Z_{(p,s)}$ un elemento della forma (u, e) e necessariamente $T_{(p,s)}F((u, e)) \in A_q$. Allora

$$\begin{aligned} T_p f_s(w - u) - v &= T_{(p,s)}F((w, e) - (u, e)) - v = \\ &= (T_{(p,s)}F(w, e) - v) - T_{(p,s)}F(u, e) \in A_q, \end{aligned}$$

equivalentemente $f_s \pitchfork A$.

Infine, essendo $\partial Z = \partial M \cap Z$, sostituendo nel precedente argomento M con ∂M si ottiene che $f_s|_{\partial M} \pitchfork A$ se $s \in S$ è un valore regolare per $\pi|_{\partial Z}$. \square

Lemma 2.5.2. *Se $f : M \rightarrow N$ è una mappa liscia, esiste una palla aperta S di \mathbb{R}^k per qualche k , e una mappa liscia $F : M \times S \rightarrow N$ tale che $F(\cdot, 0) = f$ e $F(p, \cdot)$ sia una sommersione.*

In particolare entrambe F e $F|_{\partial(M \times S)}$ risultano sommersioni.

Dimostrazione. Per 2.3.1 possiamo assumere che N sia una sottovarietà di \mathbb{R}^k per qualche k . Siano U, r e N^δ come sopra. Allora possiamo scegliere $S = D^k(1)$ e

$$F(p, s) = r(f(p) + \delta(f(p))s).$$

\square

Teorema 2.5.3. *Per ogni mappa liscia $f : M \rightarrow N$, esiste una mappa $h : M \rightarrow N$ C^∞ -omotopa a f , tale che h e $h|_{\partial M} \pitchfork A$.*

Dimostrazione. Se S e F sono come nel lemma, per 2.5.1 esiste $s \in S$ con f_s e $f_s|_{\partial M} \pitchfork A$. È poi chiaro che $f_s \simeq_{C^\infty} f$. \square

Avremo bisogno di un risultato leggermente più forte di 2.5.3. Cominciamo dalla

Definizione. Se $f : M \rightarrow N$ è liscia e $C \subseteq M$ è un sottoinsieme di M , diremo che f è **trasversa ad A su C** , e scriveremo $f \pitchfork_C A$, se la condizione

$$T_p f(M_p) + A_q = N_q \quad (q = f(p))$$

vale per ogni $p \in f^{-1}(A) \cap C$.

Lemma 2.5.4. *Se $f \pitchfork_C A$, $f|_{\partial M} \pitchfork_{\partial M \cap C} A$ e A è chiusa in N , allora esiste un aperto W di M contenente C tale che $f \pitchfork_W A$ e $f|_{\partial M} \pitchfork_{W \cap \partial M} A$.*

Dimostrazione. Sia $p \in C$. Se $f(p) \notin A$, p appartiene all'aperto $M - f^{-1}(A)$ su cui f e $f|_{\partial M}$ sono trasverse a A . Se invece $f(p) \in A$ e $p \in \partial M \cap C$, scegliendo un intorno V di $f(p)$ in N e una sommersione $\sigma : V \rightarrow \mathbb{R}^l$ ($l = \text{codim}_N A$) tale che $V \cap A = \sigma^{-1}(0)$, la composizione $\sigma \circ (f|_{f^{-1}(V) \cap \partial M})$ ha rango massimo in p e pertanto esiste un intorno U_p di p in M con $f \pitchfork_{U_p} A$ e $f|_{\partial M} \pitchfork_{U_p \cap \partial M} A$. Infine lo stesso argomento prova che se $p \in C - \partial M$ e $f(p) \in A$ esiste un intorno di p in $M - \partial M$ su cui f è trasversa a A . \square

Lemma 2.5.5. *Uno spazio topologico X di Hausdorff e paracompatto è normale, ossia per ogni coppia di chiusi C_1, C_2 disgiunti esistono due aperti disgiunti contenenti rispettivamente C_1 e C_2 .*

Dimostrazione. Cominciamo provando che X è uno spazio regolare, ossia per ogni coppia costituita da un punto x di X e un chiuso C di X non contenente x , esistono due aperti di X disgiunti contenenti rispettivamente x e C .

Ogni punto $c \in C$ possiede un intorno aperto U_c con $x \notin \bar{U}_c$. Sia \mathcal{C} un raffinamento aperto e localmente finito del ricoprimento aperto di X formato dagli U_c e da $X - C$. Sia poi \mathcal{D} il sottoinsieme di \mathcal{C} formato da quegli aperti che intersecano C . Gli elementi di \mathcal{D} ricoprono C e x non appartiene alla chiusura di nessuno di essi. Sia $V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$, allora V è un aperto contenente C ed essendo \mathcal{D} localmente finito $\bar{V} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \bar{D}$ non contiene x .

La prova del fatto che X è normale procede similmente, sostituendo la condizione Hausdorff con la regolarità. \square

Lemma 2.5.6. *Siano C un chiuso e W un aperto di M con $C \subseteq W \subseteq M$. Esiste $\mu : M \rightarrow [0, 1]$ C^∞ identicamente 0 in un intorno di C e identicamente 1 sul chiuso $M - W$.*

Dimostrazione. Possiamo scegliere A_1 e A_2 due aperti disgiunti di M tali che $C \subseteq A_1$ e $M - W \subseteq A_2$. Se $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\{A_1, A_2, A_3 = M - C\}$, possiamo prendere $\mu = \lambda_2$. \square

Teorema 2.5.7. *Supponiamo che A sia chiusa in N e $C \subseteq M$ sia un sottoinsieme chiuso di M .*

Sia poi $f : M \rightarrow N$ C^∞ con $f \pitchfork_C A$ e $f|_{\partial M} \pitchfork_{C \cap \partial M} A$. Allora esiste una mappa liscia $h : M \rightarrow N$ C^∞ -omotopa a f tale che $h \pitchfork A$, $h|_{\partial M} \pitchfork A$ e $h = f$ in un intorno di C .

Dimostrazione. Siano W un intorno di C in M con $f \pitchfork_W A$ e $f|_{\partial M} \pitchfork_{W \cap \partial M} A$ e μ come nel lemma. Assumiamo che N sia una sottovarietà di \mathbb{R}^k . Siano U, r, N^δ come al solito e $S = D^k(1)$. Modifichiamo la mappa F usata in 2.5.3, considerando

$$G : M \times S \rightarrow N \quad G(p, s) = F(p, \eta(p)s),$$

con $\eta = \mu^2$.

Asseriamo che G e $G|_{\partial(M \times S)} \pitchfork A$; in tal caso la tesi segue da 2.5.1.

Sia $(p, s) \in G^{-1}(A)$: se $\eta(p) \neq 0$, G è una sommersione in (p, s) essendolo $G(p, \cdot)$; se $\eta(p) = 0$ allora $T_p \eta = 2\mu(p)T_p \mu = 0$ e per ogni $(w, e) \in M_p \times S_s$ si ha

$$T_{(p,s)}G(w, e) = T_{(p,0)}F(w, T_p \eta(w)s + \eta(p)e) = T_{(p,0)}F(w, 0) = T_p f(w).$$

Siccome $\eta(p) = 0$ implica $p \in W$ e f è trasversa a A su W , ne segue che $G \pitchfork A$.

Lo stesso argomento prova che $G|_{\partial(M \times S)} \pitchfork A$. \square

Siccome ∂M è sempre chiuso in M abbiamo il seguente

Corollario 2.5.8. *Sia A chiusa in N .*

Se $F : M \rightarrow N$ è liscia e $f = F|_{\partial M} \pitchfork A$, allora esiste $\tilde{F} : M \rightarrow N$ C^∞ tale che $\tilde{F}|_{\partial M} = f$ e $\tilde{F} \pitchfork A$.

2.6 Applicazione: il teorema di Brouwer

Concludiamo il capitolo con una notevole applicazione della teoria sviluppata: il teorema di punto fisso di Brouwer.

La dimostrazione che presentiamo è dovuta a Morris Hirsch.

Si ha la seguente classificazione delle varietà 1-dimensionali:

Proposizione 2.6.1. *Ogni varietà 1-dimensionale compatta e connessa è diffeomorfa a $[0, 1]$ o S^1 .*

Dimostrazione. Si veda [3] pagine 55-57. □

Indichiamo con D^n il disco chiuso $\overline{D^n(1)}$.

Lemma 2.6.2. *Non esistono retrazioni $r : D^n \rightarrow \partial D^n$ (i.e. non esistono mappe continue $D^n \rightarrow \partial D^n$ che siano l'identità su ∂D^n).*

Dimostrazione. Supponiamo esista una retrazione $r : D^n \rightarrow \partial D^n$. A meno di considerare

$$\tilde{r} : D^n \rightarrow \partial D^n \quad \tilde{r}(x) = \begin{cases} r(x/|x|) & \text{se } 1/2 \leq |x| \leq 1, \\ r(2x) & \text{se } 0 \leq |x| \leq 1/2; \end{cases}$$

possiamo assumere che r sia C^∞ in un intorno di ∂D^n in D^n .

Inoltre scegliendo una $1/2$ -approssimazione liscia g di r coincidente con r su ∂D^n , $0 \notin g(D^n)$ quindi $g(x)/|g(x)|$ risulta una retrazione liscia $D^n \rightarrow \partial D^n$. Pertanto non è restrittivo supporre da principio che r sia C^∞ .

Sia $y \in \partial D^n$ un valore regolare per r e $Z = r^{-1}(y) \subseteq D^n$. Z è una 1-varietà compatta, in particolare ha finite componenti connesse ciascuna delle quali deve essere un arco o un cerchio. Ne segue che ∂Z è costituito da finiti punti in numero pari. Tuttavia $\partial Z = \partial D^n \cap Z$ e r ristretta a ∂D^n è l'identità. Questa è una contraddizione. □

Teorema 2.6.3. *Ogni applicazione continua $g : D^n \rightarrow D^n$ ha almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Se fosse $g(x) \neq x$ per ogni $x \in D^n$ potremmo definire la retrazione $r : D^n \rightarrow \partial D^n$ $r(x) = x + tu(x)$ con $u(x) = \frac{x - g(x)}{|x - g(x)|}$ e $t = -\langle x, u(x) \rangle + \sqrt{\langle x, u(x) \rangle^2 - |x|^2 + 1}$, ottenuta mandando x nel punto d'intersezione fra ∂D^n e la semiretta avente origine in x e rivolta nella direzione opposta a $g(x)$. □

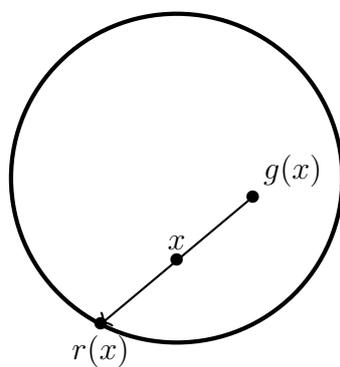


Figura 2.2. Dimostrazione del teorema di punto fisso di Brouwer.

Capitolo 3

Intersezioni orientate

Abbiamo ora i requisiti necessari per sviluppare un'importante strumento della topologia: il grado di una mappa. Introdurremo, in realtà, un concetto geometrico più generale, quale il numero d'intersezione di una data mappa con una sottovarietà della varietà d'arrivo. Si tratta di invarianti omotopici il cui calcolo risulta generalmente agevole e che pertanto forniscono un criterio utile per distinguere diverse classi di omotopia.

3.1 Orientazione

Per capire cosa si intenda per varietà orientata cominciamo dicendo cosa sia uno spazio vettoriale orientato.

Sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale, $0 < \dim V = n < \infty$. Due basi (e_1, \dots, e_n) e (f_1, \dots, f_n) si dicono equivalenti se l'unico automorfismo A di V che mappa e_i in f_i per ogni i ha determinante positivo. Si tratta evidentemente di una relazione di equivalenza sull'insieme di tutte le possibili basi di V . Scriveremo $(e_1, \dots, e_n) =^A (f_1, \dots, f_n)$ se interessati a specificare A , altrimenti $[e_1, \dots, e_n] = [f_1, \dots, f_n]$.

Un'**orientazione** su V è la scelta di una classe $\omega = [e_1, \dots, e_n]$ detta positiva. Se $\dim V = 0$, un'orientazione su V è la scelta di uno fra ± 1 .

Se $L : (V, \omega) \rightarrow (W, \theta)$ è un'isomorfismo lineare fra spazi vettoriali orientati, diremo che L **preserva l'orientazione** se $L(\omega) = [L(e_1), \dots, L(e_n)] = \theta$.

Consideriamo ora una successione esatta di spazi vettoriali

$$0 \rightarrow E' \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E'' \rightarrow 0$$

con $\omega' = [h_1, \dots, h_n]$ e $\omega'' = [f_1, \dots, f_m]$ orientazioni su E' e E'' rispettivamente. $\omega = \omega'' \oplus \omega' = [g_1, \dots, g_m, \varphi(h_1), \dots, \varphi(h_n)]$ con $\psi(g_i) = f_i$ per $i = 1, \dots, m$ è un'orientazione su E .

Tale definizione è ben posta. Infatti chiaramente $(g_1, \dots, g_m, \varphi(h_1), \dots, \varphi(h_n))$ è una base per E , inoltre se $(h_1, \dots, h_n) =^{L'} (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n)$ e $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m \in E$ sono tali che $(f_1, \dots, f_m) =^{L''} (\psi(\tilde{g}_1), \dots, \psi(\tilde{g}_m))$ si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{\varphi} & E & \xrightarrow{\psi} & E'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow L' & & \downarrow L & & \downarrow L'' \\
 0 & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{\varphi} & E & \xrightarrow{\psi} & E'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

con $L(\varphi(h_i)) = \varphi(\tilde{h}_i)$ per $i = 1, \dots, n$ e $L(g_j) = \tilde{g}_j$ per $j = 1, \dots, m$. In particolare $\det(L) = \det(L') \cdot \det(L'') > 0$.

In effetti ogni coppia di $\omega, \omega', \omega''$ determina univocamente la terza in modo che valga $\omega = \omega'' \oplus \omega'$. Questo segue dall'esistenza di un complementare per ogni sottospazio di E .

A \mathbb{R}^m sarà sempre associata l'orientazione standard $\omega_m = [e_1, \dots, e_m]$.

Consideriamo invece M una generica varietà. Un'**orientazione** su TM è una famiglia $\{\omega_p\}_{p \in M}$ con ω_p un'orientazione su M_p , per cui esista un atlante Ψ su M , detto **orientato**, con la proprietà che per ogni $(\varphi, U) \in \Psi$ e $p \in U$, $T_p\varphi : (M_p, \omega_p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \omega_m)$ preservi l'orientazione.

Si dice **orientabile** se TM ammette un'orientazione.

Lemma 3.1.1. *Se M è connessa e orientabile, esistono esattamente due orientazioni su M .*

Dimostrazione. Proveremo che l'insieme dei punti in cui due orientazioni coincidono e l'insieme in cui sono opposte sono aperti di M . Dall'ipotesi di connessione, ne seguirà che due orientazioni su M sono identiche o identicamente opposte.

Sia $p \in M$ e scegliamo due carte (φ, U) e (ψ, V) in p preservanti rispettivamente la prima e la seconda orientazione. Se le due orientazioni coincidono in p , il determinante di $D(\psi(\varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}))(\varphi(p))$ è positivo. Ma allora deve esserlo in un intorno di $\varphi(p)$ e pertanto in un intorno di p le due orientazioni coincidono. Similmente possiamo ragionare nel caso in cui le due orientazioni in p sono opposte. \square

Esempio 3.1.2. Lo spazio proiettivo $\mathbb{R}P^m$ è orientabile se e soltanto se m è dispari o $m = 0$.

Con le notazioni dell'esempio 1.1.1, se $i < j$ e $x \in \varphi_i(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_j \neq 0\}$, si ha

$$\varphi_j \varphi_i^{-1}(x_1, \dots, x_m) = \left(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_i}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \frac{x_{i+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_m}{x_j} \right)$$

e

$$D(\varphi_j \varphi_i^{-1})(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_j} \mathbf{I}_i & \mathbf{0}_{i+1, j-i-1} & \begin{matrix} -\frac{x_1}{x_j^2} \\ \vdots \\ -\frac{x_i}{x_j^2} \\ -\frac{1}{x_j^2} \\ -\frac{x_{i+1}}{x_j^2} \end{matrix} & \mathbf{0}_{j, m-j} \\ \mathbf{0}_{m-i, i} & \frac{1}{x_j} \mathbf{I}_{j-i-1} & \begin{matrix} \vdots \\ -\frac{x_{j-1}}{x_j^2} \\ -\frac{x_{j+1}}{x_j^2} \end{matrix} & \\ \mathbf{0}_{m-j, j-i-1} & \mathbf{0}_{m-j, j-i-1} & \begin{matrix} \vdots \\ -\frac{x_m}{x_j^2} \end{matrix} & \frac{1}{x_j} \mathbf{I}_{m-j} \end{pmatrix},$$

avente determinante $\left(\frac{1}{x_j}\right)^i \left(\frac{1}{x_j}\right)^{m-j} (-1)^{j-i} \left(\frac{1}{x_j}\right)^2 \left(\frac{1}{x_j}\right)^{j-i-1} = (-1)^{j-i} \left(\frac{1}{x_j}\right)^{m+1}$, il cui segno non dipende da $x \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$ se e soltanto se m è dispari. Ne segue che per m dispari, un atlante orientato su $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ si ottiene componendo φ_i , $i = 1, 3, \dots$, con un riflessione di \mathbb{R}^m . Al contrario se $m > 0$ è pari $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ non può essere orientabile, altrimenti, per il lemma, ciascuna delle φ_i dovrebbe preservare o invertire in ogni punto l'orientazione.

Esempio 3.1.3. Al contrario $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ è sempre orientabile.

Con le notazioni di 1.1.2, se $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ e $z = x + iy$ si ha per $i < j$ e $(x, y) \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$

$$\det(D(\varphi_j \varphi_i^{-1})(x, y)) = \left| \det \left(\frac{\partial((\varphi_j \varphi_i^{-1})_k)(z)}{\partial z_l} \right)_{k,l} \right|^2 = \left| \frac{1}{z_j} \right|^{2m+2} > 0.$$

Esempio 3.1.4. Anche $\text{SO}(m, \mathbb{R})$ è orientabile per ogni m . Precisamente ogni $B \in \text{SO}(m, \mathbb{R})$ definisce un diffeomorfismo di $\text{SO}(m, \mathbb{R})$ in sè attraverso la moltiplicazione per B . Fissata una base $(e_1, \dots, e_{m(m-1)/2})$ positiva per lo spazio tangente nell'identità, una base positiva del tangente in $B \in \text{SO}(m, \mathbb{R})$ è $(Be_1, \dots, Be_{m(m-1)/2})$.

Se M ha bordo, un'orientazione su M induce un'orientazione su ∂M nella maniera che segue.

Per ogni $p \in \partial M$, $(\partial M)_p \subseteq M_p$ è un sottospazio vettoriale di codimensione 1, quindi esiste $v_p \in M_p - (\partial M)_p$. Se $(\varphi, U) \in \Psi$ è una carta locale in p , allora $T_p\varphi(v_p) \in \mathbb{R}^m - \partial\mathbb{H}^m$ e, a meno di sostituire v_p con $-v_p$, possiamo assumere sia in $\mathbb{H}^m - \partial\mathbb{H}^m$. Osserviamo che, in tal caso, per ogni altra carta $(\psi, V) \in \Psi$ in p , $T_p\psi(v_p) \in \mathbb{H}^m - \partial\mathbb{H}^m$. Infatti, detto $v = T_p\varphi(v_p)$,

$$T_p\psi(v_p) = D(\psi\varphi^{-1})(\varphi(p))(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi\varphi^{-1}(\varphi(p) + tv) - \psi(p)}{t} \in \mathbb{H}^m$$

essendo \mathbb{H}^m un chiuso di \mathbb{R}^m e $\psi(V \cap \varphi^{-1}(\mathbb{H}^m)) \subseteq \mathbb{H}^m$.

v_p si dice **entrante** in M nel punto p , $-v_p$ **uscende** in M nel punto p .

Usando la successione esatta

$$0 \longrightarrow v_p \longrightarrow M_p \longrightarrow (\partial M)_p \longrightarrow 0$$

definiamo un'orientazione su $(\partial M)_p$. Equivalentemente (e_1, \dots, e_{m-1}) è base positiva per $(\partial M)_p$ se e solo se $(e_1, \dots, e_{m-1}, v_p)$ lo è per M_p .

L'atlante $\Psi|\partial M$ è orientato concordemente con tale orientazione, in particolare tale definizione non dipende dalla scelta del vettore entrante v_p .

Infine supponiamo che $(M, \omega), (N, \theta)$ siano due varietà orientate, di cui al più una con bordo. Il loro prodotto è ancora una varietà orientata, con l'**orientazione prodotto**: per ogni $p \in M$ e $q \in N$, se (e_1, \dots, e_m) e (h_1, \dots, h_n) sono basi positive per M_p e N_q rispettivamente, $((e_1, 0), \dots, (e_m, 0), (0, h_1), \dots, (0, h_n))$ è una base positiva per $(M \times N)_{(p,q)} = M_p \times N_q$. In questo caso, come atlante orientato secondo tale convenzione possiamo prendere quello formato dalle carte ottenute come prodotto di una carta su M e una su N .

In particolare se $N = I$ e $\partial M = \emptyset$, denotando suggestivamente con $-M$ la varietà M con l'orientazione opposta, si ha

$$\partial(M \times I) = M \times 0 \cup (-M \times 1).$$

3.2 Numero d'intersezione

Siano W una varietà orientata di dimensione $m + n$, $N \subseteq W$ una sottovarietà chiusa e orientata di dimensione n e M una varietà compatta e orientata di dimensione m . Assumiamo che $\partial M = \partial N = \partial W = \emptyset$.

Sia $f : M \longrightarrow W$ una mappa C^∞ , $f \pitchfork N$. Allora $f^{-1}(N)$ è una varietà di dimensione 0 (quindi uno spazio discreto) e compatta, pertanto consta di

finiti punti. Se $p \in f^{-1}(N)$ diciamo che p è di **tipo positivo o negativo** per f , e scriviamo $\#_p(f, N; W) = \pm 1$, a seconda che la composizione

$$M_p \xrightarrow{T_p f} W_q \rightarrow W_q/N_q \quad (q = f(p))$$

preservi o meno l'orientazione (dove W_q/N_q è orientata usando la successione esatta $0 \rightarrow N_q \rightarrow W_q \rightarrow W_q/N_q \rightarrow 0$).

Nel caso in cui sia chiaro il codominio di f scriveremo semplicemente $\#_p(f, N)$ al posto di $\#_p(f, N; W)$.

Esplicitamente se $\omega = [e_1, \dots, e_m]$ è l'orientazione su M_p e $\theta = [h_1, \dots, h_n]$ è l'orientazione su N_q , $\#_p(f, N) = 1$ se e soltanto se $[T_p f(e_1), \dots, T_p f(e_m), h_1, \dots, h_n]$ è l'orientazione su W_q . Scriveremo anche

$$T_p f(M_p) \oplus N_q = \#_p(f, N) W_q.$$

Chiamiamo infine

$$\#(f, N; W) = \sum_{p \in f^{-1}(N)} \#_p(f, N)$$

il **numero d'intersezione** di (f, N) .

Teorema 3.2.1. *Sia $M = \partial P$, con P una varietà compatta e orientata, e $f : M \rightarrow W$ liscia, trasversa a N . Se f si estende a una mappa C^∞ $F : P \rightarrow W$, allora $\#(f, N) = 0$.*

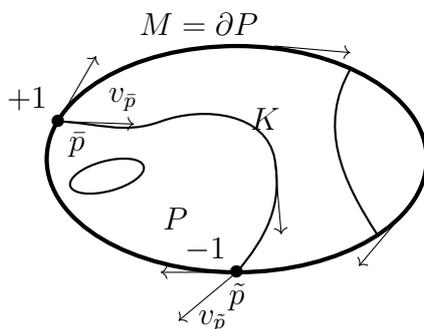
Dimostrazione. Per 2.5.8 possiamo assumere $F \pitchfork N$. Allora $F^{-1}(N) \subseteq P$ è una sottovarietà neat di dimensione 1 e compatta. In quanto compatta ha finite componenti connesse, ciascuna delle quali è un arco o una circonferenza. In particolare se $\bar{p} \in f^{-1}(N) = F^{-1}(N) \cap M$, esiste un unico arco $K \subseteq F^{-1}(N)$ e un unico punto di M $\tilde{p} \neq \bar{p}$ tali che $\partial K = \{\bar{p}, \tilde{p}\}$. Inoltre lo spazio tangente a K in \bar{p} e in \tilde{p} non è contenuto nel tangente di M in tali punti.

Proveremo che $\#_{\bar{p}}(f, N) = -\#_{\tilde{p}}(f, N)$, sommando sui vari archi si otterrà così $\#(f, N) = 0$.

Essendo $F \pitchfork N$, per ogni $p \in K$, $T_p F$ induce un'isomorfismo di spazi vettoriali $\Phi_p : P_p/K_p \rightarrow W_q/N_q$ con $q = F(p)$, per mezzo del quale possiamo orientare P_p/K_p . Questo induce in definitiva un'orientazione su K .

Siano $v_{\bar{p}}$ e $v_{\tilde{p}}$ vettori positivi in K_p e $K_{\tilde{p}}$ rispettivamente. Se $v_{\bar{p}}$ è entrante in P , allora $v_{\tilde{p}}$ è uscente da P e viceversa. Ma \bar{p} è di tipo positivo per f se e soltanto se $v_{\bar{p}}$ è entrante in P e similmente per \tilde{p} , quindi in ogni caso $\#_{\bar{p}}(f, N) = -\#_{\tilde{p}}(f, N)$.

□


 Figura 3.1. Rappresentazione di $F^{-1}(N)$.

Corollario 3.2.2. *Siano $h, f : M \rightarrow W$, C^∞ -omotope, entrambe trasverse a N . Allora $\#(f, N) = \#(h, N)$.*

Dimostrazione. Sia F un'omotopia liscia fra f e h . Allora dal teorema precedente

$$0 = \#(F|_{\partial(M \times I)}, N) = \#(F|_{M \times 0}, N) + \#(F|_{-M \times 1}, N) = \#(f, N) - \#(h, N).$$

□

Questo permette di definire per ogni mappa $g : M \rightarrow W$ continua, $\#(g, N) = \#(f, N)$ con f una mappa liscia, trasversa a N e omotopa a g . Se $M \subseteq W$ è anch'essa una sottovarietà di W , porremmo $\#(M, N; W) = \#(i_M, N; W)$ con i_M l'inclusione di M in W . Infine se anche N è compatta, hanno senso entrambe le quantità $\#(M, N)$ e $\#(N, M)$ e scrivendo per ogni $p \in M \cap N$

$$\begin{aligned} \#_p(M, N)W_p &= \#_p(i_M, N)W_p = M_p \oplus N_p = (-1)^{m \cdot n} N_p \oplus M_p = \\ &= (-1)^{m \cdot n} \#_p(i_N, M)W_p = (-1)^{m \cdot n} \#_p(N, M)W_p, \end{aligned}$$

troviamo $\#(M, N) = (-1)^{m \cdot n} \#(N, M)$.

3.3 Teoria del grado

Risulta particolarmente interessante il caso in cui, nella situazione descritta nel precedente paragrafo, N si riduca a un punto di W e W venga assunta connessa.

Poniamoci allora nelle ipotesi in cui $g : M \rightarrow W$ sia una mappa continua fra varietà prive di bordo, della stessa dimensione m , con M compatta, W connessa ed entrambe orientate.

Per ogni $q \in W$, indicheremo con $\deg(g, q) = \#(g, q)$ il **grado di g in q** .

Lemma 3.3.1. *Sia $f : M \rightarrow W$ una mappa liscia e $q \in W$ un valore regolare per f . In particolare $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_n\}$ è un insieme finito, essendo discreto e compatto.*

Esiste un aperto V di W contenente q tale che $f^{-1}(V) = U_1 \cup \dots \cup U_n$ sia unione disgiunta di aperti di M , con la proprietà che f ristretta a U_i sia un diffeomorfismo su V e p_i appartenga a U_i per ogni i .

Dimostrazione. Essendo $q \in W$ un valore regolare per f , per ogni i esiste un intorno \tilde{U}_i di p_i in M tale che $f(\tilde{U}_i)$ sia un aperto in W e $f|_{\tilde{U}_i}^{f(\tilde{U}_i)}$ sia un diffeomorfismo. Tali intorni possono scegliersi a coppie disgiunti e, a meno di sostituire \tilde{U}_i con $\tilde{U}_i \cap f^{-1}(f(\tilde{U}_1) \cap \dots \cap f(\tilde{U}_n))$, possiamo assumere che $f(\tilde{U}_i) = \tilde{V}$ sia lo stesso per ogni i .

Siccome $M - (\tilde{U}_1 \cup \dots \cup \tilde{U}_n)$ è compatto, $V = \tilde{V} - f(M - (\tilde{U}_1 \cup \dots \cup \tilde{U}_n))$ è un aperto di W contenente q . Infine si ha

$$f^{-1}(V) \subseteq M - f^{-1}(f(M - (\tilde{U}_1 \cup \dots \cup \tilde{U}_n))) \subseteq \tilde{U}_1 \cup \dots \cup \tilde{U}_n,$$

quindi $f^{-1}(V) = U_1 \cup \dots \cup U_n$ con $U_i = \tilde{U}_i \cap f^{-1}(V)$ e per ogni i $f(U_i) = f(\tilde{U}_i) \cap V = V$. □

Teorema 3.3.2. *$\deg(g, q)$ non dipende dalla scelta di $q \in W$.*

Dimostrazione. Sia $\bar{q} \in W$ fissato. Scegliamo f una mappa liscia, omotopa a g e per la quale \bar{q} sia valore regolare. Dal lemma esiste un intorno V , che possiamo assumere connesso, di \bar{q} in W tale che $f^{-1}(V)$ sia unione disgiunta di finiti aperti U_i di M , ciascuno dei quali diffeomorfo a V tramite f . In particolare ogni U_i è connesso. Per 3.1.1, al variare di p in un fissato U_i , $T_p f$ o inverte sempre o preserva sempre l'orientazione. Ne segue che per ogni $q \in V$, $\deg(f, q) = \deg(g, q)$ è lo stesso e dalla connessione di W otteniamo la tesi. □

Indicheremo tale valore semplicemente con $\deg(g)$, e lo chiameremo **grado di g** .

Sottolineiamo ora un fatto evidente, ma che utilizzeremo nel seguito

Proposizione 3.3.3. *Se $M = \partial P$ con P compatta e orientata e $g : M \rightarrow W$ è una mappa continua che si estende a tutta P , allora $\deg(g) = 0$.*

Dimostrazione. Segue immediatamente da 2.4.3 e 3.2.1. \square

Per il calcolo del grado di una mappa è talvolta utile scomporre la mappa assegnata in una composizione di mappe e usare il seguente:

Lemma 3.3.4. *Supponiamo che M sia compatta, N compatta e connessa, W connessa, $\dim M = \dim N = \dim W$ e tutte prive di bordo.*

Se $M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} W$ sono continue, allora $\deg(fg) = \deg(f) \deg(g)$.

Dimostrazione. Possiamo assumere che f e g siano lisce. Sia quindi $q \in W$ un valore regolare per la composizione $f \circ g$. In particolare q è valore regolare per f e $g \pitchfork f^{-1}(q)$. Infatti per ogni $z \in f^{-1}(q)$ e $p \in g^{-1}(z)$ $T_p(fg) = T_z f \circ T_p g$ è surgettiva, quindi anche $T_z f$ lo è e $\text{rg}(T_p g) \geq \dim W = \dim N$, ossia anche $T_p g$ è surgettiva. Infine

$$\begin{aligned} \deg(fg) &= \sum_{p \in (fg)^{-1}(q)} \#_p(fg, q) = \sum_{z \in f^{-1}(q)} \sum_{p \in g^{-1}(z)} \#_p(fg, q) = \\ &= \sum_{z \in f^{-1}(q)} \sum_{p \in g^{-1}(z)} \#_p(g, z) \#_z(f, q) = \deg(g) \deg(f). \end{aligned}$$

\square

Vediamo ora qualche esempio.

Esempio 3.3.5. Orientiamo S^m come bordo di D^{m+1} . La mappa antipodale $A : S^n \rightarrow S^n$ ha grado $(-1)^{n+1}$. Infatti detta $r_i : S^n \rightarrow S^n$ la riflessione $r_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$ si ha $A = r_1 \circ \dots \circ r_{n+1}$ e $\deg(r_i) = -1$. Ne segue che se n è pari, A non è omotopa a 1_{S^n} . Al contrario se n è dispari $A \simeq 1_{S^n}$. Per vederlo identifichiamo S^{2k-1} con $\{z \in \mathbb{C}^k : |z|^2 = 1\}$, allora $F(z, t) = ze^{\pi it}$ è un'omotopia fra A e $1_{S^{2k-1}}$.

Esempio 3.3.6. Forniamo un'altra dimostrazione del fatto che $\mathbb{R}P^m$ non è orientabile se m è pari e diverso da 0.

Supponiamo per assurdo di avere orientato $\mathbb{R}P^m$. Siano $\pi : S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$ la proiezione e $A : S^m \rightarrow S^m$ la mappa antipodale. Si ha $\pi \circ A = \pi$, ed essendo $\deg(A) = -1$ se m pari, $\deg(\pi) = \deg(\pi \circ A) = \deg(\pi) \deg(A) = -\deg(\pi)$, ossia $\deg(\pi) = 0$. Questo è assurdo perchè π è un diffeomorfismo locale che, essendo S^m connessa, deve preservare in ogni punto o in nessuno l'orientazione, ossia dovrebbe aversi $\deg(\pi) = \pm 2$.

Esempio 3.3.7. Possiamo dare una prova alternativa del teorema di Brouwer.

Se $r : D^n \rightarrow \partial D^n$ è continua, $\deg(r|_{\partial D^n}) = 0$ per 3.3.3. Dunque $r|_{\partial D^n}$ non può essere l'identità, altrimenti avrebbe grado 1.

Esempio 3.3.8. Se M è una varietà compatta e orientata, M non può essere contrattile (a meno che non sia un punto).

In caso contrario M sarebbe anche connessa e 1_M sarebbe omotopa a una costante, mentre $\deg(1_M) = 1$ e il grado di una costante è 0.

In particolare S^n non è contrattile, sebbene $\pi_1(S^n) = 0$ per $n \geq 2$.

Osserviamo che il risultato è valido anche senza l'ipotesi di orientabilità su M . La prova procede esattamente come nel caso orientato, sostituendo la parola "grado" con "grado modulo 2". Non abbiamo trattato la teoria del grado modulo 2: è del tutto simile alla teoria del grado, ma più semplice. Per essa rimandiamo a [2], pagine 77 – 81.

Esempio 3.3.9. Diamo una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra usando la teoria del grado.

Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado $m > 0$. Assumiamo che p sia monico. Allora per ogni $t \in I$ $p(z, t) = tp(z) + (1-t)z^m = z^m + t(a_1z^{m-1} + \dots + a_m)$, in particolare esiste $r > 0$ tale per ogni z con $|z| = r$ e per ogni $t \in I$ valga $p(z, t) \neq 0$.

È ben definita l'omotopia C^∞

$$F : \partial D^2(r) \times I \rightarrow S^1 \quad F(z, t) = \frac{p(z, t)}{|p(z, t)|}.$$

Ne segue che $\deg(F(\cdot, 1)) = \deg(F(\cdot, 0)) = m > 0$, dunque non possiamo estendere $F(\cdot, 1)$ a una mappa continua su tutto $D^2(r)$. In definitiva $p(z)$ deve avere uno zero in tale palla.

Ci sono tantissime altre applicazioni della teoria del grado. Per esse si rimanda a [1], [2] e [3].

Capitolo 4

Il teorema di Poincaré-Hopf

Studieremo ora i campi di vettori su una varietà compatta usando la teoria del grado e il numero di intersezione.

L'obiettivo ultimo è quello di dare una prova intrinseca del teorema di Poincaré-Hopf, il quale lega la somma degli indici di un campo vettori nei suoi zeri alla caratteristica di Eulero della varietà.

Nel capitolo M sarà una varietà compatta, orientata di dimensione m con $\partial M = \emptyset$.

Identificheremo inoltre M con la sezione zero $Z(M) \subseteq TM$.

4.1 Campi di vettori e caratteristica di Eulero

Definizione. Un campo di vettori su M è una mappa continua $V : M \rightarrow TM$ con la proprietà che $V(p) \in M_p$ per ogni $p \in M$ (i.e V è una sezione continua della proiezione $\pi : TM \rightarrow M$).

Lemma 4.1.1. *Esiste una collezione finita $\{V_i\}_{i=1,\dots,n}$ di campi di vettori C^∞ su M tali che per ogni $p \in M$ si abbia $\text{Span}(V_1(p), \dots, V_n(p)) = M_p$.*

Dimostrazione. Scegliamo un atlante adeguato e finito $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1,\dots,k}$ su M e $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ una mappa C^∞ nulla fuori da $D^m(1)$ e non nulla in $D^m(1)$. Per ogni $i = 1, \dots, k$ definiamo $\lambda_i : U_i \rightarrow [0, 1]$ $\lambda_i(p) = \lambda(\varphi_i(p))$.

I campi di vettori

$$V_{i,j} : M \rightarrow TM \quad V_{i,j}(p) = \begin{cases} \lambda_i(p)(T_p\varphi_i)^{-1}(\varphi_i(p), e_j) & \text{se } p \in U_i, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

risolvono. □

Proposizione 4.1.2. *Esiste un campo di vettori C^∞ su M trasverso a $M \subseteq TM$.*

Dimostrazione. Sia $\{V_i\}_{i=1,\dots,n}$ una collezione finita di campi di vettori C^∞ come nel lemma. Consideriamo $F : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ $F(p, s) = \sum_{i=1}^n s_i V_i(p)$. F è una sommersione, quindi da 2.5.1 esiste $s \in \mathbb{R}^n$ tale che $V = F(\cdot, s)$ sia un campo di vettori trasverso a M . \square

Definizione. Si chiama **caratteristica di Eulero** di M la quantità $\chi(M) = \#(M, M; TM)$.

Se V è un campo vettori su M , V è omotopo all'inclusione $i_M : M \rightarrow TM$ tramite $F(p, t) = tV(p)$, quindi comunque scelto V trasverso a M possiamo calcolare $\chi(M)$ usando V .

Osservazione 4.1.3. Dalla definizione $\chi(M)$ non dipende dalla particolare orientazione su M . Infatti M è unione (finita) delle sue componenti connesse M_1, \dots, M_n (ciascuna aperta e chiusa in M , in particolare una varietà compatta e orientabile). Per ogni $i = 1, \dots, n$ $\chi(\pm M_i) = \chi(M_i)$ e $\chi(M) = \chi(M_1) + \dots + \chi(M_n)$.

È allora chiaro che non dipende neppure dalla classe di diffeomorfismo di M .

Osservazione 4.1.4. Se m è dispari,

$$\chi(M) = \#(M, M; TM) = (-1)^{m^2} \#(M, M; TM) = -\chi(M),$$

quindi $\chi(M) = 0$.

4.2 Indice di un campo di vettori

Sia $V : M \rightarrow TM$ un campo di vettori C^∞ trasverso a M . Essendo M compatta V ha finiti zeri: p_1, \dots, p_n . La quantità $\#_{p_i}(V, M)$, viene detta **indice di V in p_i** , e si indica anche con $\text{ind}_{p_i} V$.

Dalle definizioni abbiamo subito che

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^n \text{ind}_{p_i} V. \quad (4.1)$$

Osserviamo che se (φ, U) è una carta su M in p preservante l'orientazione, con $p \in \{p_1, \dots, p_n\}$ e $U \cap \{p_1, \dots, p_n\} = \{p\}$, chiamando V_φ la composizione

$$\varphi(U) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{V} TU \xrightarrow{T\varphi} \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{pr_{\mathbb{R}^m}} \mathbb{R}^m$$

si ha $\text{ind}_p V = \pm 1$ a seconda che V_φ preservi o inverta l'orientazione in p .

L'obiettivo è ora quello di generalizzare, partendo dalla precedente osservazione, la definizione di indice anche al caso in cui V non sia trasverso a M , in modo che valga comunque (4.1).

Lemma 4.2.1. *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^m$ un disco (indifferentemente aperto o chiuso) contenente 0 e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ una mappa liscia con $f(0) = 0$. Allora esistono $g_1, \dots, g_m \in C^\infty$ tali che $f(x) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x)$ per ogni $x \in D$ e $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ per $i = 1, \dots, m$.*

Dimostrazione.

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt = \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$$

□

Introduciamo ora una nozione che sarà utile nel seguito:

Definizione. Un'omotopia liscia che risulti per ogni tempo fissato un'immersione topologica si dice **isotopia**.

Proposizione 4.2.2. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto e D un disco chiuso contenuto in U centrato in x . Sia poi $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una mappa C^∞ (che pensiamo come un campo di vettori su U). Supponiamo che 0 sia un valore regolare per f e che $D \cap f^{-1}(0) = \{x\}$. Allora posto*

$$g_f : \partial D \rightarrow S^{m-1} \quad g_f(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|},$$

si ha $\text{ind}_0 f = \text{deg}(g_f)$.

Dimostrazione. Chiaramente possiamo assumere $x = 0$. Consideriamo

$$F : D \times I \rightarrow \mathbb{R}^m \quad F(x, t) = \begin{cases} f(tx)/t & \text{se } t \neq 0, \\ Df(0)x & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Scrivendo $f(x) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x)$ per ogni $x \in D$ con g_1, \dots, g_m come sopra, si vede che F è liscia, dunque f è C^∞ -omotopa a $Df(0)$ su D .

Chiaramente $\text{ind}_0 f = \text{ind}_0 Df(0)$. Inoltre $F^{-1}(0) = 0 \times I$, quindi F induce un'omotopia liscia fra g_f e $g_{Df(0)}$, da cui $\text{deg}(g_f) = \text{deg}(g_{Df(0)})$.

È pertanto sufficiente provare che $\text{ind}_0 Df(0) = \text{deg}(g_{Df(0)})$. Tuttavia $Df(0) \in$

$GL(m; \mathbb{R})$ e $GL(m; \mathbb{R})$ ha esattamente due componenti connesse, precisamente $GL(m; \mathbb{R})^\pm$, le quali per 2.4.2 sono connesse per archi C^∞ . Ne segue che $Df(0)$ è C^∞ -omotopa in $GL(m, \mathbb{R})$ a una fra l'identità I e la riflessione $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, a seconda che $Df(0)$ preservi o meno l'orientazione. Inoltre tale omotopia ne induce una delle rispettive g . È pertanto sufficiente provare il lemma nel caso in cui f sia una fra I e $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Ma allora la tesi è ovvia. \square

Dunque se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua, con U aperto di \mathbb{R}^m , chiameremo **indice di f in uno zero isolato** $x \in U$ il grado della mappa $g_f : \partial D \rightarrow S^{m-1}$ definita nel lemma.

Il lemma 3.3.3 assicura l'indipendenza dal particolare disco chiuso scelto.

Usando le carti locali vorremo estendere tale definizione a un generico campo di vettori su una varietà. I seguenti due lemmi sono in questa direzione.

Lemma 4.2.3. *Sia U un aperto di \mathbb{R}^m contenente 0 e $\varphi : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'isotopia con $\varphi_t(0) = 0$ per ogni $t \in I$.*

Allora esiste un disco chiuso D di centro 0 contenuto nell'intersezione $\bigcap_{t \in I} \varphi_t(U)$.

Dimostrazione. Scegliamo una funzione $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ liscia e tale che $\lambda(t) = 0$ se $t \leq 0$, $\lambda(t) = 1$ se $t \geq 1$, $\lambda(t) \in (0, 1)$ per $t \in (0, 1)$.

Per il teorema della funzione inversa

$$\Phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \quad \Phi(x, t) = (\varphi(x, \lambda(t)), t)$$

è una mappa aperta. Quindi

$$\Phi(U \times \mathbb{R}) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\varphi_{\lambda(t)}(U) \times t)$$

è un aperto di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ contenente $0 \times \mathbb{R}$.

Per 2.3.5 esiste $\delta : (0 \times \mathbb{R}) \rightarrow (0, \infty)$ continua tale che $(0 \times \mathbb{R})^\delta \subseteq \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\varphi_{\lambda(t)}(U) \times t)$. Detto $\bar{\delta} > 0$ il minimo di δ ristretta a $0 \times I$, il disco chiuso di centro 0 e raggio $\bar{\delta}/2$ è contenuto nell'intersezione $\bigcap_{t \in I} \varphi_t(U)$. \square

Lemma 4.2.4. *Sia $h : U \rightarrow V$ un diffeomorfismo fra aperti di \mathbb{R}^m e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua (che consideriamo come un campo vettori su U). Sia $f_h : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ il campo vettori corrispondente a f tramite h (esplicitamente $f_h(y) = Dh(y) \circ f \circ h^{-1}(y)$). Allora se f ha uno zero isolato in $x \in U$, f_h ha uno zero isolato in $h(x) \in V$ e $\text{ind}_x f = \text{ind}_{h(x)} f_h$.*

Dimostrazione. A meno di restringere U attorno a x possiamo assumere che U sia un disco aperto e a meno di traslazioni che $x = 0 \in U$ e $h(x) = 0 \in V$.

La prima asserzione è ovvia, proviamo quindi che $\text{ind}_0 f = \text{ind}_0 f_h$.
 Dalla prova di 4.2.2, segue che h è isotopa a un elemento O di $O(m; \mathbb{R})$ tramite un'isotopia φ_t tale che $\varphi_t(0) = 0$ per ogni $t \in I$. Inoltre dal lemma precedente esiste un disco chiuso $D \subseteq \bigcap_{t \in I} \varphi_t(U)$. Usiamo ∂D per il calcolo di $\text{ind}_0 f_h = \text{deg}(g_{f_h})$. Ma f_{φ_t} è una sequenza di campi di vettori su $\varphi_t(U)$ ciascuno mai nullo su $D - 0$, quindi $\text{ind}_0 f_h = \text{deg}(g_{f_h}) = \text{deg}(g_{f_O}) = \text{deg}(g_f) = \text{ind}_0 f$. \square

In definitiva possiamo dare la seguente

Definizione. Sia $V : M \rightarrow TM$ un campo di vettori (continuo) e $p \in M$ uno zero isolato per V . Sia poi (φ, U) una carta in p , definiamo l'**indice di V in p** come $\text{ind}_p V = \text{ind}_{\varphi(p)} V_\varphi$.

Dai risultati precedenti questa definizione estende quella da cui siamo partiti.

4.3 Dimostrazione del teorema di Poincaré-Hopf

Enunciamo il celebrato teorema di Poincaré-Hopf:

Teorema 4.3.1. *Sia M una varietà priva di bordo, compatta e orientata e V un campo di vettori (continuo) su M con finiti zeri p_1, \dots, p_n . Allora*

$$\sum_{i=1}^n \text{ind}_{p_i} V = \chi(M).$$

In particolare tale somma non dipende dal campo vettori considerato.

La prova consiste in una serie di approssimazioni successive del campo V , fino ad ottenerne uno nuovo che sia C^∞ , trasverso a M e con la stessa somma di indici di V . Usando (4.1) avremo allora la tesi.

Nella dimostrazione faremo ripetutamente uso della funzione costruita in 2.2.4, cui ci riferiremo usando la notazione $\lambda_{a,b}$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Dimostrazione.

Passo 1. Costruiamo un atlante comodo su M nella maniera seguente.

Per ogni $i = 1, \dots, n$ scegliamo una carta (φ_i, U_i) in p_i (preservante l'orientazione) tale che $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^m$, $\varphi_i(p_i) = 0$ e con $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

Scegliamo poi un generico atlante Φ adeguato per $M - \bigcup_{j=1}^n \varphi_j^{-1}(\overline{D^m(1/2)})$ (aperto di M). L'insieme $\Phi \cup \{(\varphi_1, U_1), \dots, (\varphi_n, U_n)\}$ fornisce allora un atlante adeguato su M ed essendo M compatta, possiamo trovare $(\varphi_{n+1}, U_{n+1}), \dots, (\varphi_l, U_l) \in \Phi$ tali che $\{(\varphi_1, U_1), \dots, (\varphi_n, U_n), (\varphi_{n+1}, U_{n+1}), \dots, (\varphi_l, U_l)\}$ sia un

atlante adeguato su M e con l'ulteriore proprietà che per $i = 1, \dots, n$ $\varphi_i^{-1}(D^m(1/2)) \cap U_j \neq \emptyset$ se e soltanto se $j = i$.

Passo 2. Fissiamo, procedendo in ordine, $i = n + 1, \dots, l$ e poniamo

$$\delta_i : D^m(2) \longrightarrow (0, \infty) \quad \delta_i(x) = \left(\min_{x \in D^m(2)} |V_{\varphi_i}(x)| \right) \lambda_{1,2}(x)/2.$$

Scegliamo \tilde{V}_{φ_i} una δ_i -approssimazione di $V_{\varphi_i}|_{D^m(2)}$ che sia liscia e, se $i > n + 1$, coincidente con V_{φ_i} sul chiuso di $D^m(2)$

$$\varphi_i(\varphi_{n+1}^{-1}(\overline{D^m(1)}) \cup \dots \cup \varphi_{i-1}^{-1}(\overline{D^m(1)})) \cap D^m(2).$$

In questa maniera \tilde{V}_{φ_i} non ha zeri in $D^m(2)$ e si incolla in maniera continua con V_{φ_i} fuori da $D^m(2)$.

Modifichiamo infine V ponendolo uguale a $(T\varphi_i)^{-1}(\varphi_i(p), \tilde{V}_{\varphi_i}(\varphi_i(p)))$ su U_i . Al termine di tale processo abbiamo un nuovo campo di vettori, che chiamiamo ancora V , su M con zeri in p_1, \dots, p_n , C^∞ in $\bigcup_{j>n} \varphi_j^{-1}(D^m(1)) \supseteq M - \bigcup_{j \leq n} \varphi_j^{-1}(D^m(1))$ e coincidente con il campo di partenza nell'intorno $\bigcup_{j \leq n} \varphi_j^{-1}(\overline{D^m(1/2)})$ di $\{p_1, \dots, p_n\}$, quindi con stessa somma di indici.

Passo 3. Sia ora $i \in \{1, \dots, n\}$. Essendo $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^m - D^m(1)) \subseteq \bigcup_{j>n} \varphi_j^{-1}(D^m(1))$, si ha $\mathbb{R}^m - D^m(1) \subseteq \varphi_i(\bigcup_{j>n} \varphi_j^{-1}(D^m(1)))$. Dunque (ragionando come in 4.2.3) esiste $r_i \in \mathbb{R}$ tale che $0 < r_i < 1$ e $\mathbb{R}^m - D^m(r_i) \subseteq \varphi_i(\bigcup_{j>n} \varphi_j^{-1}(D^m(1)))$. Scegliamo $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ con $r_i < a_i < b_i < 1$ e sostituiamo V_{φ_i} con

$$(1 - \lambda_{a_i, b_i}(x))V_{\varphi_i}(x), \quad x \in \mathbb{R}^m$$

ottenendo così un nuovo campo di vettori su \mathbb{R}^m , che chiamiamo ancora V_{φ_i} , il quale è C^∞ e coincidente con il precedente su $\mathbb{R}^m - D^m(b_i)$. In particolare il grado della mappa

$$g_i : \partial D^m(1) \longrightarrow S^{m-1} \quad g_i(x) = \frac{V_{\varphi_i}(x)}{|V_{\varphi_i}(x)|}$$

è rimasto invariato.

A questo punto V_{φ_i} ha infiniti zeri, ma tutti in $\overline{D^m(a_i)}$. Pertanto sul compatto $\overline{D^m(1)} - D^m(b_i)$, $|V_{\varphi_i}(x)|$ ha minimo $m_i > 0$ e per il lemma di Sard esiste $v_i \in \mathbb{R}^m$ tale che $0 < |v_i| < m_i$ e $-v_i$ sia un valore regolare per V_{φ_i} .

Il campo di vettori

$$\tilde{V}_{\varphi_i} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \tilde{V}_{\varphi_i}(x) = V_{\varphi_i}(x) + \lambda_{b_i, 1}(x)v_i$$

è C^∞ , coincidente con V_{φ_i} fuori da $D^m(1)$, mai nullo fuori da $D^m(b_i) - \overline{D^m(a_i)}$ e trasverso a 0. Infatti, per la scelta di v_i , $\tilde{V}_{\varphi_i}(x) = 0$ solo se $x \in D^m(b_i) - \overline{D^m(a_i)}$ dove \tilde{V}_{φ_i} differisce da V_{φ_i} solamente per una costante. Ne segue che per $x \in D^m(b_i) - \overline{D^m(a_i)}$, $\tilde{V}_{\varphi_i}(x) = 0$ se e solo se $V_{\varphi_i}(x) = -v_i$ e $D\tilde{V}_{\varphi_i}(x) = DV_{\varphi_i}(x)$.

Passo 4. Provando che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ vale $\deg(g_i) = \sum \text{ind}_x \tilde{V}_{\varphi_i}$, avremmo che la somma degli indici del campo V è pari alla somma degli indici del campo ottenuto cambiando V su $U_1 \cup \dots \cup U_n$ con $(T\varphi_i)^{-1}(\varphi_i(p), \tilde{V}_{\varphi_i}(\varphi_i(p)))$ se $p \in U_i$. Quest'ultimo risulta essere C^∞ e trasverso alla sezione zero in TM , quindi da (4.1) la tesi.

Verifichiamo quindi che per ogni i

$$\deg(g_i) = \sum \text{ind}_x \tilde{V}_{\varphi_i}.$$

Essendo 0 un valore regolare per \tilde{V}_{φ_i} , $\tilde{V}_{\varphi_i}^{-1}(0) = \tilde{V}_{\varphi_i}^{-1}(0) \cap \overline{D^m(b_i)}$ è discreto e compatto, quindi finito. Siano $\{x_1^i, \dots, x_{k_i}^i\}$ gli zeri di \tilde{V}_{φ_i} . Per ciascun x_j^i scegliamo un disco chiuso D_j^i contenuto in $D^m(1)$ in modo che $D_j^i \cap D_s^i = \emptyset$ se $j \neq s$ e poniamo $D^i = \overline{D^m(1)} - \bigcup_{j=1}^{k_i} \overset{\circ}{D}_j^i$. La mappa

$$\tilde{g}_i : \partial D^i \longrightarrow S^{m-1} \quad \tilde{g}_i(x) = \frac{\tilde{V}_{\varphi_i}(x)}{|\tilde{V}_{\varphi_i}(x)|}$$

ha grado 0 estendendosi a tutto D^i quindi

$$0 = \deg(\tilde{g}_i) = \deg(g_i) - \sum \text{ind}_x \tilde{V}_{\varphi_i}.$$

□

Corollario 4.3.2. *Se M ammette un campo di vettori mai nullo allora $\chi(M) = 0$.*

4.4 Applicazione: non pettinabilità della sfera

Applichiamo al caso $M = S^m$ il risultato precedente.

Per il calcolo di $\chi(S^m)$ è sufficiente trovare un campo di vettori con finiti zeri su S^m .

Siano $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^m$ il polo nord e

$$\varphi_\pm : S^m - \{\pm N\} \longrightarrow R^m \quad \varphi_\pm(y) = \frac{1}{1 \mp y_{m+1}}(y_1, \dots, y_m)$$

le proiezioni stereografiche. $\{\varphi_+, \varphi_-\}$ costituisce un atlante orientato su S^m . Chiamiamo V l'unico campo di vettori su $S^m - \{N\}$ con $V_{\varphi_+} = 1_{\mathbb{R}^m}$. Allora se $y \in S^m - \{\pm N\}$ si ha

$$\begin{aligned}
 V_{\varphi_-}(\varphi_-(y)) &= D(\varphi_- \varphi_+^{-1})(\varphi_+(y))V_{\varphi_+}(\varphi_+(y)) = D(\varphi_- \varphi_+^{-1})(\varphi_+(y))\varphi_+(y) = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_- \varphi_+^{-1}(\varphi_+(y) + t\varphi_+(y)) - \varphi_-(y)}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\varphi_+(y) + t\varphi_+(y)}{|\varphi_+(y) + t\varphi_+(y)|^2} - \varphi_-(y)}{t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_+(y) + t\varphi_+(y) - (1 + t^2 + 2t)|\varphi_+(y)|^2\varphi_-(y)}{t|\varphi_+(y) + t\varphi_+(y)|^2} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_+(y) + t\varphi_+(y) - (1 + t^2 + 2t)\varphi_+(y)}{t|\varphi_+(y) + t\varphi_+(y)|^2} = \\
 &= -\frac{\varphi_+(y)}{|\varphi_+(y)|^2} = -\varphi_-(y),
 \end{aligned}$$

avendo usato le identità

$$\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}(x) = \frac{x}{|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^m - 0$$

$$|\varphi_+(y)|^2\varphi_-(y) = \frac{1 - y_{m+1}^2}{(1 - y_{m+1})^2}\varphi_-(y) = \frac{1 + y_{m+1}}{1 - y_{m+1}}\varphi_-(y) = \varphi_+(y), \quad y \in S^m - \{\pm N\}.$$

In definitiva $V_{\varphi_-}(x) = -x$ per $x \in \mathbb{R}^m - 0$ e possiamo estendere con continuità V a tutta S^m ponendo $V(N) = 0$. Ne segue che

$$\chi(S^m) = \text{ind}_N V + \text{ind}_{-N} V = (-1)^m + 1 = \begin{cases} 2 & \text{se } m \text{ pari;} \\ 0 & \text{se } m \text{ dispari.} \end{cases}$$

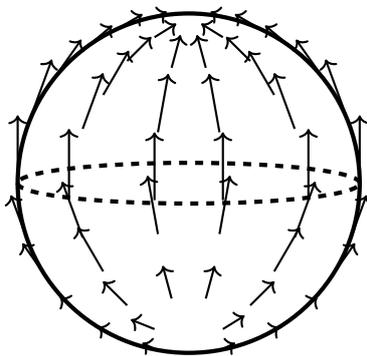


Figura 4.1. Rappresentazione di V per $m = 2$.

Abbiamo allora provato il

Teorema 4.4.1. *Non esistono campi di vettori (continui) mai nulli su S^{2n} .*

In effetti un eventuale campo di vettori V (continuo) su S^m mai nullo indurrebbe un'omotopia

$$F : S^m \times I \longrightarrow S^m \quad F(y, t) = y \cos(\pi t) + \frac{V(y)}{|V(y)|} \sin(\pi t)$$

fra 1_{S^m} e la mappa antipodale A su S^m (per ogni $y \in S^m$, $V(y) \perp y$ quindi $|y \cos(\pi t) + \frac{V(y)}{|V(y)|} \sin(\pi t)|^2 = 1$ e F è ben posta). Tuttavia come visto in 3.3.5 ciò è possibile se e soltanto se m è dispari.

Questo fornisce una seconda dimostrazione di 4.4.1.

Concludiamo osservando che in effetti se $m = 2k - 1$ è dispari esiste un campo di vettori su S^m mai nullo, precisamente

$$V(y_1, \dots, y_{2k}) = (y_2, -y_1, \dots, y_{2k}, -y_{2k-1}), \quad y \in S^{2k-1}.$$

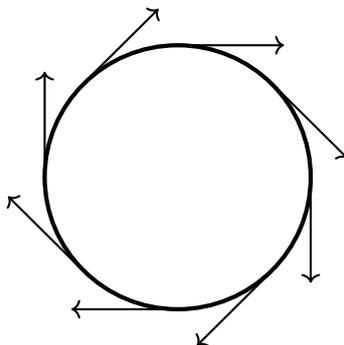


Figura 4.2. Rappresentazione di V per $m = 1$.

4.5 Esistenza di un campo di vettori mai nullo

Abbiamo appena visto che se $\chi(S^m) = 0$, esiste un campo di vettori mai nullo su S^m . Questo è in effetti vero in generale. Equivalentemente il risultato in 4.3.2 si inverte.

La prova richiede alcuni lemmi preliminari.

Definizione. Un **diffeomorfismo** $h : M \longrightarrow M$ si dice **a supporto compatto** se esiste un compatto di M fuori dal quale $h = 1_M$.

Lemma 4.5.1. *Se M è connessa, per ogni coppia di punti p e q esiste un diffeomorfismo a supporto compatto $h : M \rightarrow M$ tale che $h(p) = q$.*

Dimostrazione. Introduciamo su M la seguente relazione di equivalenza: $p \sim q$ se esiste un diffeomorfismo $h : M \rightarrow M$ a supporto compatto che porti p in q .

Proveremo che esiste un intorno di 0 in \mathbb{R}^m in cui ogni punto è equivalente a 0. Ne seguirà che ciascuna classe di equivalenza è aperta e dall'ipotesi di connessione la tesi.

Sia $m = 1$ e $y \in \mathbb{R}$. Scegliamo una mappa liscia $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uguale a 1 in 0 e nulla fuori da $(-1, 1)$ e chiamiamo $h(x) = x + \lambda(x)y$. Allora $|h'(x)| = |1 + \lambda'(x)y| \geq 1 - |\lambda'(x)y|$ e $|\lambda'(x)|$ è limitata, essendo h nulla fuori da un compatto, quindi $h'(x)$ non può annullarsi se $|y|$ è piccolo. Siccome poi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \pm\infty$, h mappa \mathbb{R} in sè diffeomorficamente. Infine è chiaro che h è a supporto compatto e $h(0) = y$.

Se $m > 1$ possiamo adattare l'argomento precedente nella maniera seguente. Scriviamo $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ e consideriamo, a meno di una rotazione in partenza e una in arrivo, un punto $(y, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Scegliamo poi una funzione liscia $\rho : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow [0, 1]$ che valga 1 nell'origine e nulla fuori da $D^{m-1}(1)$ e definiamo $h(x_1, x_2) = (x_1 + \rho(x_2)\lambda(x_1)y, x_2)$ per $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Di nuovo $|\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2)| = |1 + \rho(x_2)\lambda'(x_1)y| \geq 1 - |\lambda'(x_1)y|$, quindi per $|y|$ piccolo h porta ogni retta $x_2 = \text{costante}$ diffeomorficamente in sè, in particolare è una biezione $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, e

$$Dh(x_1, x_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 + \rho(x_2)\lambda'(x_1)y & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & I \end{array} \right)$$

è invertibile per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$, ossia h è un diffeomorfismo a supporto compatto $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ che porta 0 in $(y, 0)$. \square

Corollario 4.5.2. *Se M è connessa e di dimensione $m > 1$, p_1, \dots, p_n e q_1, \dots, q_n sono punti di M tali che $p_i \neq q_j$ per ogni $i \neq j$, esiste un diffeomorfismo a supporto compatto $h : M \rightarrow M$ tale che $h(p_i) = q_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n . Se $n = 1$ la tesi segue dal lemma precedente. Supponiamo $n > 1$. Siccome $m > 1$ $M - \{p_n, q_n\}$ è connessa, quindi per l'ipotesi induttiva esiste $h_1 : M - \{p_n, q_n\} \rightarrow M - \{p_n, q_n\}$ un diffeomorfismo a supporto compatto che porti p_i in q_i per $i = 1, \dots, n-1$. Essendo h_1 a supporto compatto, h_1 si estende a un diffeomorfismo

$M \rightarrow M$ ponendo $h_1(p_n) = p_n$ e $h_1(q_n) = q_n$. Similmente costruiamo un diffeomorfismo a supporto compatto $h_2 : M \rightarrow M$ che fissi q_1, \dots, q_{n-1} e porti p_n in q_n . Il diffeomorfismo richiesto è $h = h_2h_1$. \square

Lemma 4.5.3. *Sia $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una mappa liscia con $f^{-1}(0) = \{x_1, \dots, x_n\}$ un insieme finito. Sia poi $D \subseteq \mathbb{R}^m$ un disco aperto contenente $f^{-1}(0)$, centrato in 0 e tale che $f|_{\partial D} : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^m - 0$ sia omotopa in $\mathbb{R}^m - 0$ a una costante.*

Allora esiste una mappa liscia $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m - 0$ coincidente con f fuori da D .

Dimostrazione. Sia $F : \partial D \times I \rightarrow \mathbb{R}^m - 0$ un'omotopia liscia fra una costante c e f .

Se $r > 0$ è il raggio di D e $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è una mappa liscia uguale a 0 per $t \leq 1/3$ e uguale a 1 per $t \geq 2/3$, possiamo prendere

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - 0 \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin D, \\ F(r \frac{x}{|x|}, \lambda(\frac{|x|}{r})) & \text{se } x \in D - 0, \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

\square

Lemma 4.5.4. *Se $f : S^1 \rightarrow S^1$ è continua e $\deg f = 0$, allora f è omotopa a una costante.*

Dimostrazione. Sia $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ il rivestimento $\pi(t) = e^{it}$ e $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ un sollevamento di $f \circ (\pi|_{[0, 2\pi]})$. Allora $e^{ig(0)} = e^{ig(2\pi)}$, ossia esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $g(2\pi) = g(0) + 2n\pi$ e possiamo estendere g a una mappa continua $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $g(t + 2\pi) = g(t) + 2n\pi$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

In questo modo g rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

e $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ $F(e^{it}, s) = e^{i[sg(t) + (1-s)nt]}$ è un'omotopia ben posta tra f e $e^{it} \mapsto e^{nit}$ avente grado n . Ne segue che $n = \deg f = 0$ e f è omotopa alla mappa costantemente uguale a 1. \square

Possiamo generalizzare il lemma precedente a S^m per ogni $m \geq 1$.

Teorema 4.5.5. *Se $f : S^m \rightarrow S^m$ è continua e $\deg f = 0$, allora f è omotopa a una costante.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su m . Se $m = 1$ è il contenuto del lemma precedente. Sia allora $m > 1$. Chiaramente possiamo assumere che f sia C^∞ . Scegliamo $q_1, q_2 \in S^m$ due valori regolari per f e indichiamo con $F_i = f^{-1}(q_i)$, $i = 1, 2$ (F_1 e F_2 sono insiemi finiti). Essendo $m > 1$, se $U \subseteq S^m$ è un aperto diffeomorfo a \mathbb{R}^m e digiunto da F_2 , esiste un diffeomorfismo $h : S^m \rightarrow S^m$ che porti F_1 in U e lasci fissi i punti di F_2 . Allora fh^{-1} ha grado 0, q_1, q_2 sono due suoi valori regolari, $(fh^{-1})^{-1}(q_1) \subseteq U$ e $q_2 \notin fh^{-1}(U)$. Chiaramente se fh^{-1} è omotopa a una costante anche $f = (fh^{-1})h$ lo è, pertanto possiamo assumere $F_1 \subseteq U$ e $q_2 \notin f(U)$ da principio. Scegliamo due diffeomorfismi $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi : S^m - q_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $\psi(q_1) = 0$. La composizione

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f} S^m - q_2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^m$$

ha zeri in $\varphi(F_1)$. Sia D un disco aperto contenente tali zeri. Allora come nel passo 4 di 4.3.1, il grado della mappa

$$\frac{g|_{\partial D}}{|g|_{\partial D}|} : \partial D \rightarrow S^{m-1}$$

è uguale a $\sum_{x \in \varphi(F_1)} \#_x(\psi f \varphi^{-1}, 0) = \pm \deg f = 0$ (dove il segno \pm dipende dal fatto che φ e ψ preservino o meno l'orientazione). Per l'ipotesi induttiva $\frac{g|_{\partial D}}{|g|_{\partial D}|}$ è omotopa a una costante, inoltre

$$\partial D \times I \rightarrow \mathbb{R}^m - 0 \quad (x, t) \mapsto tg|_{\partial D}(x) + (1-t)\frac{g|_{\partial D}}{|g|_{\partial D}|}(x)$$

è un'omotopia, quindi anche $g|_{\partial D}$ è omotopa in $\mathbb{R}^m - 0$ a tale costante. Per 4.5.3 esiste una mappa liscia $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m - 0$ coincidente con $\psi f \varphi^{-1}$ fuori da D . Essendo $tg(x) + (1-t)(\psi f \varphi^{-1})(x)$ un'omotopia fra le due che lascia fissi i punti fuori da D possiamo sostituire f su U con $\psi^{-1}g\varphi$ ottenendo una mappa liscia omotopa a f a valori in $S^m - q_1 \approx \mathbb{R}^m$, quindi omotopa a una costante. \square

Proviamo infine il

Teorema 4.5.6. *Sia M una varietà di dimensione m compatta, connessa, orientata e senza bordo. Se $\chi(M) = 0$, esiste un campo di vettori mai nullo su M .*

Dimostrazione. Se $m = 1$ M è un arco o una circonferenza, quindi la tesi è ovvia. Supponiamo $m > 1$. Sia $V : M \rightarrow TM$ un campo di vettori trasverso a M e p_1, \dots, p_n i suoi zeri. Scegliamo un aperto U di M diffeomorfo a \mathbb{R}^m e un diffeomorfismo $h : M \rightarrow M$ che porti p_1, \dots, p_n in U . Allora

$$M \xrightarrow{h^{-1}} M \xrightarrow{V} TM \xrightarrow{Th} TM$$

è un campo di vettori trasverso a M e con zeri in U . Non è pertanto restrittivo assumere da principio che $p_1, \dots, p_n \in U$.

Sia $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un diffeomorfismo. L'ipotesi $\chi(M) = 0$ implica che $\sum_{i=1}^n \text{ind}_{\varphi(p_i)} V_\varphi = 0$. Quindi se D è un disco aperto contenente $\varphi(p_1), \dots, \varphi(p_n)$, il grado di $\frac{V_\varphi}{|V_\varphi|} : \partial D \rightarrow S^{m-1}$ è nullo e, come nella prova precedente, esiste $\tilde{V}_\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m - 0$ liscia e coincidente con V_φ fuori da D .

Definendo infine

$$\tilde{V} : M \rightarrow TM \quad \tilde{V}(p) = \begin{cases} V(p) & \text{se } p \notin U, \\ T\varphi^{-1}(\varphi(p), \tilde{V}_\varphi(\varphi(p))) & \text{se } p \in U, \end{cases}$$

abbiamo un campo di vettori mai nullo su M . □

Capitolo 5

Cenni sulla teoria di Morse

In quest'ultimo capitolo tratteremo una piccola parte della teoria di Morse: useremo le funzioni di Morse per dare una differente formulazione del teorema di Poincaré-Hopf. Faremo infine degli esempi specifici di calcolo.

Fissiamo una varietà (M, Ψ) , priva di bordo.

5.1 Gradiente di una funzione

Dotiamo $B = \{(p, a, b) \in M \times TM \times TM \mid \pi(a) = \pi(b) = p\}$ di una struttura di sottovarietà di $M \times TM \times TM$ scegliendo come carte

$$B \cap (U \times TU \times TU) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \quad (p, a, b) \mapsto (\varphi(p), T_p\varphi(a), T_p\varphi(b))$$

al variare di (φ, U) in Ψ .

Un prodotto scalare su M è una collezione $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_p\}_{p \in M}$ di prodotti scalari (forme bilineari, simmetriche e definite positive) su M_p tali che

$$B \longrightarrow \mathbb{R} \quad (p, a, b) \mapsto \langle a, b \rangle_p$$

sia C^∞ .

Se (φ, U) è una carta fissata indicheremo con $(g_{ij}(x))_{ij} \in \text{Mat}(m, \mathbb{R})$ la matrice che rappresenta, rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^m , il prodotto scalare su \mathbb{R}^m $(v, w) \mapsto \langle T_x\varphi^{-1}(v), T_x\varphi^{-1}(w) \rangle_{\varphi(x)}$, al variare di $x \in \varphi(U)$. Indicheremo inoltre con $(g^{ij}(x))_{ij}$ la sua inversa.

Supponiamo data $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ . Per ogni $p \in M$ $T_p f \in M_p^* = L(M_p, \mathbb{R})$, pertanto esiste un unico campo di vettori, $\text{grad } f$, definito dall'uguaglianza $\langle \text{grad } f(p), a \rangle_p = T_p f(a)$ per ogni $p \in M$ e $a \in M_p$. $\text{grad } f$ si chiama

gradiente di f e dipende ovviamente dal prodotto scalare considerato.

Osserviamo che $p \in M$ è un punto critico per f se e soltanto se $\text{grad } f(p) = 0$.

Esplicitando infine l'espressione di $\text{grad } f$ in carta vediamo che $\text{grad } f$ è C^∞ . Sia $(\varphi, U) \in \Psi$ e chiamiamo $V = (\text{grad } f)_\varphi$. Per $i = 1, \dots, m$ e $x \in \varphi(U)$ si ha

$$\frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x_i}(x) = \langle T_x\varphi^{-1}(e_i), \text{grad } f(\varphi^{-1}(x)) \rangle_{\varphi^{-1}(x)} = \sum_{j=1}^m g_{ij}(x)V_j(x)$$

da cui

$$V_i(x) = \sum_{j=1}^m g^{ij}(x) \frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x_j}(x). \quad (5.1)$$

5.2 Funzioni di Morse

Se $U \subseteq \mathbb{R}^m$ è un aperto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ è C^∞ e $x \in U$ è un punto critico per f , diremo che x è non degenere per f se la forma quadratica $H_x f$, rappresentata rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^m dalla matrice Hessiana di f in x

$$D^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{ij},$$

è non degenere.

Osserviamo che se $h : V \rightarrow U$ è un diffeomorfismo fra aperti di \mathbb{R}^m , chiamando $y = h^{-1}(x)$, per $x \in U$ si ha

$$\frac{\partial(fh)}{\partial y_l}(y) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \frac{\partial h_j}{\partial y_l}(y)$$

e

$$\frac{\partial^2(fh)}{\partial y_k \partial y_l}(y) = \sum_{j,i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \frac{\partial h_i}{\partial y_k}(y) \frac{\partial h_j}{\partial y_l}(y) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \frac{\partial^2 h_j}{\partial y_k \partial y_l}(y).$$

In particolare se $x \in U$ è un punto critico per f , $y = h^{-1}(x)$ è un punto critico per fh e il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{Dh(y)} & \mathbb{R}^m \\ & \searrow H_y(fh) & \swarrow H_x f \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

è commutativo.

In definitiva se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ è C^∞ e $p \in M$ è un punto critico per f , possiamo scegliere una carta (φ, U) in p su M e definire $H_p f$ come la forma quadratica

$$M_p \xrightarrow{T_p \varphi} \mathbb{R}^m \xrightarrow{H_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})} \mathbb{R}$$

(indipendente dalla scelta di (φ, U)).

Diremo che f è non degenere in p se $H_p f$ è **non degenere**. In tal caso indicheremo con $\text{ind}_f(p)$ l'**indice** di f in p , definito come il massimo fra le dimensioni dei sottospazi di M_p su cui $H_p f$ è definita negativa. In altri termini, essendo $H_p f$ non degenere, l'indice di f in p è il numero di termini con segno negativo che compaiono sulla diagonale della matrice di $H_p f$ quando espressa rispetto a una qualsiasi base diagonalizzante.

Dalla teoria delle funzioni di più variabili segue che un punto p , critico e non degenere per f , è di massimo per f se e soltanto se $\text{ind}_f(p) = m$ ed è di minimo se e soltanto se $\text{ind}_f(p) = 0$.

Infine diremo che f è una **funzione di Morse** se tutti i suoi punti critici sono non degeneri.

Facciamo subito un esempio.

Esempio 5.2.1. Siano $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m$ numeri reali e indichiamo con Λ la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Definiamo

$$f : \text{SO}(m, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(C) = \text{tr}(\Lambda C) = \sum_{i=1}^m \lambda_i c_{ii}$$

se $C = (c_{ij})_{ij}$. Con le notazioni di 1.1.3, per ogni $C \in \text{SO}(m, \mathbb{R})$ e $X = (x_{ij})_{ij} \in V$ si ha:

$$f \varphi_C^{-1}(X) = \text{tr} \left\{ \Lambda C \frac{I - X}{I + X} \right\}$$

da cui per $i < j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \varphi_C^{-1})}{\partial x_{ij}}(X) &= \text{tr} \left\{ \Lambda C \left(-\frac{\frac{\partial X}{\partial x_{ij}}}{I + X} - \frac{(I - X) \frac{\partial X}{\partial x_{ij}}}{(I + X)^2} \right) \right\} = \\ &= \text{tr} \left\{ \Lambda C \left(-\frac{\delta_{ij} - \delta_{ji}}{I + X} - \frac{(I - X)(\delta_{ij} - \delta_{ji})}{(I + X)^2} \right) \right\} = \\ &= \text{tr} \left\{ -\Lambda C (\delta_{ij} - \delta_{ji}) \frac{2I}{(I + X)^2} \right\}, \end{aligned}$$

avendo indicato con δ_{ij} la matrice avente nell'entrata (i, j) un 1 e 0 in ogni altra e ripetutamente usato il fatto che la traccia del prodotto fra due matrici non dipende dall'ordine in cui si effettua il prodotto.

Valutando in $X = 0$, troviamo che C è un punto critico per f se e soltanto se

$$0 = -\text{tr}(\Lambda C \delta_{ij}) + \text{tr}(\Lambda C \delta_{ji}) = -\lambda_j c_{ij} + \lambda_i c_{ji} \quad (5.2)$$

per ogni $i < j$.

Ne segue che i punti critici di f sono tutte e sole le matrici diagonali della forma $\text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ che sono in $\text{SO}(m, \mathbb{R})$. Infatti chiaramente queste matrici soddisfano 5.2 e viceversa se $C \in \text{SO}(m, \mathbb{R})$ soddisfa 5.2, da

$$\lambda_{m-1}^2 (1 - c_{mm}^2) = \lambda_{m-1}^2 \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi}^2 \geq \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^2 c_{mi}^2 = \lambda_m^2 \sum_{i=1}^{m-1} c_{im}^2 = \lambda_m^2 (1 - c_{mm}^2)$$

si ottiene $c_{mm} = \pm 1$ e, essendo $C \in \text{SO}(m, \mathbb{R})$, $c_{im} = c_{mi} = 0$ se $i < m$.

Iterando il ragionamento, C non può che essere della forma $\text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$.

In particolare f ha 2^{m-1} punti critici: si tratta di contare in quanti modi differenti possiamo mettere un numero pari di -1 sulla diagonale, ma scelti arbitrariamente i primi $m-1$ termini sulla diagonale l' m -esimo è fissato.

Infine se $C = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \text{SO}(m, \mathbb{R})$, $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 1, \dots, m$, per $i < j$ e $s < l$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 (f \varphi_C^{-1})}{\partial x_{sl} \partial x_{ij}}(X) \right|_{X=0} &= \text{tr} \left\{ \Lambda C (\delta_{ij} - \delta_{ji}) \frac{4I}{(I+X)^3} (\delta_{sl} - \delta_{ls}) \right\} \Big|_{X=0} = \\ &= 4 \{ \Lambda C (\delta_{ij} - \delta_{ji}) (\delta_{sl} - \delta_{ls}) \} = 4 \text{tr}(\Lambda C \delta_{ij} \delta_{sl}) + \\ &\quad - 4 \text{tr}(\Lambda C \delta_{ij} \delta_{ls}) - 4 \text{tr}(\Lambda C \delta_{ji} \delta_{sl}) + 4 \text{tr}(\Lambda C \delta_{ji} \delta_{ls}) = \\ &= \begin{cases} -4(\lambda_j \varepsilon_j + \lambda_i \varepsilon_i) & \text{se } (i, j) = (s, l), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue che ogni punto critico di f è non degenere e f è una funzione di Morse.

Infine il segno di $-4(\lambda_j \varepsilon_j + \lambda_i \varepsilon_i)$ è negativo se $\varepsilon_j = 1$ e positivo se $\varepsilon_j = -1$. Dunque se $j_1 < \dots < j_k$ sono tali che $\varepsilon_{j_1} = \dots = \varepsilon_{j_k} = 1$ e $\varepsilon_j = -1$ se $j \notin \{j_1, \dots, j_k\}$, $\text{ind}_f(C) = (j_1 - 1) + \dots + (j_k - 1)$.

Il seguente risultato, dovuto a Marston Morse, mette in evidenza la relazione tra f e $H_p f$, generalizzando lo sviluppo di Taylor al secondo ordine.

Lemma 5.2.2. *Sia $p \in M$ un punto critico non degenere per $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ . Esiste una carta (φ, U) su M in p tale che*

$$f \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = f(p) - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^m x_i^2$$

con $k = \text{ind}_f(p)$.

Dimostrazione. È chiaro che in una tale scrittura debba aversi necessariamente $k = \text{ind}_f(p)$. Dobbiamo quindi provare solamente l'esistenza di una tale scrittura.

Possiamo assumere da principio che $M = \mathbb{R}^m$, $p = f(p) = 0$.

Usando due volte 4.2.1, scriviamo per ogni $x \in \mathbb{R}^m$

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m)$$

con $h_{ij}(0) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ (l'ultima uguaglianza segue riguardando la definizione delle g_i nella prova di 4.2.1).

Possiamo anche assumere che $h_{ij} = h_{ji}$ a meno di sostituire ciascuna delle due con $\frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$ (tale sostituzione lascia invariato $h_{ij}(0)$ per ogni i, j).

Proviamo la tesi per induzione su m .

Se $m = 1$ e $f(x) = x^2 h(x)$, essendo 0 non degenerare per f si ha $h(0) \neq 0$, pertanto in un opportuno intorno di 0 troviamo una funzione C^∞ e positiva g tale che $h(x) = \pm \sqrt{g(x)}$. Posto $\varphi(x) = xg(x)$ si ha $\varphi'(0) = g(0) \neq 0$ e $f\varphi^{-1}(y) = \pm y^2$.

Supponiamo quindi $m > 1$. A meno di un cambio di coordinate lineare possiamo assumere che $h_{11}(0) \neq 0$. Infatti se esiste i tale che $h_{ii}(0) \neq 0$ è sufficiente scambiare x_1 con x_i , se invece per ogni i $h_{ii}(0) = 0$, essendo 0 non degenerare per f devono esistere i, j tali che $h_{ij}(0) \neq 0$, a meno scambiare le coordinate, diciamo $i = 1, j = 2$. In tal caso operiamo il cambio di coordinate $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3, \dots, x_m = y_m$.

In un opportuno intorno di 0 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m) &= h_{11}(x)x_1^2 + 2 \sum_{i=2}^m h_{1i}(x)x_1 x_i + \sum_{i,j=2}^m h_{ij}(x)x_i x_j = \\ &= h_{11}(x) \left(x_1 + \sum_{i=2}^m \frac{h_{1i}(x)}{h_{11}(x)} x_i \right)^2 + (\text{termini in cui non compare } x_1) \end{aligned}$$

e $h_{11}(x) = \pm g(x)^2$ con g una funzione C^∞ e positiva. Definiamo $\varphi(x) = (\pm g(x)(x_1 + \sum_{i=2}^m \frac{h_{1i}(x)}{h_{11}(x)} x_i), x_2, \dots, x_m)$. Dal teorema della funzione inversa possiamo scegliere φ come carta intorno a 0 e

$$f\varphi^{-1}(y) = \pm y_1^2 + \sum_{i,j>1} y_i y_j \tilde{h}_{ij}(y_1, \dots, y_n).$$

La tesi segue pertanto dal passo induttivo. □

Corollario 5.2.3. *Punti critici non degeneri sono isolati. In particolare se M è compatta sono finiti.*

Dimostrazione. L'ultima asserzione segue dal fatto che l'insieme dei punti critici non degeneri di f è un chiuso di M . \square

5.3 Rivisitazione del teorema di Poincaré-Hopf

Mettendo insieme il teorema di Poincaré-Hopf e il lemma di Morse otteniamo il seguente

Teorema 5.3.1. *Supponiamo che M sia compatta, orientata e priva di bordo. Siano $p_1, \dots, p_n \in M$ (finiti) i punti critici di una funzione di Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Indicando con ν_k il numero di punti critici di f di indice k , si ha*

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \nu_k.$$

Dimostrazione. Cominciamo dotando M di un opportuno prodotto scalare. Scegliamo delle carte $(\varphi_1, U_1), \dots, (\varphi_n, U_n)$ in p_1, \dots, p_n rispettivamente come in 5.2.2 e tali che $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Come in 4.3.1, troviamo su M un atlante finito $\{(\varphi_1, U_1), \dots, (\varphi_n, U_n), (\varphi_{n+1}, U_{n+1}), \dots, (\varphi_l, U_l)\}$ in modo che ciascun p_i ammetta un intorno che non intersechi U_j se $j \neq i$. Scegliamo infine $\{\lambda_j\}_{j=1, \dots, l}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_j\}_{j=1, \dots, l}$ e poniamo

$$\langle a, b \rangle_p = \sum_{j: p \in U_j} \lambda_j(p) \langle T_p \varphi_j(a), T_p \varphi_j(b) \rangle.$$

Tale prodotto è rappresentato dalla matrice identità I in opportuni intorni dei punti p_1, \dots, p_n , rispetto alle carte $(\varphi_1, U_1), \dots, (\varphi_n, U_n)$.

Se $V = \frac{1}{2} \text{grad } f$, da 5.1

$$V_{\varphi_i}(x) = (-x_1, \dots, -x_{k_i}, x_{k_i+1}, \dots, x_m)$$

con $k_i = \text{ind}_f(p_i)$, x in un intorno di $\varphi_i(p_i)$, $i = 1, \dots, n$.

In particolare $\text{ind}_{p_i} V = (-1)^{k_i}$ e pertanto

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^n \text{ind}_{p_i} V = \sum_{k=0}^m (-1)^k \nu_k.$$

\square

Esempio 5.3.2. La caratteristica di Eulero di $\text{SO}(m, \mathbb{R})$ è 0 per ogni $m \geq 2$. Infatti esiste su $\text{SO}(m, \mathbb{R})$ un campo di vettori V mai nullo: per costruirlo è sufficiente scegliere un vettore non nullo nello spazio tangente all'identità e per ogni $C \in \text{SO}(m, \mathbb{R})$ usare il differenziale del diffeomorfismo di $\text{SO}(m, \mathbb{R})$ in sè dato dalla moltiplicazione per C per definire V in C .

Tale risultato deve allora potersi ottenere anche usando il teorema precedente e l'esempio 5.2.1. Vediamo come.

Indichiamo con f_m la funzione di Morse definita in 5.2.1, al variare di $m \geq 2$ e procediamo per induzione su m .

Se $m = 2$, f_2 ha come unici punti critici $\pm I$ e $\chi(\text{SO}(2, \mathbb{R})) = 1 - 1 = 0$ (coerentemente col fatto che $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ ha dimensione dispari).

Supponiamo allora $m > 2$. Possiamo dividere i punti critici di f_m in due gruppi: quelli aventi un 1 sull'ultimo elemento della diagonale e quelli aventi un -1 .

Esiste una biezione fra gli elementi del primo gruppo e i punti critici di f_{m-1} data da

$$\text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1) \mapsto \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1, 1).$$

In particolare, se m è dispari, a ogni punto critico di f_{m-1} ne corrisponde uno del primo gruppo avente indice con stessa parità e viceversa, se m è pari, sempre con parità opposta. Dal passo induttivo, la somma che compare in 5.3.1 ristretta ai soli elementi del primo gruppo è nulla.

Consideriamo ora gli elementi del secondo gruppo. Se $m = 3$ questi sono solamente $\text{diag}(1, -1, -1)$ e $\text{diag}(-1, 1, -1)$ e l'indice di f_3 in tali punti ha parità opposta. Se invece $m > 3$, distinguiamo fra quelli aventi -1 sugli ultimi due elementi diagonali e quelli aventi 1 e -1 come ultimi due elementi diagonali. La somma in 5.3.1 ristretta ai primi è nulla per la stessa ragione di sopra. Possiamo poi ripetere il ragionamento sui secondi fino a rimanere con le sole due matrici $\text{diag}(1, -1, 1, \dots, 1, -1)$ e $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1, -1)$, nelle quali l'indice di f ha parità opposta.

Riportiamo infine due ulteriori esempi.

Esempio 5.3.3. Siano $0 < \lambda_0 < \dots < \lambda_m$ numeri reali e definiamo

$$f : \mathbb{C}\mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad f([w_0, \dots, w_m]) = \frac{\sum_{i=0}^m \lambda_i |w_i|^2}{\sum_{i=0}^m |w_i|^2}.$$

Verifichiamo che f è una funzione di Morse, usando l'atlante descritto in 1.1.2. Per ogni $i = 0, \dots, m$

$$f \varphi_i^{-1}(z_1, \dots, z_m) = \frac{\lambda_0 |z_1|^2 + \dots + \lambda_{i-1} |z_i|^2 + \lambda_i + \lambda_{i+1} |z_{i+1}|^2 + \dots + \lambda_m |z_m|^2}{|z_1|^2 + \dots + |z_i|^2 + 1 + |z_{i+1}|^2 + \dots + |z_m|^2},$$

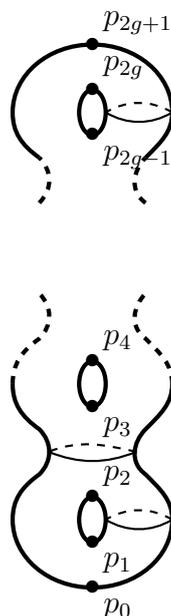


Figura 5.1. Superficie di genere g .

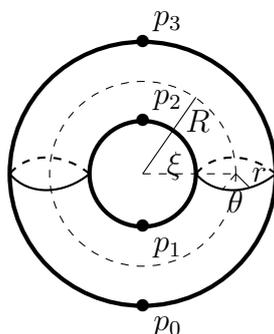
Chiamiamo $f : S_g \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = z$ la funzione altezza su S_g . I punti critici di f sono p_0, \dots, p_{2g+1} .

Questo segue osservando che se $c = (c_1, c_2, c_3)$ è una curva C^∞ su S_g , si ha $c'_3(t) = \frac{d}{dt} f(c(t))$, pertanto un punto p è critico per f se e soltanto se lo spazio tangente a S_g in p è $\mathbb{R}^2 \times 0$.

Supponiamo $p_0 = 0$ sia nell'origine delle coordinate. Per vedere che i p_i sono non degeneri è chiaramente sufficiente fare il caso del toro T ($g = 1$). Possiamo allora usare la parametrizzazione locale

$$\varphi^{-1} : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \rightarrow T$$

$$\varphi^{-1}(\xi, \theta) = (r \cos \theta, (r \sin \theta + R) \cos \xi, (r \sin \theta + R) \sin \xi + R + r) \quad (R > r).$$



Si ha $p_0 = 0 = \varphi^{-1}(-\pi/2, \pi/2)$, $p_1 = \varphi^{-1}(-\pi/2, -\pi/2)$, $p_2 = \varphi^{-1}(\pi/2, -\pi/2)$, $p_3 = \varphi^{-1}(\pi/2, \pi/2)$; $f\varphi^{-1}(\xi, \theta) = (r \sin \theta + R) \sin \xi + R + r$, $D(f\varphi^{-1})(\xi, \theta) = ((r \sin \theta + R) \cos \xi, r \cos \theta \sin \xi)$ e

$$D^2(f\varphi^{-1})(\xi, \theta) = \begin{pmatrix} (-r \sin \theta - R) \sin \xi & r \cos \theta \cos \xi \\ r \cos \xi \cos \theta & -r \sin \theta \sin \xi \end{pmatrix}.$$

Valutando otteniamo $D^2(f\varphi^{-1})(-\pi/2, \pm\pi/2) = \text{diag}(R \pm r, \pm r)$ e $D^2(f\varphi^{-1})(\pi/2, \pm\pi/2) = \text{diag}(-R \mp r, \mp r)$.

Ne segue che f è di Morse, $\text{ind}_f(p_0) = 0$, $\text{ind}_f(p_1) = \dots = \text{ind}_f(p_{2g}) = 1$, $\text{ind}_f(p_{2g+1}) = 2$ e dunque $\chi(S_g) = 2 - 2g$.

Osserviamo in conclusione che con il seguente argomento avremmo potuto evitare i conti precedenti: essendo p_0 di minimo per f e p_{2g+1} di massimo abbiamo subito che $\text{ind}_f(p_0) = 0$ e $\text{ind}_f(p_{2g+1}) = 2$; inoltre p_1, \dots, p_{2g} non sono punti di minimo nè di massimo per f , pertanto l'indice di f in tali punti è diverso da 0 e 2 e deve valere necessariamente 1.

Bibliografia

- [1] M.W. Hirsch, Differential Topology, Springer, 1976.
- [2] V. Guillemin e A. Pollack, Differential Topology, Prentice-Hall, 1974.
- [3] J.W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, 1965.
- [4] J.W. Milnor, Morse theory, Princeton University Press, 1969.
- [5] M. Manetti, Topologia, Springer, 2008.
- [6] J.R. Munkres, Topology, Prentice-Hall, 2000.