1. [**6 Punkte**] Gegeben sei die Schar der Ellipsoide

$$4x^2 + 3y^2 + 8z^2 = c, \qquad c > 0.$$

Welches dieser Ellipsoide berührt die Ebene $2x + 3y + 4z = 12$ tangential, und in welchem Punkt?

2. [**6 Punkte**] Man bestimme die ersten drei nicht-verschwindenden Terme der Taylorentwicklung von $f(x) = \tanh(x)$ in $x_0 = 0$.

3. [**6 Punkte**] Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 1, \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

für die Funktion $y = y(x)$, $x > 0$.

4. [**6 Punkte**] Die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ besitze den Normalenvektor $\vec{n} = (1, 2, 3)$ und enthalte den Punkt $(1, 1, 1)$.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks

$$\Delta = E \cap \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \right\}.$$

(b) Berechnen Sie die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = (x - z,\ x + y^2,\ y)$$

längs des Randweges $\partial\Delta$ leistet. Dabei soll der Durchlaufsinn so gewählt werden, dass er verträglich mit $\vec{n}$ ist.

5. [**6 Punkte**] Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{w}(x, y, z) = (x^2,\ -xy,\ -xz)$$

durch die Halbzylinderfläche

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

in Richtung des Normalenfeldes, welches von der z-Achse weggerichtet ist.

6. [**6 Punkte**] Ein schwenkbarer Lichtkegel im Raum beleuchtet in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ den Bereich

$$B_\alpha = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \cdot \sin\alpha + \cos\alpha \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}} \right\}$$

in der (x,y)-Ebene.

(a) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ jeweils die Gleichung der Randkurve ∂B_α von B_α in möglichst einfacher Form. Um was für eine Kurve handelt es sich jeweils? Skizzieren Sie die drei Kurven in der (x,y)-Ebene.
Hinweis: Im Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist auf das Vorzeichen von x zu achten.

(b) Bestimmen Sie die Begrenzung des beleuchtbaren Bereichs, d. h. die Gleichung der Enveloppe der Kurvenschar ∂B_α.

7. [**6 Punkte**] Gegeben sei das Dreieck $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$. Weiter bezeichne $V(s,t)$ für $s,t \in \mathbb{R}$ das Volumen des Körpers

$$K_{s,t} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \Delta,\ 0 \leq z \leq (x-s)^2 + (y-t)^2\}.$$

(a) Berechnen Sie $V(0,0)$, d. h. das Volumen von $K_{0,0}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathbf{grad}\, V(s,t)$.
Hinweis: Differenzieren Sie zuerst unter dem Integral und lösen Sie dann erst das Integral auf.

(c) Für welches Paar (s,t) wird das Volumen $V(s,t)$ minimal?

(d) Bestimmen Sie die Funktion $V(s,t)$ explizit.
Hinweis: Verwenden Sie **(a)** und **(b)**.

8. **[18 Punkte] MC-Aufgabe: Bei den folgenden Teilaufgaben (a)-(f) ist jeweils genau eine Antwort von vier Möglichkeiten richtig. Kreuzen Sie direkt auf dem Aufgabenblatt an.**

(a) **[3 Punkte]** Gegeben sei folgendes Gebiet in der komplexen Zahlenebene:

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-4| \geq 1 \text{ und } -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

- ☐ Es gibt Zahlen in D mit $|z| = 4$.
- ☐ Die Zahl $6 + 7i$ liegt in D.
- ☐ Jedes $z \in D$ hat negativen Imaginärteil.
- ☐ Alle Nullstellen des Polynoms $z^2 - i$ liegen in D.

(b) **[3 Punkte]** Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welches quellenfrei und wirbelfrei ist, gilt:

- ☐ Die Arbeit von $\vec{v}$ entlang der geraden Strecke von $(1,1,1)$ bis $(4,2,8)$ verschwindet.
- ☐ Die Arbeit von $\vec{v}$ entlang eines Weges von $(1,1,1)$ bis $(4,2,8)$ hängt nicht von der Wahl des Weges ab.
- ☐ Der Fluss von $\vec{v}$ durch die Einheitskreisscheibe

  $$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

  von unten nach oben verschwindet.
- ☐ Das Vektorfeld $\vec{v}$ besteht nur aus parallelen Vektoren (d. h. alle Vektoren $\vec{v}(x,y,z)$ und $\vec{v}(x',y',z')$ sind parallel).

(c) **[3 Punkte]** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = ...$

- ☐ $1/5$.
- ☐ $1/3$.
- ☐ $1/2$.
- ☐ ∞.

(d) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x,y) = e^{-x^2-2y^2}$$

auf dem Gebiet

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

- ☐ Das Maximum beträgt 1 und das Minimum beträgt 0.
- ☐ Das Maximum beträgt 1 und das Minimum wird nur auf dem Rand des Gebiets angenommen.
- ☐ Das Maximum wird nur auf dem Rand des Gebiets angenommen und das Minimum beträgt e^{-1}.
- ☐ Die Differenz zwischen Maximum und Minimum ist gleich $1 - e$.

(e) [**3 Punkte**] Für zwei reelle Funktionen $x(t)$, $y(t)$ sei das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = -4x - 6y$$
$$\dot{y} = x + 3y$$

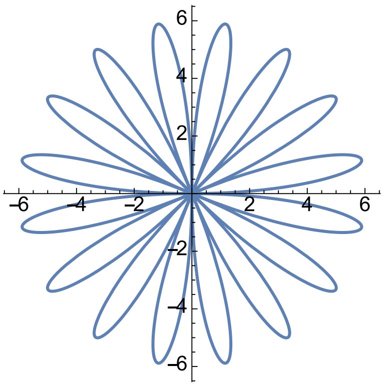
gegeben.

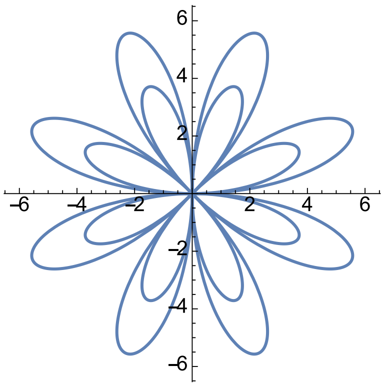
- ☐ Ein Gleichgewichtspunkt dieses Systems liegt bei $(x_0, y_0) = (3, -2)$.
- ☐ Die Lösung zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ ist gegeben durch $x(t) = e^t - e^{-t}$, $y(t) = 2e^{-3t} - e^{2t}$.
- ☐ Es gibt nur eine Lösung $(x(t), y(t))$ mit $x(t) = e^{2t}$.
- ☐ Alle Lösungen $(x(t), y(t))$ mit $y(0) = 2$ erfüllen $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

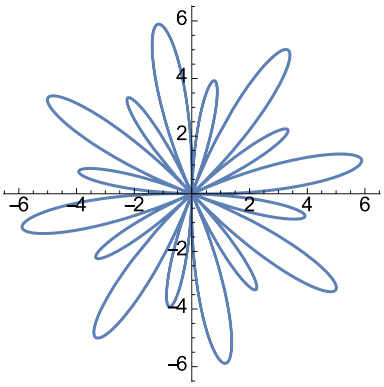
(f) [**3 Punkte**] Gegeben sei die ebene Kurve mit der Darstellung in Polarkoordinaten

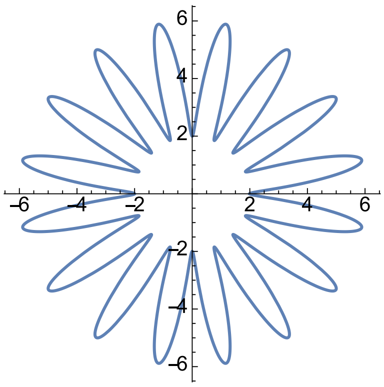
$$\rho(\varphi) = |5\sin(8\varphi) + 1|, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Welches Bild entspricht dieser Kurve?

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

Viel Erfolg!