

# **Analysis I & II**

## **D-MAVT, D-MATL**

Dr. Andreas Steiger

HS 2016

# Abriss eines Lebenslaufs

- ▶ BSc Mathematik ETH 2008, MSc Mathematik ETH 2009,  
Dr.sc. ETH 2014

# Abriss eines Lebenslaufs

- ▶ BSc Mathematik ETH 2008, MSc Mathematik ETH 2009, Dr.sc. ETH 2014
- ▶ Seit August 2015: Dozent im Lehrauftrag, Fach- & Mobilitätsberatung D-MATH

# Abriss eines Lebenslaufs

- ▶ BSc Mathematik ETH 2008, MSc Mathematik ETH 2009, Dr.sc. ETH 2014
- ▶ Seit August 2015: Dozent im Lehrauftrag, Fach- & Mobilitätsberatung D-MATH
- ▶ Thurgauer, seit Studienbeginn in Zürich wohnhaft

# Was ist Analysis? – I

# Was ist Analysis? – I

- ▶ Analysis ist in erster Linie das Studium von Grenzwerten

# Was ist Analysis? – I

- ▶ Analysis ist in erster Linie das Studium von Grenzwerten
- ▶ Folge:  $(a_n)_n = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \subset \mathbb{R}$

# Was ist Analysis? – I

- ▶ Analysis ist in erster Linie das Studium von Grenzwerten
- ▶ Folge:  $(a_n)_n = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \subset \mathbb{R}$
- ▶ Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

# Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

# Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Mögliche Ergebnisse?

- ▶  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

# Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Mögliche Ergebnisse?

- ▶  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

- ▶  $(a_n)$  wird beliebig gross (oder klein):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (oder } -\infty)$$

# Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Mögliche Ergebnisse?

- ▶  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

- ▶  $(a_n)$  wird beliebig gross (oder klein):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (oder } -\infty)$$

- ▶  $(a_n)$  konvergiert nicht:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert nicht.}$$

# Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Mögliche Ergebnisse?

- ▶  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

- ▶  $(a_n)$  wird beliebig gross (oder klein):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (oder } -\infty)$$

- ▶  $(a_n)$  konvergiert nicht:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert nicht.}$$

Bester Fall zum Weiterrechnen:

# Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Mögliche Ergebnisse?

- ▶  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

- ▶  $(a_n)$  wird beliebig gross (oder klein):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (oder } -\infty)$$

- ▶  $(a_n)$  konvergiert nicht:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert nicht.}$$

Bester Fall zum Weiterrechnen:  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ .

# Was ist Analysis? – I

- ▶ Fast alles, was Sie antreffen werden, lässt sich irgendwie als Funktion schreiben. Einfacher Fall:

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

# Was ist Analysis? – I

- ▶ Fast alles, was Sie antreffen werden, lässt sich irgendwie als Funktion schreiben. Einfacher Fall:

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

- ▶ Stetigkeit: Für jedes  $x_0 \in (a, b)$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

# Was ist Analysis? – I

- ▶ Fast alles, was Sie antreffen werden, lässt sich irgendwie als Funktion schreiben. Einfacher Fall:

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

- ▶ Stetigkeit: Für jedes  $x_0 \in (a, b)$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

(Konvergierende Folgen, bester Fall.)

# Was ist Analysis? – II

- ▶ Spezielle Punkte einer Funktion: Maximum, Minimum, Wendepunkte. . .

# Was ist Analysis? – II

- ▶ Spezielle Punkte einer Funktion: Maximum, Minimum, Wendepunkte. . .
- ▶ Werkzeug: Ableitung beschreibt Steigung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

# Was ist Analysis? – II

- ▶ Spezielle Punkte einer Funktion: Maximum, Minimum, Wendepunkte. . .
- ▶ Werkzeug: Ableitung beschreibt Steigung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- ▶ Maximum/Minimum erkennbar durch  $f'(x) = 0$ .

# Was ist Analysis? – II

- ▶ Spezielle Punkte einer Funktion: Maximum, Minimum, Wendepunkte. . .
- ▶ Werkzeug: Ableitung beschreibt Steigung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- ▶ Maximum/Minimum erkennbar durch  $f'(x) = 0$ .
- ▶ Kettenregel:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) + g'(x)$$

# Was ist Analysis? – II

- ▶ Spezielle Punkte einer Funktion: Maximum, Minimum, Wendepunkte. . .
- ▶ Werkzeug: Ableitung beschreibt Steigung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- ▶ Maximum/Minimum erkennbar durch  $f'(x) = 0$ .
- ▶ Kettenregel:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) + g'(x)$$

(Wieder ein konvergierender Grenzwert, bester Fall.)

# Was ist Analysis? – II/A

- ▶ Funktionen sind nicht für alle geometrischen Objekte geeignet, beispielsweise für Kreise, Ellipse, Spiralen, ...

# Was ist Analysis? – II/A

- ▶ Funktionen sind nicht für alle geometrischen Objekte geeignet, beispielsweise für Kreise, Ellipse, Spiralen, ...
- ▶ Ausweg: Ebene Kurven über Parameterdarstellung

# Was ist Analysis? – II/A

- ▶ Funktionen sind nicht für alle geometrischen Objekte geeignet, beispielsweise für Kreise, Ellipse, Spiralen, ...
- ▶ Ausweg: Ebene Kurven über Parameterdarstellung
- ▶ Werkzeug: Komplexe Zahlen.

# Was ist Analysis? – II/A

- ▶ Funktionen sind nicht für alle geometrischen Objekte geeignet, beispielsweise für Kreise, Ellipse, Spiralen, ...
- ▶ Ausweg: Ebene Kurven über Parameterdarstellung
- ▶ Werkzeug: Komplexe Zahlen.

(Konvergierender Grenzwert? Krümmung  $k(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x} + \dot{y})^{3/2}}$ .)

# Was ist Analysis? – III

- ▶ Weiteres Objekt von Interesse: Flächenberechnung

# Was ist Analysis? – III

- ▶ Weiteres Objekt von Interesse: Flächenberechnung
- ▶ Werkzeug: Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

# Was ist Analysis? – III

- ▶ Weiteres Objekt von Interesse: Flächenberechnung
- ▶ Werkzeug: Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

# Was ist Analysis? – III

- ▶ Weiteres Objekt von Interesse: Flächenberechnung
- ▶ Werkzeug: Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

- ▶ Zusammenhang Integral-Ableitung über Fundamentalsatz

$$\left( \int_a^x f(y) \, dy \right)' = f(x)$$

# Was ist Analysis? – III

- ▶ Weiteres Objekt von Interesse: Flächenberechnung
- ▶ Werkzeug: Integral

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

- ▶ Zusammenhang Integral-Ableitung über Fundamentalsatz

$$\left( \int_a^x f(y) dy \right)' = f(x)$$

(Konvergierender Grenzwert: Check.)

# Was ist Analysis? – VIII

- ▶ Manchmal muss man aber nicht die Funktion präzise kennen, eine Approximation reicht

# Was ist Analysis? – VIII

- ▶ Manchmal muss man aber nicht die Funktion präzise kennen, eine Approximation reicht
- ▶ Werkzeug: Taylorreihe um  $x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

# Was ist Analysis? – VIII

- ▶ Manchmal muss man aber nicht die Funktion präzise kennen, eine Approximation reicht
- ▶ Werkzeug: Taylorreihe um  $x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

- ▶ Anwendung: Vereinfachungen, die hinreichend präzise Lösungen liefern

# Was ist Analysis? – VIII

- ▶ Manchmal muss man aber nicht die Funktion präzise kennen, eine Approximation reicht
- ▶ Werkzeug: Taylorreihe um  $x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

- ▶ Anwendung: Vereinfachungen, die hinreichend präzise Lösungen liefern

(Konvergierender Grenzwert)

# Was ist Analysis? – VIII

- ▶ Manchmal muss man aber nicht die Funktion präzise kennen, eine Approximation reicht
- ▶ Werkzeug: Taylorreihe um  $x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

- ▶ Anwendung: Vereinfachungen, die hinreichend präzise Lösungen liefern

(Konvergierender Grenzwert steckt in der unendlichen Summe.)

# Was ist Analysis? – IV

- ▶ Leider reicht eine Dimension nicht für unsere Welt.

# Was ist Analysis? – IV

- ▶ Leider reicht eine Dimension nicht für unsere Welt.
- ▶ Werkzeug: Mehrdimensionale Funktionen

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

# Was ist Analysis? – IV

- ▶ Leider reicht eine Dimension nicht für unsere Welt.
- ▶ Werkzeug: Mehrdimensionale Funktionen

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

- ▶ Werkzeug: Partielle Ableitungen

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

# Was ist Analysis? – IV

- ▶ Leider reicht eine Dimension nicht für unsere Welt.
- ▶ Werkzeug: Mehrdimensionale Funktionen

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

- ▶ Werkzeug: Partielle Ableitungen

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- ▶ Anwendungen auf Extremwerte, verallgemeinerte Kettenregel

# Was ist Analysis? – IV

- ▶ Leider reicht eine Dimension nicht für unsere Welt.
- ▶ Werkzeug: Mehrdimensionale Funktionen

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

- ▶ Werkzeug: Partielle Ableitungen

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- ▶ Anwendungen auf Extremwerte, verallgemeinerte Kettenregel  
(Konvergierender Grenzwert bla bla bla ...)

# Was ist Analysis? – V

- ▶ Analog: Mehrdimensionale Integrale

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

# Was ist Analysis? – V

- ▶ Analog: Mehrdimensionale Integrale

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

- ▶ Anwendungen: Berechnung von Schwerpunkt, Trägheitsmoment, etc

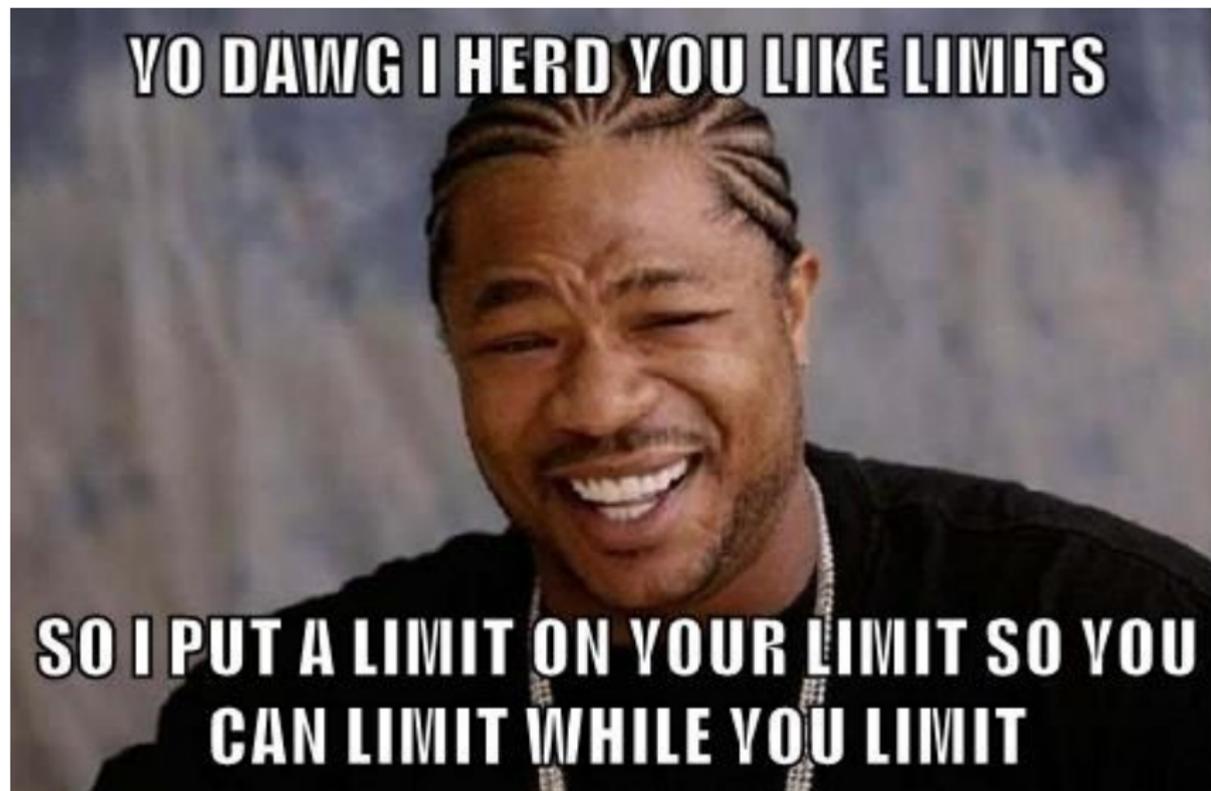
# Was ist Analysis? – V

- ▶ Analog: Mehrdimensionale Integrale

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

- ▶ Anwendungen: Berechnung von Schwerpunkt, Trägheitsmoment, etc
- ▶ Nützliches Werkzeug: Koordinatentransformationen

## Was ist Analysis? – V



# Was ist Analysis? – VI

- ▶ Bis jetzt betrachteten wir mehrdimensionale Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}$ . Doch damit lässt sich nicht alles beschreiben.

# Was ist Analysis? – VI

- ▶ Bis jetzt betrachteten wir mehrdimensionale Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}$ . Doch damit lässt sich nicht alles beschreiben.
- ▶ Also: Vektoren statt Werte, das nennt sich Vektorfeld:

$$\vec{v} : A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A \subset \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto \vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

# Was ist Analysis? – VI

- ▶ Bis jetzt betrachteten wir mehrdimensionale Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}$ . Doch damit lässt sich nicht alles beschreiben.
- ▶ Also: Vektoren statt Werte, das nennt sich Vektorfeld:

$$\vec{v} : A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A \subset \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto \vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

- ▶ ... und dann leiten wir auch diese ab.

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = v_{1,x}(x, y, z) + v_{2,y}(x, y, z) + v_{3,z}(x, y, z)$$

# Was ist Analysis? – VI

- ▶ Bis jetzt betrachteten wir mehrdimensionale Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}$ . Doch damit lässt sich nicht alles beschreiben.
- ▶ Also: Vektoren statt Werte, das nennt sich Vektorfeld:

$$\vec{v} : A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A \subset \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto \vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

- ▶ ... und dann leiten wir auch diese ab.

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = v_{1,x}(x, y, z) + v_{2,y}(x, y, z) + v_{3,z}(x, y, z)$$

(No comment.)

# Was ist Analysis? – VI

- ▶ Weiteres Werkzeug: Arbeit im Feld  $\vec{v}$  entlang eines Weges  $W$  mit Parametrisierung  $\vec{r}$

$$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

# Was ist Analysis? – VI

- ▶ Weiteres Werkzeug: Arbeit im Feld  $\vec{v}$  entlang eines Weges  $W$  mit Parametrisierung  $\vec{r}$

$$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

- ▶ Zur Berechnung nützlich: Sätze von Gauss und Stokes

# Was ist Analysis? – VI

- ▶ Weiteres Werkzeug: Arbeit im Feld  $\vec{v}$  entlang eines Weges  $W$  mit Parametrisierung  $\vec{r}$

$$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

- ▶ Zur Berechnung nützlich: Sätze von Gauss und Stokes
- ▶ Anwendungen: (Wärme-)Fluss berechnen, Energietransfer und -verbrauch, etc

# Was ist Analysis? – VI

- ▶ Weiteres Werkzeug: Arbeit im Feld  $\vec{v}$  entlang eines Weges  $W$  mit Parametrisierung  $\vec{r}$

$$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

- ▶ Zur Berechnung nützlich: Sätze von Gauss und Stokes
- ▶ Anwendungen: (Wärme-)Fluss berechnen, Energietransfer und -verbrauch, etc

(Are we there yet?)

# Was ist Analysis? – VI

- ▶ Weiteres Werkzeug: Arbeit im Feld  $\vec{v}$  entlang eines Weges  $W$  mit Parametrisierung  $\vec{r}$

$$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

- ▶ Zur Berechnung nützlich: Sätze von Gauss und Stokes
- ▶ Anwendungen: (Wärme-)Fluss berechnen, Energietransfer und -verbrauch, etc

(Are we there yet? No, as only the sky is the limit.)

## Was ist Analysis? – VII

- ▶ Bei physikalischen Systemen kommt die Problemstellung aber leider oft anders daher.

## Was ist Analysis? – VII

- ▶ Bei physikalischen Systemen kommt die Problemstellung aber leider oft anders daher.
- ▶ Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hängen als Ableitung voneinander ab

$$\dot{s} = v, \quad \dot{v} = a, \quad \ddot{s} = a$$

## Was ist Analysis? – VII

- ▶ Bei physikalischen Systemen kommt die Problemstellung aber leider oft anders daher.
- ▶ Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hängen als Ableitung voneinander ab

$$\dot{s} = v, \quad \dot{v} = a, \quad \ddot{s} = a$$

- ▶ Diese tauchen oft in einer Gleichung auf:  
Differentialgleichungen

$$\ddot{y} + y = 0, \quad \dot{y} = -ky, \quad m\ddot{x} = mg - a\dot{x}$$

## Was ist Analysis? – VII

- ▶ Bei physikalischen Systemen kommt die Problemstellung aber leider oft anders daher.
- ▶ Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hängen als Ableitung voneinander ab

$$\dot{s} = v, \quad \dot{v} = a, \quad \ddot{s} = a$$

- ▶ Diese tauchen oft in einer Gleichung auf:  
Differentialgleichungen

$$\ddot{y} + y = 0, \quad \dot{y} = -ky, \quad m\ddot{x} = mg - a\dot{x}$$

- ▶ Anwendungen: Einflüsse von Schwingkreisen, Dämpfung, Reibung, etc. berechnen

## Was ist Analysis? – VII

- ▶ Bei physikalischen Systemen kommt die Problemstellung aber leider oft anders daher.
- ▶ Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hängen als Ableitung voneinander ab

$$\dot{s} = v, \quad \dot{v} = a, \quad \dot{a} = \ddot{a}$$

- ▶ Diese tauchen oft in einer Gleichung auf:  
Differentialgleichungen

$$\ddot{y} + y = 0, \quad \dot{y} = -ky, \quad m\ddot{x} = mg - a\dot{x}$$

- ▶ Anwendungen: Einflüsse von Schwingkreisen, Dämpfung, Reibung, etc. berechnen

(Jetzt sind wir aber fertig.)

Von Herr Dr. A. Steiger empfohlen

Titel  
Stammbach Urs  
Analysis I/II, A, B, C +  
Aufgabensammlung

Studentenpreis  
CHF 23.80 pro Buch

Gesamtpaket: A,B, C +  
Aufgabensammlung  
Studentenpreis  
CHF 75.00

Erhältlich in den Filialen:

**ETH Store Polyterrasse**  
**Offen Mo-Fr 9-18 Uhr**

**ETH Store Höggerberg**  
**Offen Mo-Fr 8-18 Uhr**  
**Sa 11-16 Uhr**

Online bestellen:  
[www.eth-store.ch](http://www.eth-store.ch)

# Was ist Analysis?

- ▶ Eine schwierige mathematische Disziplin, dessen Kernfähigkeiten immer wieder gebraucht werden

# Was ist Analysis?

- ▶ Eine schwierige mathematische Disziplin, dessen Kernfähigkeiten immer wieder gebraucht werden
- ▶ Das grösste Fach Ihres Basisjahres, sowohl bezüglich Stundenzahl als auch ...

# Was ist Analysis?

- ▶ Eine schwierige mathematische Disziplin, dessen Kernfähigkeiten immer wieder gebraucht werden
- ▶ Das grösste Fach Ihres Basisjahres, sowohl bezüglich Stundenzahl als auch ...
- ▶ ... bezüglich des Notengewichts in der Basisprüfung

# Administratives: MyStudies

- ▶ Die zentrale Verwaltung für Veranstaltungen und Noten erfolgt an der ETH über MyStudies

[www.mystudies.ethz.ch](http://www.mystudies.ethz.ch)

- ▶ Schreiben Sie sich dort in alle Veranstaltungen des Basisjahres ein. Sonst erhalten Sie wichtige Informationen spät oder gar nicht.
- ▶ Bietet auch Stundenplanfunktionen, etc.

# Administratives: Veranstaltungen

- ▶ Vorlesung: Immer Mo & Fr 8:15–10:00 sowie Mi/2w<sup>1</sup> im HG F7 mit Videoübertragung ins HG F5
- ▶ Übungen MAVT: Fr 10:15–11:45 bzw. 12:30–14:00  
Übungen MATL: Fr 13:30–15:00
- ▶ Schnellübung: Mi/2w 08:15–10:00 abwechselnd zur Vorlesung
- ▶ Anwendungsübung MATL: Mi 10:15–11:00
- ▶ Alle Übungen finden nächste Woche erstmalig statt.

---

<sup>1</sup>alle 2 Wochen, beginnend heute

# Administratives: Übungsbetrieb

- ▶ Eine Übungsserie enthält immer einen Online-Teil und 3 Aufgaben
- ▶ Ausgabe Serie jeweils am Mittwoch, die erste nächste Woche
- ▶ Vorbesprechung in Übung am Freitag
- ▶ Abgabe am Mittwoch darauf, in Vorlesung oder Schnellübung
- ▶ Nachbesprechung und Rückgabe am Freitag
- ▶ In Schnell- und Anwendungsübungen wird das Material vor Ort verteilt, bearbeitet und besprochen

# Administratives: Weiteres Personal

- ▶ Hauptassistenten:
  - ▶ Felix Dräxler, felix.draexler@math.ethz.ch, Doktorand D-MATH
  - ▶ Dr. Jonathan Noel, jonathan.noel@math.ethz.ch, Post-Doc D-MATH
- ▶ 13 + 4 Hilfsassistenten, höhersemestrige Studierende aus D-MATH/MAVT/MATL

Bitte stellen Sie Ihre Fragen erst Ihren Hilfsassistenten und erst dann den Hauptassistenten oder mir.

# Administratives: ECHO

- ▶ Nachdem Sie sich auf MyStudies für die Vorlesung eingeschrieben haben, erhalten Sie Zugang zu ECHO: `echo.ethz.ch`
- ▶ Funktionen:
  - ▶ Vorlesungshomepage
  - ▶ Übungen
  - ▶ Lösungen
  - ▶ Online-Quizzes und Auswertungen
  - ▶ Einschreibung in Übungsgruppen
- ▶ Seite ist personalisiert und studiengangsspezifisch
- ▶ Beinhaltet auch alles zur Linearen Algebra

# Administratives: Zwischenprüfung

- ▶ Findet in der 2. Semesterwoche des Frühlingssemesters statt
- ▶ Nur Multiple-Choice-Fragen
- ▶ Falls die Zwischenprüfung besser ausfällt als die Basisprüfung, ergibt sich die Analysisnote zu 20% aus der Zwischenprüfung 20% und zu 80% aus der Basisprüfung.
- ▶ Sonst zählt nur die Basisprüfungsnote

# Administratives: ETH EduApp

- ▶ Smartphone-App der ETH (Android, iOS, Windows Phone)
- ▶ Nützliche Funktionen für Studierende (Stundenplan, Navigator, etc)
- ▶ Feedback-Kanal, anonymisiert
- ▶ In Vorlesung: 1x pro Lektion eine Single-Choice-Frage mit Diskussion
- ▶ Auch übers Web benutzbar: [eduapp-app1.ethz.ch](http://eduapp-app1.ethz.ch)

# Beispiel einer Basisprüfung

- ▶ Auf den nächsten Folien gehen wir kurz durch eine ganze Basisprüfung Analysis I/II durch
- ▶ Beispiel stammt vom Winter 2013 (Prof. G. Felder)
- ▶ Inhaltlich hat sich an der Vorlesung seither nichts geändert
- ▶ Vermutlich wird es dieses Jahr mehr Multiple Choice geben als im Beispiel

# Basisprüfung Winter 2013

D-MAVT & D-MATL  
Prof. Dr. Giovanni Felder

Analysis I & II

Winter 2013

## Prüfung

### Wichtig:

- Die Prüfung dauert **4 Stunden (240 Minuten)**.
- Verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe ein neues Blatt** und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer.
- Schreiben Sie in blauer oder schwarzer Farbe. Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie kein Tipp-Ex.
- Jede Aufgabe (ausser die Aufgabe 1) gibt gleich viele Punkte. Verweilen Sie deshalb nicht allzu lange bei einer Aufgabe, welche Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- **Sämtliche Resultate (ausser bei Aufgabe 1) müssen begründet werden, insbesondere müssen die Lösungswege ersichtlich sein.**

# Basisprüfung Winter 2013

## Zugelassene Hilfsmittel:

- Eine entweder handgeschriebene oder mit dem Computer selbst erzeugte Zusammenfassung von maximal 5 A4 Blättern (Schriftgrösse  $\geq 12\text{pt}$ ).
- Eine Formelsammlung. Zur Auswahl stehen:
  - DMK/DPK/DCK: Formeln, Tabellen, Begriffe. Mathematik-Physik-Chemie, Orell Füssli.
  - DMK/DPK: Formeln und Tafeln. Mathematik-Physik, Orell Füssli.
  - Commissions romandes de mathématique, physique et chimie: Formulaires et Tables, Edition du Tricorne.
- Keine weitere Bücher, kein Taschenrechner und keine Mobiltelefone sind erlaubt.

# Basisprüfung Winter 2013

Einige Formeln (die Sie nicht zu beweisen brauchen):

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

$$\int x^2 \cos(ax) dx = a^{-3}((a^2 x^2 - 2) \sin(ax) + 2ax \cos(ax)) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

# Basisprüfung Winter 2013

1. **Multiple Choice Aufgabe.** (10 Punkte) Kreuzen Sie W oder F an, je nachdem, ob die entsprechende Aussage wahr oder falsch ist. Begründungen sind nicht verlangt. Eine Frage wird mit 2 Punkten bewertet, wenn alle vier zugehörigen Aussagen korrekt angekreuzt werden, sonst mit 0 Punkten.
- (a) Die Taylorreihe von  $x \mapsto \sin(x)$  um  $x = \pi$
- W  F  hat Konvergenzradius  $\pi$ .
  - W  F  ist  $-(x - \pi) + \frac{1}{3!}(x - \pi)^3 - \frac{1}{5!}(x - \pi)^5 + \dots$
  - W  F  ist  $-(x - \pi) - \frac{1}{3!}(x - \pi)^3 - \frac{1}{5!}(x - \pi)^5 - \dots$
  - W  F  konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Der kritische Punkt  $(0, 0)$  der Funktion  $f: (x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)$ , auf  $\mathbb{R}^2$
- W  F  ist eine lokale Minimalstelle.
  - W  F  hat positiv definite Hesse-Matrix  $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ .
  - W  F  ist weder eine lokale Minimalstelle noch eine lokale Maximalstelle.
  - W  F  liegt auf dem Schnittpunkt von zwei Geraden, auf welchen  $f$  einen konstanten Wert annimmt.

# Basisprüfung Winter 2013

- (c) Das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty \frac{1}{2+x^a} dx$
- W  F  konvergiert für alle  $a > 1$ .
  - W  F  divergiert für  $a = 1$ .
  - W  F  konvergiert für alle  $a$  mit  $0 < a < 1$ .
  - W  F  konvergiert für alle  $a > 1$  und für alle  $a < 0$ .
- (d) Ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{v}(x, y, z)$  mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}^3$  erfülle  $\text{rot } \vec{v}(x, y, z) = 0$  für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Was folgt?
- W  F  Es gibt eine Funktion  $f(x, y, z)$  mit  $\vec{v} = \text{grad } f$ .
  - W  F  Der Fluss  $\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} dF$  durch jede Kreisscheibe  $D$  in der  $xy$ -Ebene verschwindet.
  - W  F  Der Fluss  $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dF$  durch jede Kugeloberfläche  $S$  verschwindet.
  - W  F  Die Arbeit  $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$  entlang jedes geschlossenen Wegs  $\gamma$  verschwindet.

# Basisprüfung Winter 2013

(e) Das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + y^2 \\ \dot{y} &= x + y\end{aligned}$$

W  F  hat unendlich viele Gleichgewichtspunkte.

W  F  hat unendlich viele Lösungen, die die Anfangsbedingung  $x(0) = 1, y(0) = 1$  erfüllen.

W  F  hat genau eine Lösung, die die Anfangsbedingung  $x(1) = 0, y(1) = 0$  erfüllt.

W  F  hat endlich viele Lösungen.

**Hinweis:** Sie brauchen das System *nicht* zu lösen.

2. (6 Punkte) Finden Sie die Lösung  $x(t)$  des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \dot{x}^2 &= -1 \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) &= 0,\end{aligned}$$

und bestimmen Sie das maximale Intervall, das 0 enthält und auf welchem die Lösung  $x(t)$  definiert ist.

# Basisprüfung Winter 2013

3. (6 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen  $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  des Differenzialgleichungssystems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \dot{y}(t) = x(t) \\ \dot{x}(t) + \dot{y}(t) = y(t). \end{cases}$$

4. (6 Punkte) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$\vec{v} = (xyz, y \sin(xz), x^3 + y^3 + z^3)$$

durch die Oberfläche des Würfels

$$W = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

von innen nach aussen.

# Basisprüfung Winter 2013

5. (6 Punkte)

(a) Finden Sie die Lösungen  $t \mapsto x(t)$ ,  $t > 0$ , der Differentialgleichung

$$t^2 \ddot{x}(t) - x(t) = t^3,$$

welche die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0$$

erfüllen.

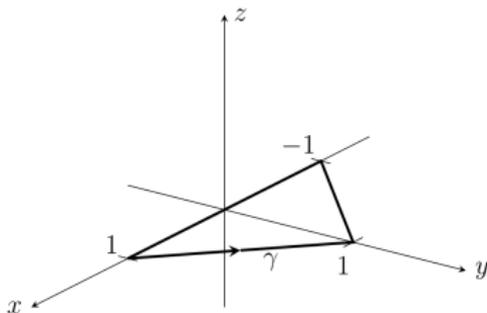
(b) Bestimmen Sie die Lösungen aus (a), die die zusätzliche Bedingung  $x(1) = 1$  erfüllen.

# Basisprüfung Winter 2013

6. (6 Punkte) Bestimmen Sie das Arbeitsintegral  $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}$  des Vektorfelds

$$\vec{v}(x, y, z) = \left( e^{y^2} + e^{z^2}, (2z + 1)xe^{z^2} + (2x + 1)ye^{y^2}, xyz e^{x^2 + y^2} \right)$$

entlang des in der Zeichnung abgebildeten, bestehend aus den Seiten des Dreiecks mit Eckpunkten  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(-1, 0, 0)$ , geschlossenen Wegs  $\gamma$ .



# Basisprüfung Winter 2013

7. (6 Punkte) (*Approximation der Kosinusfunktion im quadratischen Mittel*). Sei  $f$  die Funktion  $x \mapsto f(x) = a + bx^2$  mit reellen Parametern  $a$  und  $b$ . Bestimmen Sie  $a$  und  $b$  so, dass das Integral

$$\int_{-1}^1 (f(x) - \cos(\pi x))^2 dx$$

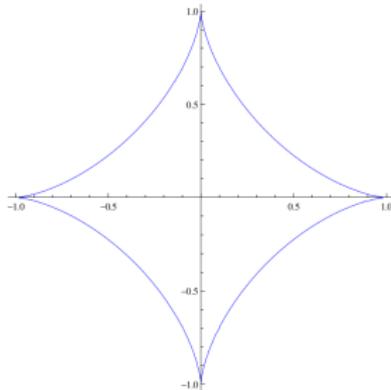
minimal wird. Begründen Sie warum das Integral für diese Werte tatsächlich minimal ist.

# Basisprüfung Winter 2013

8. (6 Punkte) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Rotationsfläche, die durch Drehen der abgebildeten Kurve um die  $x$ -Achse um  $180^\circ$  entsteht.

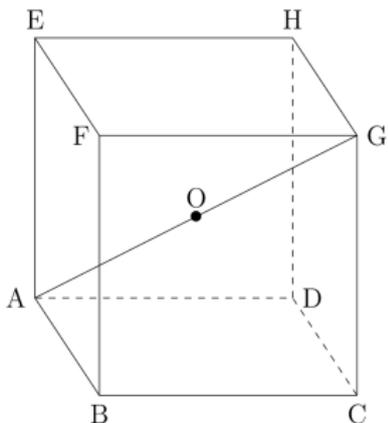
$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$$

um die  $x$ -Achse um  $180^\circ$  entsteht.



# Basisprüfung Winter 2013

9. (6 Punkte) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Würfels  $ABCDEFGH$  der Kantenlänge 2 bezüglich der abgebildeten Diagonale  $AG$ . Die Dichte  $\rho$  sei konstant.



**Hinweis:** Wählen Sie den Mittelpunkt des Würfels als Ursprung des Koordinatensystems.

# Basisprüfung Winter 2013

10. (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Länge  $L(t)$  des Graphen

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = \ln(x), t \leq x \leq 1\}$$

des natürlichen Logarithmus im Intervall  $[t, 1]$  für  $0 < t < 1$ .

(b) Bestimmen Sie den Koeffizient  $a_0$  in der Entwicklung

$$L(t) = \ln\left(\frac{1}{t}\right) + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

Viel Erfolg!

# Tipps von Abgängern



**Andreas**



September 5 at 4:43pm ·  ▼

What would you tell an engineering student on his first day at ETH? I have some ideas, but I'm sure you have more.

 Like

 Comment

 Share

---

Übungen lösen gibt kreative Ideen

# Tipps von Abgängern



**MSc MAVT ETH** Learn to code, thoroughly. It'll give you flexibility on the job market.

Like · Reply ·  2 · September 5 at 5:12pm

---

Übungen lösen gibt Flexibilität, aber nicht unbedingt in der Hüfte

# Tipps von Abgängern



**MSc ITET ETH, Dr. ITET EPFL** No women here! Turn around, before it is too late!

Unlike · Reply ·  3 · September 5 at 5:16pm

---

Übungen lösen kann längerfristig zu Erfolg bei der Partnersuche führen

# Tipps von Abgängern



**Dipl. Psych, Stud UMNW ETH** say goodbye to ladies, vacation and spare time for the next 3-5 years 😊

Like · Reply · September 5 at 5:22pm

# Tipps von Abgängern

 **MSc PHYS ETH, Doktorand PHYS ETH** take the winter between 1st and 2nd semester off, it will be the last free time forever!

Like · Reply ·  1 · September 5 at 5:52pm

---

Übungen lösen sollte man schon während des Semesters, sonst wird das nix mit Skiferien

# Tipps von Abgängern



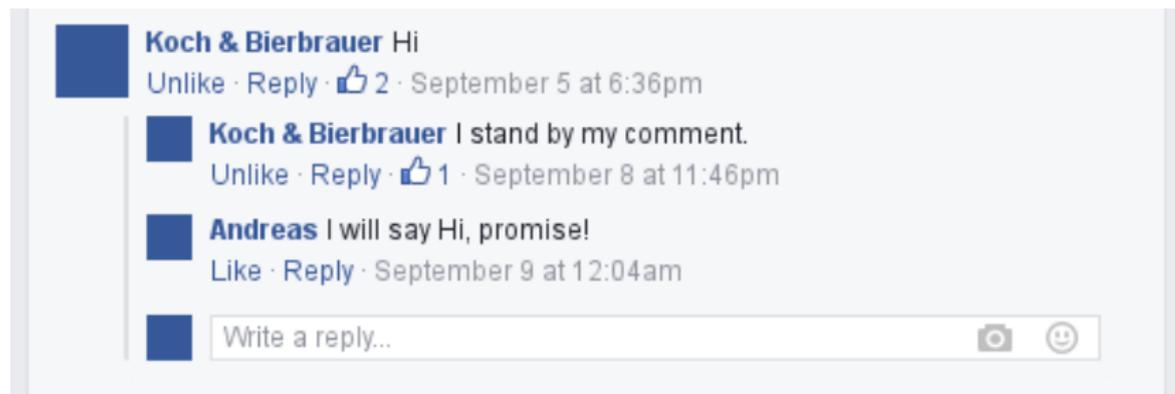
**Dr. PHYS, Consultant & CEO** Tell those boys that the best learning starts after ETH so don't get into the real world thinking they learnt everything and now they can teach...

[Like](#) · [Reply](#) · September 5 at 6:07pm

---

Übungen lösen hilft aber, seinen Mitstudierenden etwas beizubringen. Kann man sich ja mit Bier ausbezahlen lassen.

# Tipps von Abgängern



A screenshot of a Facebook comment thread. The background is light gray. The first comment is from 'Koch & Bierbrauer' with a blue profile picture, saying 'Hi'. Below it are the options 'Unlike · Reply · 2 likes' and the timestamp 'September 5 at 6:36pm'. The second comment is also from 'Koch & Bierbrauer', saying 'I stand by my comment.', with 'Unlike · Reply · 1 like' and 'September 8 at 11:46pm'. The third comment is from 'Andreas', saying 'I will say Hi, promise!', with 'Like · Reply' and 'September 9 at 12:04am'. At the bottom is a text input field with the placeholder 'Write a reply...' and icons for adding photos and emojis.

**Koch & Bierbrauer** Hi  
Unlike · Reply · 2 likes · September 5 at 6:36pm

**Koch & Bierbrauer** I stand by my comment.  
Unlike · Reply · 1 like · September 8 at 11:46pm

**Andreas** I will say Hi, promise!  
Like · Reply · September 9 at 12:04am

Write a reply...  

---

Übungen lösen macht dich zu einem besseren Menschen

# Tipps von Abgängern

**BSc ITET, ABB** Practical tip? Always pen and paper and draw/write your problem. Old methods work well.

Like · Reply · September 5 at 6:44pm

**MSc ITET, Dr. ITET ETH** I couldn't agree more. Tell them to put away their laptops and iPads. Pen and paper works best! Write a draw out everything!

Like · Reply · September 5 at 9:59pm

Write a reply...



---

Übungen löst man mit Papier und Bleistift. True story.

# Tipps von Abgängern



**Dipl. INFK ETH, Dr. INFK ETH, Prof. INFK** Do your homework (this gives you direct feedback on what you learned from the class). Go to class. Ask questions, as many as you can. Look up topics of interest online. Go network with your fellow students. Do extra curricular activities. Join a research project. Have fun! 😊

[Like](#) · [Reply](#) · September 5 at 7:45pm

---

Übungen lösen hilft, wenn man auch Professor werden will

# Tipps von Abgängern

**MSc MAVT ETH, Consultant** haha after reading these answers and having studied engineering myself I would for one agree with **MSc MAVT ETH** and second: "Help people wherever you can and don't hesitate to get help when you need it.. and also please don't forget to party hard, you can't just casually skip friday morning because you're hungover when you're working!! Also nobody wants do employ a socially incapable straight A student" 😞

Unlike · Reply · 👍 3 · September 5 at 8:27pm

---

Übungen lösen ist Teil des "Play Hard", bevor man zu "Party Hard" übergeht

# Tipps von Abgängern

Dipl. MATH ETH, Dr. INFK [http://img02.deviantart.net/.../abandon\\_all\\_hope\\_by...](http://img02.deviantart.net/.../abandon_all_hope_by...)



Unlike · Reply · Remove Preview ·  4 · September 5 at 10:34pm

---

Übungen lösen lässt einen hoffen, die Prüfung zu bestehen. Vielleicht.

# Tipps von Abgängern



**MSc ITET ETH, Freelance Programmierer** Our math prof had a shirt on with "math is hard" printed on it. Simple. True.

[Like](#) · [Reply](#) · September 5 at 11:32pm

---

Übungen lösen macht, dass man später auch Shirts mit zynischen Sprüchen tragen darf

# Tipps von Abgängern



**Informatiker, >20 Jahre Berufserfahrung** I would start with a quote from Gauss in German: "In nichts zeigt sich der Mangel an mathematischer Bildung mehr als in einer übertrieben genauen Rechnung."

Carl Friedrich Gauß

(1777 - 1855) deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker

Like · Reply ·  2 · September 6 at 1:21 pm · Edited

---

Übungen lösen hat Gauss zum Erfolg geführt

# Tipps von Abgängern



**BSc ITET, ABB** One general advice I liked: the brain works as a muscle. Remember to train it if you want to be good but also to let it relax. Closing line for our graduation speech was: "and now let's go for a coffee, because there will be plenty of that in your careers"

[Like](#) · [Reply](#) · September 6 at 6:08am

---

Übungen lösen ist wie ins Training zu gehen. Mit Kaffee statt Proteinshake.

# Tipps von Abgängern



**MSc ITET ETH, Doktorand ITET ETH** Study to learn, not to reproduce. A lesson I learnt much too late in my career at ETH...

Like · Reply ·  1 · September 6 at 11:27am

---

Übungen lösen. . . noch ist es nicht zu spät, das zu lernen

# Tipps von Abgängern



**MSc ITET ETH, IT Startup** Spend time at ETH doing other things than just learning: asvz, lab projects, fachverein, bastli, funkbude, sprachkurse... There's an abundance of such awesome stuff that you can use to gain experience. After eth, it's all gone or very expensive!

Like · Reply ·  2 · September 6 at 12:49pm

---

Übungen lösen ist auch nach der ETH noch gratis, aber ist etwas zu spät

# Tipps von Abgängern



**MSc ITET ETH, IT Consultant** Regarding maths: In order to pass the math exams at ETH, you primarily need to practice it, hard, understanding it won't help you.. (without practice you're too slow and make mistakes due to lack of routine)

[Like](#) · [Reply](#) · September 10 at 7:20pm



Write a comment...



---

Übungen lösen hilft aber auch beim Verständnis

**NOT SURE IF LECTURER IS  
TROLLING**

**OR EXERCISES ARE REALLY  
IMPORTANT**



# Was führt zum Erfolg?

- ▶ Aktive Mitarbeit: Stellen Sie Fragen, lösen Sie Übungen<sup>2</sup>, diskutieren Sie untereinander
- ▶ Hartnäckigkeit: Mathematik lernt sich nicht von einem Tag auf den nächsten.
- ▶ Aber auch Ausgleich muss sein. Nutzen sie die reichhaltigen Angebote von VSETH, AMIV, ASVZ, etc.

---

<sup>2</sup>Die ETH hat einen hochgradig signifikanten Zusammenhang zwischen Übungsabgabe und Basisprüfungserfolg festgestellt. So signifikant, dass jeder Psychologe neidisch werden muss.

# Was führt zum Erfolg?

- ▶ Aktive Mitarbeit: Stellen Sie Fragen, lösen Sie Übungen<sup>2</sup>, diskutieren Sie untereinander
- ▶ Hartnäckigkeit: Mathematik lernt sich nicht von einem Tag auf den nächsten.
- ▶ Aber auch Ausgleich muss sein. Nutzen sie die reichhaltigen Angebote von VSETH, AMIV, ASVZ, etc.

*Mathematics is not a spectator sport!*

---

<sup>2</sup>Die ETH hat einen hochgradig signifikanten Zusammenhang zwischen Übungsabgabe und Basisprüfungserfolg festgestellt. So signifikant, dass jeder Psychologe neidisch werden muss.