

Analysis I & II

D-MAVT, D-MATL

Dr. Andreas Steiger

HS 2016

Abriss eines Lebenslaufs

- ▶ BSc Mathematik ETH 2008, MSc Mathematik ETH 2009,
Dr.sc. ETH 2014

Abriss eines Lebenslaufs

- ▶ BSc Mathematik ETH 2008, MSc Mathematik ETH 2009, Dr.sc. ETH 2014
- ▶ Seit August 2015: Dozent im Lehrauftrag, Fach- & Mobilitätsberatung D-MATH

Abriss eines Lebenslaufs

- ▶ BSc Mathematik ETH 2008, MSc Mathematik ETH 2009, Dr.sc. ETH 2014
- ▶ Seit August 2015: Dozent im Lehrauftrag, Fach- & Mobilitätsberatung D-MATH
- ▶ Thurgauer, seit Studienbeginn in Zürich wohnhaft

Was ist Analysis? – I

Was ist Analysis? – I

- ▶ Analysis ist in erster Linie das Studium von Grenzwerten

Was ist Analysis? – I

- ▶ Analysis ist in erster Linie das Studium von Grenzwerten
- ▶ Folge: $(a_n)_n = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \subset \mathbb{R}$

Was ist Analysis? – I

- ▶ Analysis ist in erster Linie das Studium von Grenzwerten
- ▶ Folge: $(a_n)_n = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \subset \mathbb{R}$
- ▶ Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Mögliche Ergebnisse?

- ▶ (a_n) konvergiert gegen a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Mögliche Ergebnisse?

- ▶ (a_n) konvergiert gegen a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

- ▶ (a_n) wird beliebig gross (oder klein):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (oder } -\infty)$$

Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Mögliche Ergebnisse?

- ▶ (a_n) konvergiert gegen a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

- ▶ (a_n) wird beliebig gross (oder klein):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (oder } -\infty)$$

- ▶ (a_n) konvergiert nicht:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert nicht.}$$

Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Mögliche Ergebnisse?

- ▶ (a_n) konvergiert gegen a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

- ▶ (a_n) wird beliebig gross (oder klein):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (oder } -\infty)$$

- ▶ (a_n) konvergiert nicht:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert nicht.}$$

Bester Fall zum Weiterrechnen:

Was ist Analysis? – I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Mögliche Ergebnisse?

- ▶ (a_n) konvergiert gegen a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$$

- ▶ (a_n) wird beliebig gross (oder klein):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (oder } -\infty)$$

- ▶ (a_n) konvergiert nicht:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert nicht.}$$

Bester Fall zum Weiterrechnen: (a_n) konvergiert gegen a .

Was ist Analysis? – I

- ▶ Fast alles, was Sie antreffen werden, lässt sich irgendwie als Funktion schreiben. Einfacher Fall:

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Was ist Analysis? – I

- ▶ Fast alles, was Sie antreffen werden, lässt sich irgendwie als Funktion schreiben. Einfacher Fall:

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

- ▶ Stetigkeit: Für jedes $x_0 \in (a, b)$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Was ist Analysis? – I

- ▶ Fast alles, was Sie antreffen werden, lässt sich irgendwie als Funktion schreiben. Einfacher Fall:

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

- ▶ Stetigkeit: Für jedes $x_0 \in (a, b)$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

(Konvergierende Folgen, bester Fall.)

Was ist Analysis? – II

- ▶ Spezielle Punkte einer Funktion: Maximum, Minimum, Wendepunkte. . .

Was ist Analysis? – II

- ▶ Spezielle Punkte einer Funktion: Maximum, Minimum, Wendepunkte. . .
- ▶ Werkzeug: Ableitung beschreibt Steigung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Was ist Analysis? – II

- ▶ Spezielle Punkte einer Funktion: Maximum, Minimum, Wendepunkte. . .
- ▶ Werkzeug: Ableitung beschreibt Steigung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- ▶ Maximum/Minimum erkennbar durch $f'(x) = 0$.

Was ist Analysis? – II

- ▶ Spezielle Punkte einer Funktion: Maximum, Minimum, Wendepunkte. . .
- ▶ Werkzeug: Ableitung beschreibt Steigung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- ▶ Maximum/Minimum erkennbar durch $f'(x) = 0$.
- ▶ Kettenregel:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) + g'(x)$$

Was ist Analysis? – II

- ▶ Spezielle Punkte einer Funktion: Maximum, Minimum, Wendepunkte. . .
- ▶ Werkzeug: Ableitung beschreibt Steigung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- ▶ Maximum/Minimum erkennbar durch $f'(x) = 0$.
- ▶ Kettenregel:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) + g'(x)$$

(Wieder ein konvergierender Grenzwert, bester Fall.)

Was ist Analysis? – II/A

- ▶ Funktionen sind nicht für alle geometrischen Objekte geeignet, beispielsweise für Kreise, Ellipse, Spiralen, ...

Was ist Analysis? – II/A

- ▶ Funktionen sind nicht für alle geometrischen Objekte geeignet, beispielsweise für Kreise, Ellipse, Spiralen, ...
- ▶ Ausweg: Ebene Kurven über Parameterdarstellung

Was ist Analysis? – II/A

- ▶ Funktionen sind nicht für alle geometrischen Objekte geeignet, beispielsweise für Kreise, Ellipse, Spiralen, ...
- ▶ Ausweg: Ebene Kurven über Parameterdarstellung
- ▶ Werkzeug: Komplexe Zahlen.

Was ist Analysis? – II/A

- ▶ Funktionen sind nicht für alle geometrischen Objekte geeignet, beispielsweise für Kreise, Ellipse, Spiralen, ...
- ▶ Ausweg: Ebene Kurven über Parameterdarstellung
- ▶ Werkzeug: Komplexe Zahlen.

(Konvergierender Grenzwert? Krümmung $k(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x} + \dot{y})^{3/2}}$.)

Was ist Analysis? – III

- ▶ Weiteres Objekt von Interesse: Flächenberechnung

Was ist Analysis? – III

- ▶ Weiteres Objekt von Interesse: Flächenberechnung
- ▶ Werkzeug: Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

Was ist Analysis? – III

- ▶ Weiteres Objekt von Interesse: Flächenberechnung
- ▶ Werkzeug: Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Was ist Analysis? – III

- ▶ Weiteres Objekt von Interesse: Flächenberechnung
- ▶ Werkzeug: Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

- ▶ Zusammenhang Integral-Ableitung über Fundamentalsatz

$$\left(\int_a^x f(y) \, dy \right)' = f(x)$$

Was ist Analysis? – III

- ▶ Weiteres Objekt von Interesse: Flächenberechnung
- ▶ Werkzeug: Integral

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

- ▶ Zusammenhang Integral-Ableitung über Fundamentalsatz

$$\left(\int_a^x f(y) dy \right)' = f(x)$$

(Konvergierender Grenzwert: Check.)

Was ist Analysis? – VIII

- ▶ Manchmal muss man aber nicht die Funktion präzise kennen, eine Approximation reicht

Was ist Analysis? – VIII

- ▶ Manchmal muss man aber nicht die Funktion präzise kennen, eine Approximation reicht
- ▶ Werkzeug: Taylorreihe um x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Was ist Analysis? – VIII

- ▶ Manchmal muss man aber nicht die Funktion präzise kennen, eine Approximation reicht
- ▶ Werkzeug: Taylorreihe um x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

- ▶ Anwendung: Vereinfachungen, die hinreichend präzise Lösungen liefern

Was ist Analysis? – VIII

- ▶ Manchmal muss man aber nicht die Funktion präzise kennen, eine Approximation reicht
- ▶ Werkzeug: Taylorreihe um x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

- ▶ Anwendung: Vereinfachungen, die hinreichend präzise Lösungen liefern

(Konvergierender Grenzwert)

Was ist Analysis? – VIII

- ▶ Manchmal muss man aber nicht die Funktion präzise kennen, eine Approximation reicht
- ▶ Werkzeug: Taylorreihe um x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

- ▶ Anwendung: Vereinfachungen, die hinreichend präzise Lösungen liefern

(Konvergierender Grenzwert steckt in der unendlichen Summe.)

Was ist Analysis? – IV

- ▶ Leider reicht eine Dimension nicht für unsere Welt.

Was ist Analysis? – IV

- ▶ Leider reicht eine Dimension nicht für unsere Welt.
- ▶ Werkzeug: Mehrdimensionale Funktionen

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Was ist Analysis? – IV

- ▶ Leider reicht eine Dimension nicht für unsere Welt.
- ▶ Werkzeug: Mehrdimensionale Funktionen

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

- ▶ Werkzeug: Partielle Ableitungen

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Was ist Analysis? – IV

- ▶ Leider reicht eine Dimension nicht für unsere Welt.
- ▶ Werkzeug: Mehrdimensionale Funktionen

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

- ▶ Werkzeug: Partielle Ableitungen

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- ▶ Anwendungen auf Extremwerte, verallgemeinerte Kettenregel

Was ist Analysis? – IV

- ▶ Leider reicht eine Dimension nicht für unsere Welt.
- ▶ Werkzeug: Mehrdimensionale Funktionen

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

- ▶ Werkzeug: Partielle Ableitungen

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- ▶ Anwendungen auf Extremwerte, verallgemeinerte Kettenregel
(Konvergierender Grenzwert bla bla bla ...)

Was ist Analysis? – V

- ▶ Analog: Mehrdimensionale Integrale

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

Was ist Analysis? – V

- ▶ Analog: Mehrdimensionale Integrale

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

- ▶ Anwendungen: Berechnung von Schwerpunkt, Trägheitsmoment, etc

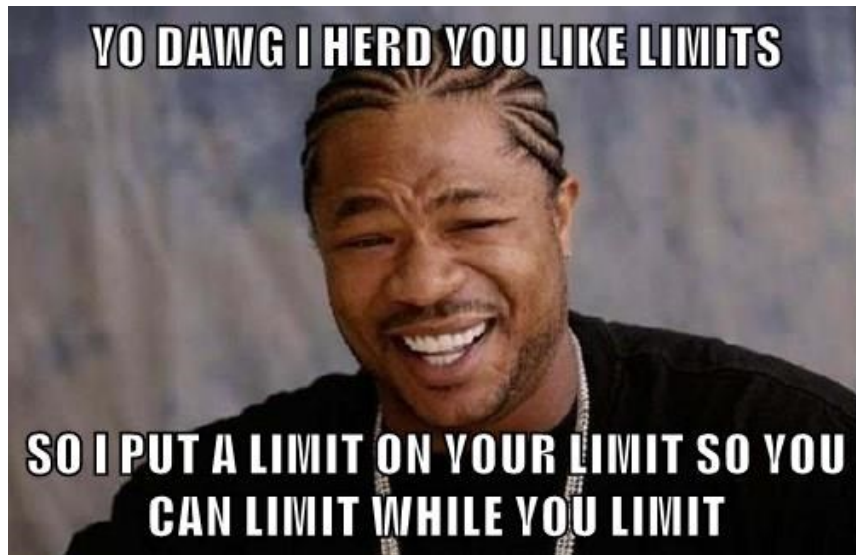
Was ist Analysis? – V

- ▶ Analog: Mehrdimensionale Integrale

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

- ▶ Anwendungen: Berechnung von Schwerpunkt, Trägheitsmoment, etc
- ▶ Nützliches Werkzeug: Koordinatentransformationen

Was ist Analysis? – V



Was ist Analysis? – VI

- ▶ Bis jetzt betrachteten wir mehrdimensionale Funktionen mit Werten in \mathbb{R} . Doch damit lässt sich nicht alles beschreiben.

Was ist Analysis? – VI

- ▶ Bis jetzt betrachteten wir mehrdimensionale Funktionen mit Werten in \mathbb{R} . Doch damit lässt sich nicht alles beschreiben.
- ▶ Also: Vektoren statt Werte, das nennt sich Vektorfeld:

$$\vec{v} : A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A \subset \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto \vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

Was ist Analysis? – VI

- ▶ Bis jetzt betrachteten wir mehrdimensionale Funktionen mit Werten in \mathbb{R} . Doch damit lässt sich nicht alles beschreiben.
- ▶ Also: Vektoren statt Werte, das nennt sich Vektorfeld:

$$\vec{v} : A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A \subset \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto \vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

- ▶ ... und dann leiten wir auch diese ab.

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = v_{1,x}(x, y, z) + v_{2,y}(x, y, z) + v_{3,z}(x, y, z)$$

Was ist Analysis? – VI

- ▶ Bis jetzt betrachteten wir mehrdimensionale Funktionen mit Werten in \mathbb{R} . Doch damit lässt sich nicht alles beschreiben.
- ▶ Also: Vektoren statt Werte, das nennt sich Vektorfeld:

$$\vec{v} : A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A \subset \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto \vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

- ▶ ... und dann leiten wir auch diese ab.

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = v_{1,x}(x, y, z) + v_{2,y}(x, y, z) + v_{3,z}(x, y, z)$$

(No comment.)

Was ist Analysis? – VI

- ▶ Weiteres Werkzeug: Arbeit im Feld \vec{v} entlang eines Weges W mit Parametrisierung \vec{r}

$$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

Was ist Analysis? – VI

- ▶ Weiteres Werkzeug: Arbeit im Feld \vec{v} entlang eines Weges W mit Parametrisierung \vec{r}

$$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

- ▶ Zur Berechnung nützlich: Sätze von Gauss und Stokes

Was ist Analysis? – VI

- ▶ Weiteres Werkzeug: Arbeit im Feld \vec{v} entlang eines Weges W mit Parametrisierung \vec{r}

$$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

- ▶ Zur Berechnung nützlich: Sätze von Gauss und Stokes
- ▶ Anwendungen: (Wärme-)Fluss berechnen, Energietransfer und -verbrauch, etc

Was ist Analysis? – VI

- ▶ Weiteres Werkzeug: Arbeit im Feld \vec{v} entlang eines Weges W mit Parametrisierung \vec{r}

$$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

- ▶ Zur Berechnung nützlich: Sätze von Gauss und Stokes
- ▶ Anwendungen: (Wärme-)Fluss berechnen, Energietransfer und -verbrauch, etc

(Are we there yet?)

Was ist Analysis? – VI

- ▶ Weiteres Werkzeug: Arbeit im Feld \vec{v} entlang eines Weges W mit Parametrisierung \vec{r}

$$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{v}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$$

- ▶ Zur Berechnung nützlich: Sätze von Gauss und Stokes
- ▶ Anwendungen: (Wärme-)Fluss berechnen, Energietransfer und -verbrauch, etc

(Are we there yet? No, as only the sky is the limit.)

Was ist Analysis? – VII

- ▶ Bei physikalischen Systemen kommt die Problemstellung aber leider oft anders daher.

Was ist Analysis? – VII

- ▶ Bei physikalischen Systemen kommt die Problemstellung aber leider oft anders daher.
- ▶ Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hängen als Ableitung voneinander ab

$$\dot{s} = v, \quad \dot{v} = a, \quad \ddot{s} = a$$

Was ist Analysis? – VII

- ▶ Bei physikalischen Systemen kommt die Problemstellung aber leider oft anders daher.
- ▶ Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hängen als Ableitung voneinander ab

$$\dot{s} = v, \quad \dot{v} = a, \quad \ddot{s} = a$$

- ▶ Diese tauchen oft in einer Gleichung auf:
Differentialgleichungen

$$\ddot{y} + y = 0, \quad \dot{y} = -ky, \quad m\ddot{x} = mg - a\dot{x}$$

Was ist Analysis? – VII

- ▶ Bei physikalischen Systemen kommt die Problemstellung aber leider oft anders daher.
- ▶ Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hängen als Ableitung voneinander ab

$$\dot{s} = v, \quad \dot{v} = a, \quad \ddot{s} = a$$

- ▶ Diese tauchen oft in einer Gleichung auf:
Differentialgleichungen

$$\ddot{y} + y = 0, \quad \dot{y} = -ky, \quad m\ddot{x} = mg - a\dot{x}$$

- ▶ Anwendungen: Einflüsse von Schwingkreisen, Dämpfung, Reibung, etc. berechnen

Was ist Analysis? – VII

- ▶ Bei physikalischen Systemen kommt die Problemstellung aber leider oft anders daher.
- ▶ Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hängen als Ableitung voneinander ab

$$\dot{s} = v, \quad \dot{v} = a, \quad \dot{a} = \ddot{a}$$

- ▶ Diese tauchen oft in einer Gleichung auf:
Differentialgleichungen

$$\ddot{y} + y = 0, \quad \dot{y} = -ky, \quad m\ddot{x} = mg - a\dot{x}$$

- ▶ Anwendungen: Einflüsse von Schwingkreisen, Dämpfung, Reibung, etc. berechnen

(Jetzt sind wir aber fertig.)

Von Herr Dr. A. Steiger empfohlen

Titel
Stammbach Urs
Analysis I/II, A, B, C +
Aufgabensammlung

Studentenpreis
CHF 23.80 pro Buch

Gesamtpaket: A,B, C +
Aufgabensammlung
Studentenpreis
CHF 75.00

Erhältlich in den Filialen:

ETH Store Polyterrasse
Offen Mo-Fr 9-18 Uhr

ETH Store Höggerberg
Offen Mo-Fr 8-18 Uhr
Sa 11-16 Uhr

Online bestellen:
www.eth-store.ch

Was ist Analysis?

- ▶ Eine schwierige mathematische Disziplin, dessen Kernfähigkeiten immer wieder gebraucht werden

Was ist Analysis?

- ▶ Eine schwierige mathematische Disziplin, dessen Kernfähigkeiten immer wieder gebraucht werden
- ▶ Das grösste Fach Ihres Basisjahres, sowohl bezüglich Stundenzahl als auch ...

Was ist Analysis?

- ▶ Eine schwierige mathematische Disziplin, dessen Kernfähigkeiten immer wieder gebraucht werden
- ▶ Das grösste Fach Ihres Basisjahres, sowohl bezüglich Stundenzahl als auch ...
- ▶ ... bezüglich des Notengewichts in der Basisprüfung

Administratives: MyStudies

- ▶ Die zentrale Verwaltung für Veranstaltungen und Noten erfolgt an der ETH über MyStudies

www.mystudies.ethz.ch

- ▶ Schreiben Sie sich dort in alle Veranstaltungen des Basisjahres ein. Sonst erhalten Sie wichtige Informationen spät oder gar nicht.
- ▶ Bietet auch Stundenplanfunktionen, etc.

Administratives: Veranstaltungen

- ▶ Vorlesung: Immer Mo & Fr 8:15–10:00 sowie Mi/2w¹ im HG F7 mit Videoübertragung ins HG F5
- ▶ Übungen MAVT: Fr 10:15–11:45 bzw. 12:30–14:00
Übungen MATL: Fr 13:30–15:00
- ▶ Schnellübung: Mi/2w 08:15–10:00 abwechselnd zur Vorlesung
- ▶ Anwendungsübung MATL: Mi 10:15–11:00
- ▶ Alle Übungen finden nächste Woche erstmalig statt.

¹alle 2 Wochen, beginnend heute

Administratives: Übungsbetrieb

- ▶ Eine Übungsserie enthält immer einen Online-Teil und 3 Aufgaben
- ▶ Ausgabe Serie jeweils am Mittwoch, die erste nächste Woche
- ▶ Vorbesprechung in Übung am Freitag
- ▶ Abgabe am Mittwoch darauf, in Vorlesung oder Schnellübung
- ▶ Nachbesprechung und Rückgabe am Freitag
- ▶ In Schnell- und Anwendungsübungen wird das Material vor Ort verteilt, bearbeitet und besprochen

Administratives: Weiteres Personal

- ▶ Hauptassistenten:
 - ▶ Felix Dräxler, felix.draexler@math.ethz.ch, Doktorand D-MATH
 - ▶ Dr. Jonathan Noel, jonathan.noel@math.ethz.ch, Post-Doc D-MATH
- ▶ 13 + 4 Hilfsassistenten, höhersemestrige Studierende aus D-MATH/MAVT/MATL

Bitte stellen Sie Ihre Fragen erst Ihren Hilfsassistenten und erst dann den Hauptassistenten oder mir.

Administratives: ECHO

- ▶ Nachdem Sie sich auf MyStudies für die Vorlesung eingeschrieben haben, erhalten Sie Zugang zu ECHO: `echo.ethz.ch`
- ▶ Funktionen:
 - ▶ Vorlesungshomepage
 - ▶ Übungen
 - ▶ Lösungen
 - ▶ Online-Quizzes und Auswertungen
 - ▶ Einschreibung in Übungsgruppen
- ▶ Seite ist personalisiert und studiengangsspezifisch
- ▶ Beinhaltet auch alles zur Linearen Algebra

Administratives: Zwischenprüfung

- ▶ Findet in der 2. Semesterwoche des Frühlingssemesters statt
- ▶ Nur Multiple-Choice-Fragen
- ▶ Falls die Zwischenprüfung besser ausfällt als die Basisprüfung, ergibt sich die Analysisnote zu 20% aus der Zwischenprüfung 20% und zu 80% aus der Basisprüfung.
- ▶ Sonst zählt nur die Basisprüfungsnote

Administratives: ETH EduApp

- ▶ Smartphone-App der ETH (Android, iOS, Windows Phone)
- ▶ Nützliche Funktionen für Studierende (Stundenplan, Navigator, etc)
- ▶ Feedback-Kanal, anonymisiert
- ▶ In Vorlesung: 1x pro Lektion eine Single-Choice-Frage mit Diskussion
- ▶ Auch übers Web benutzbar: eduapp-app1.ethz.ch

Beispiel einer Basisprüfung

- ▶ Auf den nächsten Folien gehen wir kurz durch eine ganze Basisprüfung Analysis I/II durch
- ▶ Beispiel stammt vom Winter 2013 (Prof. G. Felder)
- ▶ Inhaltlich hat sich an der Vorlesung seither nichts geändert
- ▶ Vermutlich wird es dieses Jahr mehr Multiple Choice geben als im Beispiel

Basisprüfung Winter 2013

D-MAVT & D-MATL
Prof. Dr. Giovanni Felder

Analysis I & II

Winter 2013

Prüfung

Wichtig:

- Die Prüfung dauert **4 Stunden (240 Minuten)**.
- Verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe ein neues Blatt** und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer.
- Schreiben Sie in blauer oder schwarzer Farbe. Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie kein Tipp-Ex.
- Jede Aufgabe (ausser die Aufgabe 1) gibt gleich viele Punkte. Verweilen Sie deshalb nicht allzu lange bei einer Aufgabe, welche Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- **Sämtliche Resultate (ausser bei Aufgabe 1) müssen begründet werden, insbesondere müssen die Lösungswege ersichtlich sein.**

Basisprüfung Winter 2013

Zugelassene Hilfsmittel:

- Eine entweder handgeschriebene oder mit dem Computer selbst erzeugte Zusammenfassung von maximal 5 A4 Blättern (Schriftgrösse $\geq 12\text{pt}$).
- Eine Formelsammlung. Zur Auswahl stehen:
 - DMK/DPK/DCK: Formeln, Tabellen, Begriffe. Mathematik-Physik-Chemie, Orell Füssli.
 - DMK/DPK: Formeln und Tafeln. Mathematik-Physik, Orell Füssli.
 - Commissions romandes de mathématique, physique et chimie: Formulaires et Tables, Edition du Tricorne.
- Keine weitere Bücher, kein Taschenrechner und keine Mobiltelefone sind erlaubt.

Basisprüfung Winter 2013

Einige Formeln (die Sie nicht zu beweisen brauchen):

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

$$\int x^2 \cos(ax) dx = a^{-3}((a^2 x^2 - 2) \sin(ax) + 2ax \cos(ax)) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

Basisprüfung Winter 2013

1. **Multiple Choice Aufgabe.** (10 Punkte) Kreuzen Sie W oder F an, je nachdem, ob die entsprechende Aussage wahr oder falsch ist. Begründungen sind nicht verlangt. Eine Frage wird mit 2 Punkten bewertet, wenn alle vier zugehörigen Aussagen korrekt angekreuzt werden, sonst mit 0 Punkten.
- (a) Die Taylorreihe von $x \mapsto \sin(x)$ um $x = \pi$
- W F hat Konvergenzradius π .
 - W F ist $-(x - \pi) + \frac{1}{3!}(x - \pi)^3 - \frac{1}{5!}(x - \pi)^5 + \dots$
 - W F ist $-(x - \pi) - \frac{1}{3!}(x - \pi)^3 - \frac{1}{5!}(x - \pi)^5 - \dots$
 - W F konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Der kritische Punkt $(0, 0)$ der Funktion $f: (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y)$, auf \mathbb{R}^2
- W F ist eine lokale Minimalstelle.
 - W F hat positiv definite Hesse-Matrix $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$.
 - W F ist weder eine lokale Minimalstelle noch eine lokale Maximalstelle.
 - W F liegt auf dem Schnittpunkt von zwei Geraden, auf welchen f einen konstanten Wert annimmt.

Basisprüfung Winter 2013

- (c) Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{2+x^a} dx$
- W F konvergiert für alle $a > 1$.
- W F divergiert für $a = 1$.
- W F konvergiert für alle a mit $0 < a < 1$.
- W F konvergiert für alle $a > 1$ und für alle $a < 0$.
- (d) Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$ mit Definitionsbereich \mathbb{R}^3 erfülle $\text{rot } \vec{v}(x, y, z) = 0$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Was folgt?
- W F Es gibt eine Funktion $f(x, y, z)$ mit $\vec{v} = \text{grad } f$.
- W F Der Fluss $\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} dF$ durch jede Kreisscheibe D in der xy -Ebene verschwindet.
- W F Der Fluss $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dF$ durch jede Kugeloberfläche S verschwindet.
- W F Die Arbeit $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$ entlang jedes geschlossenen Wegs γ verschwindet.

Basisprüfung Winter 2013

(e) Das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + y^2 \\ \dot{y} &= x + y\end{aligned}$$

W F hat unendlich viele Gleichgewichtspunkte.

W F hat unendlich viele Lösungen, die die Anfangsbedingung $x(0) = 1, y(0) = 1$ erfüllen.

W F hat genau eine Lösung, die die Anfangsbedingung $x(1) = 0, y(1) = 0$ erfüllt.

W F hat endlich viele Lösungen.

Hinweis: Sie brauchen das System *nicht* zu lösen.

2. (6 Punkte) Finden Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \dot{x}^2 &= -1 \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) &= 0,\end{aligned}$$

und bestimmen Sie das maximale Intervall, das 0 enthält und auf welchem die Lösung $x(t)$ definiert ist.

Basisprüfung Winter 2013

3. (6 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ des Differenzialgleichungssystems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \dot{y}(t) = x(t) \\ \dot{x}(t) + \dot{y}(t) = y(t). \end{cases}$$

4. (6 Punkte) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$\vec{v} = (xyz, y \sin(xz), x^3 + y^3 + z^3)$$

durch die Oberfläche des Würfels

$$W = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

von innen nach aussen.

Basisprüfung Winter 2013

5. (6 Punkte)

(a) Finden Sie die Lösungen $t \mapsto x(t)$, $t > 0$, der Differentialgleichung

$$t^2 \ddot{x}(t) - x(t) = t^3,$$

welche die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0$$

erfüllen.

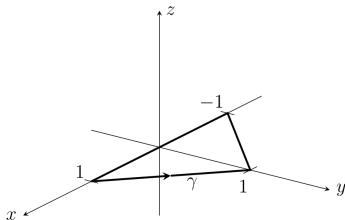
(b) Bestimmen Sie die Lösungen aus (a), die die zusätzliche Bedingung $x(1) = 1$ erfüllen.

Basisprüfung Winter 2013

6. (6 Punkte) Bestimmen Sie das Arbeitsintegral $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ des Vektorfelds

$$\vec{v}(x, y, z) = \left(e^{y^2} + e^{z^2}, (2z + 1)xe^{z^2} + (2x + 1)ye^{y^2}, xyz e^{x^2 + y^2} \right)$$

entlang des in der Zeichnung abgebildeten, bestehend aus den Seiten des Dreiecks mit Eckpunkten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, geschlossenen Wegs γ .



Basisprüfung Winter 2013

7. (6 Punkte) (*Approximation der Kosinusfunktion im quadratischen Mittel*). Sei f die Funktion $x \mapsto f(x) = a + bx^2$ mit reellen Parametern a und b . Bestimmen Sie a und b so, dass das Integral

$$\int_{-1}^1 (f(x) - \cos(\pi x))^2 dx$$

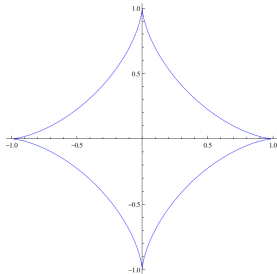
minimal wird. Begründen Sie warum das Integral für diese Werte tatsächlich minimal ist.

Basisprüfung Winter 2013

8. (6 Punkte) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Rotationsfläche, die durch Drehen der abgebildeten Kurve um die x -Achse um 180° entsteht.

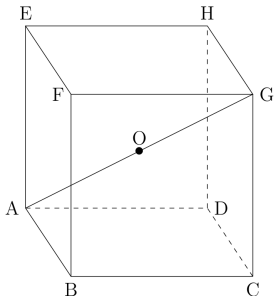
$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$$

um die x -Achse um 180° entsteht.



Basisprüfung Winter 2013

9. (6 Punkte) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Würfels $ABCDEFGH$ der Kantenlänge 2 bezüglich der abgebildeten Diagonale AG . Die Dichte ρ sei konstant.



Hinweis: Wählen Sie den Mittelpunkt des Würfels als Ursprung des Koordinatensystems.

Basisprüfung Winter 2013

10. (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Länge $L(t)$ des Graphen

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = \ln(x), t \leq x \leq 1\}$$

des natürlichen Logarithmus im Intervall $[t, 1]$ für $0 < t < 1$.

(b) Bestimmen Sie den Koeffizient a_0 in der Entwicklung

$$L(t) = \ln\left(\frac{1}{t}\right) + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

Viel Erfolg!

Tipps von Abgängern



Andreas



September 5 at 4:43pm ·  ▼

What would you tell an engineering student on his first day at ETH? I have some ideas, but I'm sure you have more.

 Like

 Comment

 Share

Übungen lösen gibt kreative Ideen

Tipps von Abgängern



MSc MAVT ETH Learn to code, thoroughly. It'll give you flexibility on the job market.

Like · Reply ·  2 · September 5 at 5:12pm

Übungen lösen gibt Flexibilität, aber nicht unbedingt in der Hüfte

Tipps von Abgängern



MSc ITET ETH, Dr. ITET EPFL No women here! Turn around, before it is too late!

Unlike · Reply ·  3 · September 5 at 5:16pm

Übungen lösen kann längerfristig zu Erfolg bei der Partnersuche führen


Tipps von Abgängern



Dipl. Psych, Stud UMNW ETH say goodbye to ladies, vacation and spare time for the next 3-5 years 😊

Like · Reply · September 5 at 5:22pm

Tipps von Abgängern

 **MSc PHYS ETH, Doktorand PHYS ETH** take the winter between 1st and 2nd semester off, it will be the last free time forever!

Like · Reply ·  1 · September 5 at 5:52pm

Übungen lösen sollte man schon während des Semesters, sonst wird das nix mit Skiferien

Tipps von Abgängern

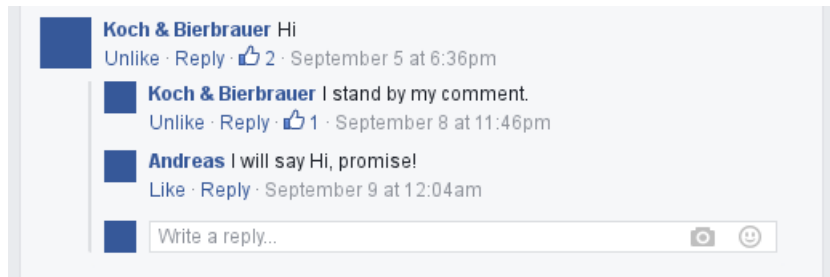



Dr. PHYS, Consultant & CEO Tell those boys that the best learning starts after ETH so don't get into the real world thinking they learnt everything and now they can teach...


[Like](#) · [Reply](#) · September 5 at 6:07pm


Übungen lösen hilft aber, seinen Mitstudierenden etwas beizubringen. Kann man sich ja mit Bier ausbezahlen lassen.

Tipps von Abgängern





A screenshot of a Facebook comment thread. The background is light gray. The first comment is from 'Koch & Bierbrauer' with a blue profile picture, saying 'Hi'. Below it are the options 'Unlike · Reply ·  2 · September 5 at 6:36pm'. The second comment is also from 'Koch & Bierbrauer' with a blue profile picture, saying 'I stand by my comment.' Below it are the options 'Unlike · Reply ·  1 · September 8 at 11:46pm'. The third comment is from 'Andreas' with a blue profile picture, saying 'I will say Hi, promise!' Below it are the options 'Like · Reply · September 9 at 12:04am'. At the bottom is a text input field with the placeholder 'Write a reply...' and icons for adding photos and emojis.

Koch & Bierbrauer Hi
Unlike · Reply ·  2 · September 5 at 6:36pm

Koch & Bierbrauer I stand by my comment.
Unlike · Reply ·  1 · September 8 at 11:46pm

Andreas I will say Hi, promise!
Like · Reply · September 9 at 12:04am

Write a reply...  

Übungen lösen macht dich zu einem besseren Menschen

Tipps von Abgängern

BSc ITET, ABB Practical tip? Always pen and paper and draw/write your problem. Old methods work well.

Like · Reply · September 5 at 6:44pm

MSc ITET, Dr. ITET ETH I couldn't agree more. Tell them to put away their laptops and iPads. Pen and paper works best! Write a draw out everything!

Like · Reply · September 5 at 9:59pm

Write a reply...



Übungen löst man mit Papier und Bleistift. True story.

Tipps von Abgängern



Dipl. INFK ETH, Dr. INFK ETH, Prof. INFK Do your homework (this gives you direct feedback on what you learned from the class). Go to class. Ask questions, as many as you can. Look up topics of interest online. Go network with your fellow students. Do extra curricular activities. Join a research project. Have fun! 😊

[Like](#) · [Reply](#) · September 5 at 7:45pm

Tipps von Abgängern

MSc MAVT ETH, Consultant haha after reading these answers and having studied engineering myself I would for one agree with **MSc MAVT ETH** and second: "Help people wherever you can and don't hesitate to get help when you need it.. and also please don't forget to party hard, you can't just casually skip friday morning because you're hungover when you're working!! Also nobody wants do employ a socially incapable straight A student" 😞

Unlike · Reply · 👍 3 · September 5 at 8:27pm

Übungen lösen ist Teil des "Play Hard", bevor man zu "Party Hard" übergeht

Tipps von Abgängern

Dipl. MATH ETH, Dr. INFK http://img02.deviantart.net/.../abandon_all_hope_by...



Unlike · Reply · Remove Preview ·  4 · September 5 at 10:34pm

Übungen lösen lässt einen hoffen, die Prüfung zu bestehen. Vielleicht.

Tipps von Abgängern



MSc ITET ETH, Freelance Programmierer Our math prof had a shirt on with "math is hard" printed on it. Simple. True.

[Like](#) · [Reply](#) · September 5 at 11:32pm

Übungen lösen macht, dass man später auch Shirts mit zynischen Sprüchen tragen darf

Tipps von Abgängern



Informatiker, >20 Jahre Berufserfahrung I would start with a quote from Gauss in German: "In nichts zeigt sich der Mangel an mathematischer Bildung mehr als in einer übertrieben genauen Rechnung."

Carl Friedrich Gauß

(1777 - 1855) deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker

Like · Reply ·  2 · September 6 at 1:21 pm · Edited

Übungen lösen hat Gauss zum Erfolg geführt

Tipps von Abgängern



BSc ITET, ABB One general advice I liked: the brain works as a muscle. Remember to train it if you want to be good but also to let it relax. Closing line for our graduation speech was: "and now let's go for a coffee, because there will be plenty of that in your careers"

[Like](#) · [Reply](#) · September 6 at 6:08am

Übungen lösen ist wie ins Training zu gehen. Mit Kaffee statt Proteinshake.

Tipps von Abgängern



MSc ITET ETH, Doktorand ITET ETH Study to learn, not to reproduce. A lesson I learnt much too late in my career at ETH...

Like · Reply ·  1 · September 6 at 11:27am

Übungen lösen... noch ist es nicht zu spät, das zu lernen

Tipps von Abgängern

MSc ITET ETH, IT Startup Spend time at ETH doing other things than just learning: asvz, lab projects, fachverein, bastli, funkbude, sprachkurse... There's an abundance of such awesome stuff that you can use to gain experience. After eth, it's all gone or very expensive!

Like · Reply ·  2 · September 6 at 12:49pm

Übungen lösen ist auch nach der ETH noch gratis, aber ist etwas zu spät

Tipps von Abgängern



MSc ITET ETH, IT Consultant Regarding maths: In order to pass the math exams at ETH, you primarily need to practice it, hard, understanding it won't help you.. (without practice you're too slow and make mistakes due to lack of routine)

[Like](#) · [Reply](#) · September 10 at 7:20pm



Write a comment...



Übungen lösen hilft aber auch beim Verständnis

**NOT SURE IF LECTURER IS
TROLLING**

**OR EXERCISES ARE REALLY
IMPORTANT**



Was führt zum Erfolg?

- ▶ Aktive Mitarbeit: Stellen Sie Fragen, lösen Sie Übungen², diskutieren Sie untereinander
- ▶ Hartnäckigkeit: Mathematik lernt sich nicht von einem Tag auf den nächsten.
- ▶ Aber auch Ausgleich muss sein. Nutzen sie die reichhaltigen Angebote von VSETH, AMIV, ASVZ, etc.

²Die ETH hat einen hochgradig signifikanten Zusammenhang zwischen Übungsabgabe und Basisprüfungserfolg festgestellt. So signifikant, dass jeder Psychologe neidisch werden muss.

Was führt zum Erfolg?

- ▶ Aktive Mitarbeit: Stellen Sie Fragen, lösen Sie Übungen², diskutieren Sie untereinander
- ▶ Hartnäckigkeit: Mathematik lernt sich nicht von einem Tag auf den nächsten.
- ▶ Aber auch Ausgleich muss sein. Nutzen sie die reichhaltigen Angebote von VSETH, AMIV, ASVZ, etc.

Mathematics is not a spectator sport!

²Die ETH hat einen hochgradig signifikanten Zusammenhang zwischen Übungsabgabe und Basisprüfungserfolg festgestellt. So signifikant, dass jeder Psychologe neidisch werden muss.