Eichstätter Kolloquium zur
Didaktik der Mathematik

Februar 2010

Das Vierfarbenproblem und verwandte Fragestellungen

Cornelia Minette Busch

1 Das Vierfarbenproblem

Wenn Schüler eine politische Landkarte so einfärben sollen, daß man möglichst gut die Grenzen zwischen benachbarten Ländern erkennen kann, so müssen sie für Länder mit einer gemeinsamen Grenzlinie verschiedene Farben wählen. Wieviele verschiedene Farben brauchen die Schüler, um diese Aufgabe für jede Landkarte lösen zu können?

Heute weiß man, daß der Vierfarbensatz gilt. Dieser besagt, daß vier Farben für jede Landkarte auf dem Globus genügen. Es hat aber mehr als ein Jahrhundert gedauert, bis man unter dem Einsatz von Computern das Vierfarbenproblem hat lösen können, und auch heute existiert kein Beweis des Vierfarbensatzes, der ohne Rechner auskommt.

1.1 Drei Farben?

Das folgende Beispiel zeigt, warum drei Farben nicht ausreichen. Das Land in der Kreismitte muß in einer vierten Farben gefärbt werden, da für die drei Länder im Kreisring schon drei Farben gebraucht werden.

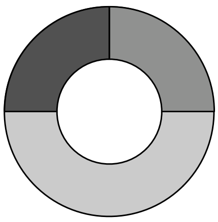


Abbildung 1: Drei Farben reichen nicht!

1.2 Voraussetzungen

Damit der Vierfarbensatz gilt, müssen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein. In jeder Landkarte soll jedes Land zusammenhängend sein. Alaska muß also ein eigenständiges Land sein. In der Abbildung 2 ist das Land L nicht zusammenhängend und man braucht fünf

Farben, da das äußere schwarze Land mit allen vier inneren Ländern gemeinsame Grenzen besitzt.

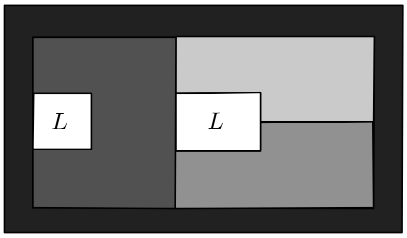


Abbildung 2: Das Land L ist nicht zusammenhängend.

Außerdem müssen Länder, die nur einen gemeinsamen Grenzstein haben, nicht verschieden gefärbt sein. Hätten wir andernfalls eine Landkarte, die wie eine Torte aussieht in der jedes Kuchenstück ein eigenes Land ist, so bräuchten wir so viele Farben, wie wir Tortenstücke haben.

Wir betrachten Landkarten auf dem Globus mit einer endlichen Anzahl von Ländern. Alle Landkarten auf der Ebene erhält man durch stereographische Projektion der Sphäre auf die Ebene mit einem Punkt in einem Ozean als Projektionszentrum. Man kann den Ozean dann als unendlich weites Land betrachten und färben.

2 Die Geschichte des Vierfarbenproblems

In der Mitte des 19. Jahrhunderts färbte Francis Guthrie eine Landkarte der Grafschaften Englands. Dabei vermutete er, daß man beim Färben einer beliebigen Landkarte auf der Erde auch dann immer mit vier Farben auskommt, wenn man verlangt, daß benachbarte Länder verschieden gefärbt sein sollen.

Francis Guthrie erzählte seinem jüngeren Bruder, Frederick Guthrie, von seiner Vermutung. Dieser studierte noch an der Universität und trug seinem Lehrer, Augustus de Morgan dieses Problem vor. De Morgan beschrieb Sir William Rowan Hamilton die Frage. Das Problem wurde vollkommen vernachlässigt, bis Arthur Cayley im Jahre 1878 bei der "London Mathematical Society" nachfragte, ob schon jemand eine Lösung des Vierfarbenproblems vorgelegt habe. Kurz darauf veröffentlichte er eine mathematische Analyse des Problems in den "Proceedings of the Royal Geographical Society". Im Jahre 1879 veröffentlichte der Jurist Sir Alfred Bray Kempe im "American Journal of Mathematics" einen Beweis des Vierfarbensatzes und das Problem galt als gelöst. Charles (Santiago) Sanders Peirce und William Edward Story fügten Kempes Beweis noch einige Bemerkungen und Erweiterungen hinzu. Im Jahre 1880 veröffentlichte der Physiker Peter Guthrie Tait einen neuen Beweis des Vierfarbensatzes, aber es handelte sich hierbei nur um einige interessante Umformungen.

Das Problem wäre aber heute sicher nicht so berühmt, wenn hier schon das Ende der Geschichte wäre. Im Jahre 1890 zeigte Percy John Heawood, daß Kempes Beweis einen Trugschluß enthält. Damit war die Frage wieder offen. Heawood bewies den Fünffarbensatz, der besagt, daß jede Landkarte auf der Erde mit fünf Farben zulässig färbbar ist, also so, daß Länder mit gemeinsamer Grenzlinie verschieden gefärbt werden. Heawood verallgemeinerte das Vierfarbenproblem auf vom Globus verschiedene Flächen. In den fünfziger und sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts wurde das Heawoodsche Kartenfärbungsproblem von Ringel und Youngs gelöst.

Im 20. Jahrhundert arbeiteten viele Wissenschaftler am Vierfarbenproblem.

George David Birkhoff erreichte am Anfang des Jahrhunderts einen entscheidenden Fortschritt durch den Begriff des "reduziblen Ringes". Ihm verdanken wir auch das "chromatische Polynom".

Heinrich Heesch schrieb einen Algorithmus für den Nachweis der von ihm gefundenen "D-Reduzibilität". Er erfand die "Entladungsprozeduren", die später beim Beweis des Vierfarbenproblems eine entscheidende Rolle spielten. Die praktische Durchführung der Programmierung gelang Karl Dürre.

Jean Mayer, ein Professor für Literatur, lieferte einen Wettlauf um die Lösung des Heawoodschen Kartenfärbungsproblems mit Gerhard Ringel und J.W. Ted Youngs. Unabhängig von Heesch entwickelte er Entladungsprozeduren, die dann zu einer gemeinsamen Arbeit mit Haken und Appel führten.

Im Jahre 1976 gelang Wolfgang Haken, Kenneth Appel und John Koch der Beweis des Vierfarbensatzes. In den folgenden Jahren wurden Fehler gefunden. Diese konnten allerdings durch die "error-correction routine" behoben werden, und im Jahre 1989 gab es eine Neuauflage des Beweises mit der Korrektur aller bekannten Fehler [2]. Ihr Beweis ist aber umstritten. Dies hat zwei Gründe. Einerseits haben sie für die Durchführung eines Teils ihres Beweises einen Computer benutzt. Andererseits ist der Teil, den sie manuell gemacht haben, so lang und kompliziert, daß er kaum nachprüfbar ist. Es gibt inzwischen weitere Beweise des Vierfarbensatzes für die ein Computer eingesetzt wurde [6], [7]. Es gibt aber immer noch keinen Beweis, der ohne den Einsatz von Rechnern durchführbar ist.

Mehr Details zur Geschichte des Vierfarbenproblems können in dem Buch von R. und G. Fritsch [3] nachgelesen werden.

3 Färbungen von Landkarten auf geschlossenen Flächen

3.1 Geschlossene Flächen

Eine orientierbare, geschlossene Fläche vom Geschlecht $p \geqslant 0$ ist homöomorph zu einer Sphäre mit p Hanteln. Die Sphäre ist eine orientierbare, geschlossene Fläche vom Geschlecht 0. Der Rettungsring hat ein Loch und ist somit eine orientierbare, geschlossene Fläche vom Geschlecht 1. Eine Brezel mit drei Löchern hat Geschlecht 3. Eine nichtorientierbare, geschlossene Fläche vom Geschlecht $q > 0$ ist eine Sphäre mit q Kreuzhauben. Die Kleinsche Flasche ist eine nichtorientierbare, geschlossene Fläche vom Geschlecht 2. In der Abbildung 3 verbinden zwei Linien die schwarzen Eckpunkte. Eine Kreuzhaube erhält man, wenn man die obere Linie mit der unteren Linie so verklebt, daß die Pfeilspitzen auf der Klebelinie in dieselbe Richtung zeigen.

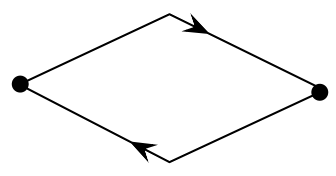


Abbildung 3: Kreuzhaube

Mehr Details hierzu stehen in den Büchern von M Aigner [1] und von W. Fulton [4].

3.2 Landkarten

Unsere Aufgabe besteht darin, Landkarten auf geschlossenen Flächen zu definieren. Diese bestehen aus Grenzsteinen und Grenzlinien, welche die Fläche in Länder unterteilen. Da man jede geschlossene Fläche triangulieren kann, betrachten wir Simplizes.

Definition. Es sei $\{v_0, \ldots, v_m\}$, $0 \leqslant m \leqslant 2$, eine affin unabhängige Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Die durch diese Menge aufgespannte konvexe Menge $s := [v_0, \ldots, v_m]$ heißt *affiner m-Simplex* mit den Ecken $v_0, \ldots, v_m$. Es ist $\mathrm{Vert}(s) := \{v_0, \ldots, v_m\}$ die Menge der Ecken von s.

Ein 0-Simplex besteht aus einer Ecke v_0, ein 1-Simplex aus der v_0 und v_1 verbindenden Strecke und ein 2-Simplex aus dem Dreieck mit den Ecken v_0, v_1 und v_2. Jedes x im m-Simplex $[v_0, \ldots, v_m]$ hat eine eindeutige Darstellung der Gestalt

$$x = \sum_{i=0}^{m} t_i v_i\,, \quad \text{wobei} \quad \sum_{i=0}^{m} t_i = 1 \quad \text{und jedes} \quad t_i \geqslant 0\,.$$

Definition. Ist s ein Simplex, so ist eine *Seite* von s ein Simplex s' mit $\mathrm{Vert}(s') \subseteq \mathrm{Vert}(s)$.

Definition. Ein *Simplizialkomplex* K ist eine endliche Menge von Simplizes, welche die folgenden Eigenschaften besitzt.

i) Ist $s \in K$, so ist auch jede Seite von s in K.

ii) Sind $s, t \in K$, so ist $s \cap t$ entweder leer oder eine gemeinsame Seite von s und von t.

Definition. Ist K ein Simplizialkomplex, so ist die *geometrische Realisierung* $|K|$ von K der Teilraum

$$|K| = \bigcup_{s \in K} s \subset \mathbb{R}^3\,.$$

Es ist klar, daß $|K|$ kompakt ist.

Definition. Ein topologischer Raum X ist genau dann ein *Polyeder*, wenn es einen Simplizialkomplex K und einen Homöomorphismus $h : |K| \to X$ gibt. Das Paar (K, h) heißt *Triangulierung* von X.

Man kann jede geschlossene Fläche triangulieren und die so erhaltenen Seiten, Kanten und Ecken bilden ein zur Fläche homöomorphes Polyeder.

Definition. Es seien α_0 die Anzahl Ecken, α_1 die Anzahl Kanten und α_2 die Anzahl Flächen eines Polyeders P. Die alternierende Summe

$$E(P) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

heißt die *Euler-Charakteristik* des Polyeders.

Bemerkung. Die Euler-Charakteristik $E(P)$ eines Polyeders P ist $\leqslant 2$ (siehe [1], [4]).

- Es ist genau dann $E(P) = 2$, wenn P homöomorph zur Sphäre F_0 ist.
- Ist P homöomorph zu einer orientierbaren, geschlossenen Fläche F_p vom Geschlecht p, so ist $E(P) = 2 - 2p$.
- Ist P homöomorph zu einer nichtorientierbaren, geschlossenen Fläche N_q vom Geschlecht q, so ist $E(P) = 2 - q$.

Definition. Ein zu einer Fläche S homöomorphes Polyeder L heißt *Landkarte* auf S, wenn jede Ecke in L Ecke von mindestens drei verschiedenen Kanten und von mindestens drei verschiedenen Flächen in L ist.

Definition. Ein *Graph* G ist eine endliche Menge von 0-Simplizes und eine Menge von 1-Simplizes, so daß diese einen Simplizialkomplex bilden und es zu je zwei 0-Simplizes v_i, v_j höchstens einen 1-Simplex mit den Ecken v_i und v_j gibt.

In jedem Land auf der Landkarte L wählen wir genau eine Hauptstadt und verbinden zwei Hauptstädte genau dann mit einer Kante, wenn die entsprechenden Länder eine gemeinsame Grenzlinie haben. Wir erhalten so den Hauptstadtgraphen, der formal wie folgt definiert ist.

Definition. Der *Hauptstadtgraph* G_L einer Landkarte L ist das 1-Skelett des zu L dualen Polyeders.

Bemerkung. Man kann einen Graphen G genau dann in ein Polyeder P einbetten, wenn es einen Simplizialkomplex K und einen Homöomorphismus $h : |K| \to P$ gibt, so daß das 1-Skelett von K einen zu G homöomorphen Teilgraphen besitzt. Ist L eine Landkarte auf S, so kann der Hauptstadtgraph G_L in S eingebettet werden.

Der Sinn des Hauptstadtgraphen ist es, die Ecken des Graphen, also die Hauptstädte zu färben. Dabei sollen die Hauptstädte benachbarter Länder verschieden gefärbt werden.

3.3 Färbungen von Landkarten

Definition. Es sei n eine natürliche Zahl. Eine *zulässige n-Färbung einer Landkarte L* ist eine Färbung der Seiten des Polyeders L mit n Farben und so, daß alle Seiten s, t von L deren Durchschnitt $s \cap t$ eine Kante enthält, verschieden gefärbt sind.

Eine *zulässige n-Färbung eines Graphen G* ist eine Färbung der 0-Simplizes (Ecken) von G mit n Farben und so, daß je zwei verschiedene 0-Simplizes, die Ecken desselben 1-Simplex (Kante) sind, verschieden gefärbt sind.

Die n-Färbung einer Landkarte heißt also zulässig, wenn Länder mit gemeinsamer Grenzlinie verschieden gefärbt sind.

Definition. Die *chromatische Zahl $\chi(L)$ einer Landkarte L* ist die kleinste natürliche Zahl n, so daß es eine zulässige n-Färbung von L gibt.

Die *chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen G* ist die kleinste natürliche Zahl n, so daß es eine zulässige n-Färbung von G gibt.

Die *chromatische Zahl $\chi(S)$ einer Fläche S* ist

$$\chi(S) = \max_{L \subset S} \chi(L)\,,$$

wobei das Maximum über alle Landkarten L auf S gebildet wird.

Die chromatische Zahl $\chi(S)$ einer geschlossenen Fläche S ist also die kleinste natürliche Zahl n, so daß es für jede Landkarte auf S eine zulässige n-Färbung gibt. Proposition 3.1 besagt, daß falls wir jeden Hauptstadtgraphen G auf einer Fläche S zulässig mit n Farben färben können, dies auch für jede Landkarte auf S möglich ist.

Proposition 3.1. *Die chromatische Zahl der Fläche S ist*

$$\chi(S) = \max_{G \subset S} \chi(G)\,,$$

wobei das Maximum über die Graphen G gebildet wird, die in S eingebettet werden können.

Beweis. Für jede Landkarte L auf S gibt es einen Graphen G_L, den Hauptstadtgraphen, der so in S eingebettet werden kann, daß $\chi(L) = \chi(G_L)$. Somit ist

$$\max_{L\subset S} \chi(L) \leqslant \max_{G\subset S} \chi(G_L)\,.$$

Die andere Ungleichung folgt aus der Tatsache, daß es für jeden Graphen G auf S eine Landkarte L auf S mit $G \subset G_L$ gibt. Hiermit ist $\chi(G) \leqslant \chi(L)$. □

Somit wird das Problem der Färbung der Landkarten auf die Färbung der Hauptstadtgraphen zurückgeführt.

4 Das Heawoodsche Kartenfärbungsproblem

Wie schon im Abschnitt 2 beschrieben, betrachtete Heawood das Kartenfärbungsproblem nicht nur auf der Sphäre. Er stellte die folgende Frage.

Das Kartenfärbungsproblem. *Wie groß ist die chromatische Zahl $\chi(S)$ einer geschlossenen Fläche S?*

Heawood bewies die folgende Ungleichung für die chromatische Zahl einer von der Sphäre verschiedenen, geschlossenen Fläche.

Heawoodsche Ungleichung (1890). *Ist S eine geschlossene Fläche mit Euler-Charakteristik $E(S) \neq 2$ (d.h. S ist nicht die Sphäre), so gilt*

$$\chi(S) \leqslant \left[\frac{7+\sqrt{49-24E(S)}}{2}\right].$$

Hier ist $[y]$ die größte ganze Zahl $\leqslant y$.

Heawood vermutete, daß in seiner Ungleichung sogar Gleichheit gilt. Ringel und Youngs bewiesen, daß dies für alle orientierbaren, geschlossenen Flächen richtig ist, und daß es bei den nichtorientierbaren, geschlossenen Flächen nur für die Kleinsche Flasche, also für die Fläche vom Geschlecht 2, nicht zutrifft.

Satz von Ringel-Youngs (1968). *Ist F_p eine orientierbare, geschlossene Fläche vom Geschlecht $p \geqslant 1$, so gilt*

$$\chi(F_p) = \left[\frac{7+\sqrt{1+48\,p}}{2}\right].$$

Ist N_q eine nichtorientierbare, geschlossene Fläche vom Geschlecht $q \geqslant 1$, so gilt

$$\chi(N_q) = \begin{cases} \left[\dfrac{7+\sqrt{1+24\,q}}{2}\right] & \text{falls } q \neq 2, \\ 6 & \text{falls } q = 2\,. \end{cases}$$

Der Fall der nichtorientierbaren Fläche wurde schon im Jahre 1954 von Ringel bewiesen.

In der Heawoodschen Ungleichung gilt für eine gegebene orientierbare, bzw. nichtorientierbare, Fläche $S = F_p$, bzw. $S = N_q$, Gleichheit, wenn es einen Graphen G gibt, der in die Fläche S eingebettet werden kann und dessen chromatische Zahl $\chi(G)$ gleich der rechten Seite der Heawoodschen Ungleichung ist. Es stellt sich heraus, daß der vollständige Graph hier bestens geeignet ist.

Definition. Der *vollständige Graph* K_n ist der Graph mit n Ecken, in dem je zwei verschiedene Ecken durch eine Kante verbunden sind.

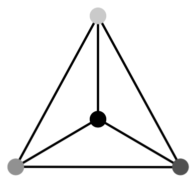


Abbildung 4: Der vollständige Graph K_4.

Da K_n offenbar zulässig n-färbbar aber nicht zulässig $(n-1)$-färbbar ist, gilt $\chi(K_n) = n$. Kann also K_n in eine Fläche S eingebettet werden, so ist $\chi(S) \geqslant n$. Der vollständige Graph K_7 kann auf den Torus eingebettet werden. Dies bedeutet, daß man auf dem Torus sieben Länder einzeichnen kann, die alle aneinander grenzen.

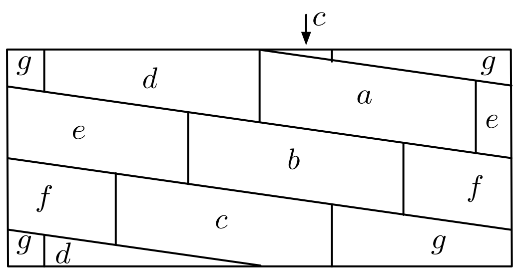


Abbildung 5: Sieben Länder auf dem Torus.

Um den Torus zu erhalten, muß man das Rechteck in der Abbildung 5 so zusammenrollen, daß man die obere und die untere Kante aneinander klebt. Dann kann man die linke und die rechte Kante, die jetzt Kreise sind, verkleben und erhält einen Ring.

Definition. Das *(orientierbare) Geschlecht* $\gamma(G)$ eines Graphen G ist das minimale Geschlecht einer orientierbaren, geschlossenen Fläche in die G eingebettet werden kann. Das *nichtorientierbare Geschlecht* $\overline{\gamma}(G)$ eines Graphen G ist das minimale Geschlecht einer nichtorientierbaren, geschlossenen Fläche in die G eingebettet werden kann.

Wir betrachten das Geschlecht vollständiger Graphen.

Satz 4.1 (Ringel, Youngs). *Es sei K_n der vollständige Graph mit n Ecken und $n \geqslant 3$. Das (orientierbare) Geschlecht von K_n ist*

$$\gamma(K_n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\}.$$

Das nichtorientierbare Geschlecht von K_n ist

$$\overline{\gamma}(K_n) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{(n-3)(n-4)}{6} \right\} & \textit{falls } n \neq 7\,, \\ 3 & \textit{falls } n = 7\,. \end{cases}$$

Hier bezeichnet $\{y\}$ die kleinste ganze Zahl $\geqslant y$.

Für den Beweis von Satz 4.1 betrachtet man im orientierbaren, bzw. im nichtorientierbaren Fall den Rest von $(n-3)(n-4)$ bei Division durch 12, bzw. durch 6. Ist $(n-3)(n-4)$ durch 12, bzw. durch 6 teilbar, so kann K_n auf eine Triangulierung der Fläche eingebettet werden. Dies trifft beim Torus zu. Da jede der Restklassen einzeln untersucht werden muß, besteht der Beweis des Satzes von Ringel-Youngs aus vielen Einzelteilen. Diese werden in dem Buch von G. Ringel [5] genau aufgeführt. Es haben nicht nur Ringel und Youngs an dem Beweis gearbeitet. Einige der Fälle wurden von anderen Forschern gezeigt (siehe [5]).

Aus dem Satz 4.1 folgt direkt der Satz von Ringel-Youngs.

Proposition 4.2. *Gilt*

$$\gamma(K_n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\} \quad \textit{für } n \geqslant 3\,,$$

so ist

$$\chi(F_p) = \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right] \quad \textit{für alle } p \geqslant 1\,.$$

Beweis. Es sei F_p gegeben. Sei n die größte ganze Zahl mit

$$\gamma(K_n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\} \leqslant p\,.$$

Da p minimal mit dieser Eigenschaft ist, gilt dann

$$p < \left\{ \frac{(n-2)(n-3)}{12} \right\}$$

und hiermit

$$12p < (n-2)(n-3)\,, \quad \text{also} \quad 0 < n^2 - 5n + 6 - 12p\,.$$

Somit ist

$$0 < \left(n - \frac{5+\sqrt{1+48p}}{2} \right) \left(n - \frac{5-\sqrt{1+48p}}{2} \right).$$

Da $p \geqslant 1$ ist der zweite Faktor immer positiv, also auch der erste. Daher ist

$$\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} - 1 < n\,.$$

Wir haben $\gamma(K_n) \leqslant p$, also kann K_n in F_p eingebettet werden. Dies heißt $n \leqslant \chi(F_p)$. Nun erhalten wir mit der Heawoodschen Ungleichung

$$\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} - 1 < \chi(F_p) \leqslant \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\,.$$

□

Es gilt natürlich auch die entsprechende Aussage für das nichtorientierbare Geschlecht eines Graphen.

Proposition 4.3. *Gilt*

$$\overline{\gamma}(K_n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\} \quad \textit{für } n \neq 7 \textit{ und } n \geqslant 3\,,$$

so ist

$$\chi(N_p) = \left[\frac{7+\sqrt{1+24q}}{2} \right] \quad \textit{für } q \neq 2\,,\ q \geqslant 1\,.$$

Beweis. Der Beweis dieser Aussage ist analog zum Beweis der Proposition 4.2 (siehe auch [5]). □

5 Der Vierfarbensatz

Vierfarbensatz. *Jede Landkarte auf dem Globus besitzt eine zulässige* 4*-Färbung.*

Wenn es Landkarten gibt, die sich nicht zulässig mit vier Farben färben lassen, so muß es darunter eine mit kleinster Länderzahl geben. Diese Landkarte bezeichnen wir als *kleinsten Verbrecher*. Der Beweis des Vierfarbensatzes besteht darin, zu zeigen, daß es keinen kleinsten Verbrecher geben kann.

5.1 Die Beweisidee

Die Grundzüge des Beweises gehen wie folgt. Die unendlich vielen Landkarten werden auf eine endliche Menge von Länderkonfigurationen reduziert. Appel und Haken betrachten eine endliche Menge von Konfigurationen (Teilgraphen) in den Hauptstadtgraphen. Dann beweisen sie die *Irreduzibilität* dieser Konfigurationen. Dazu zeigen sie, daß wenn eine dieser Konfigurationen in einem kleinsten Verbrecher auftritt, diese in einem kleineren Gegenbeispiel zum Vierfarbensatz auftreten muß. Dies liefert einen Widerspruch. Für den Beweis der Irreduzibilität wurde der Computer eingesetzt. In einem nächsten Teil des Beweises zeigen sie die *Unvermeidbarkeit* der Menge von Konfigurationen. Dies heißt, daß in jedem kleinsten Verbrecher mindestens eine der Konfigurationen auftreten muß.

Birkhoff definiert "Entladungsprozeduren", welche für die Konstruktion unvermeidbarer Mengen von Konfigurationen eingesetzt werden. Heesch beschäftigt sich mit Reduzibilitätsalgorithmen. Die von ihm gefundene "D-Reduzibilität" beruht auf Kempe-Ketten-Spielen. Die Birkhoff-Zahl gibt eine minimale Anzahl Ecken an, die eine Konfiguration haben muß, um nicht mehr 4-färbbar zu sein. Der Vierfarbensatz besagt, daß die Birkhoff-Zahl unendlich ist. Im Jahre 1975 zeigt Mayer, daß die Birkhoff-Zahl mindestens 96 ist. Diese Zahl gibt einen Eindruck davon, wie groß jede einzelne der knapp 1500 Konfigurationen war, die Appel und Haken in den Computer eingegeben haben.

Es ist gar nicht möglich, hier alle Bausteine des Beweises vorzustellen.

5.2 Kempe-Ketten-Spiele

Kempe hat einen Algorithmus zur Färbung eines Graphen definiert. Dieser wird heute "Kempe-Ketten-Spiel" genannt.

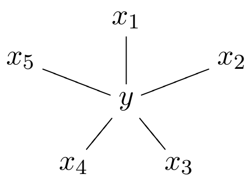
Definition. Es sei G ein Graph. Zwei Ecken heißen *benachbart*, wenn sie verschieden, aber Ecken derselben Kante in G sind. Eine Folge $(v_1, \ldots, v_r)$ von Ecken heißt *Kette (von* v_1 *nach* v_r*)*, wenn die auftretenden Ecken paarweise verschieden, aber je zwei aufeinanderfolgende Ecken benachbart sind. Es ist r die *Länge* der Kette.

Definition. Ein 4*-gefärbter Graph* ist ein Paar (G, χ) bestehend aus einem Graphen G und einer zulässigen 4-Färbung χ von G. Ist ein 4-gefärbter Graph (G, χ) gegeben, so bezeichnen wir für jedes Paar b, g von Farben ($b \neq g$) mit G_{bg} den Untergraphen von G, der von allen mit b und g gefärbten Ecken aufgespannt wird.

Definition. Es sei (G, χ) ein gefärbter Graph. Eine *Kempe-Kette* ist eine Kette, deren Ecken mit nur zwei Farben gefärbt sind. Eine (b, g)*-Kette* ist eine Kempe-Kette, deren Ecken (abwechselnd) mit den Farben b und g gefärbt sind.

Ein *Kempe-Netz* ist eine Komponente (zusammenhängender Teilgraph) eines Untergraphen der Form G_{bg}. Ein (b, g)*-Netz* ist ein Kempe-Netz, dessen Ecken mit den Farben b und g gefärbt sind.

Kempe versucht zu beweisen, daß es in einem kleinsten Verbrecher keine 5-Ecke gibt. Es seien y eine 5-Ecke in G und $x_1, \ldots, x_5$ die Nachbarn von y in zyklischer Reihenfolge.



Sei G' der Graph, den man erhält, wenn man y und ihre Kanten entfernt. Dann ist G' 4-färbbar, da G minimal. Sei χ' eine zulässige 4-Färbung von G'. Alle vier Farben seien für die Färbung von $x_1, \ldots, x_5$ verbraucht. Die Farbverteilung sei o.B.d.A.

$$\chi'(x_i) = \begin{cases} i & \text{für } i \in \{1,2,3,4\} \\ 2 & \text{für } i = 5. \end{cases}$$

Nun führen wir das Kempe-Ketten-Spiel durch.

i) Liegen x_1 und x_3 in verschiedenen $(1,3)$-Netzen, färben wir sie so um, daß x_1 Farbe 3 hat und dann ist Farbe 1 für x frei.

ii) Liegen x_1 und x_4 in verschiedenen $(1,4)$-Netzen, färben wir sie so um, daß x_1 Farbe 4 hat und dann ist Farbe 1 für x frei.

iii) Gibt es eine $(1,3)$-Kette K_3 von x_1 nach x_3 und eine $(1,4)$-Kette K_4 von x_1 nach x_4, dann gibt es weder eine $(2,4)$-Kette von x_2 nach x_4 noch eine $(2,3)$-Kette von x_5 nach x_3, da sich sonst die Ketten in jeweils mindestens einem Land schneiden müssten, was unmöglich ist. Wir können so umfärben, daß x_2 die Farbe 4 und x_5 die Farbe 3 enthält. Dann ist Farbe 2 für x frei.

   Fehler: Die beiden Schritte in diesem Zug sind nicht unbedingt ausführbar, da das Durchführen des 1. Schritts die Voraussetzungen für den 2. Schritt zerstören kann. Dies passiert in der Abbildung 6, wo das weiße Land in der Mitte gefärbt werden soll.

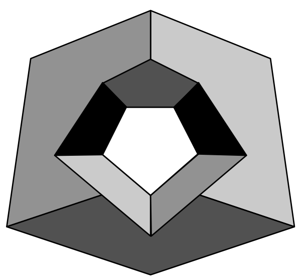


Abbildung 6: Hier ist der dritte Zug im Kempe-Ketten-Spiel nicht durchführbar.

Leider läßt sich der Fehler in Kempes Beweis nicht beheben, aber seine Ideen führten Heawood zum Beweis des Fünffarbensatzes.

Fünffarbensatz. *Jede Landkarte in der Ebene oder auf der Sphäre besitzt eine zulässige* 5*-Färbung.*

Beweis. Wir nehmen induktiv an, daß ein Land x existiert, für dessen fünf Nachbarn $x_1, \ldots, x_5$ alle fünf Farben 1, 2, 3, 4, 5 benötigt werden (in dieser Reihenfolge). Gibt es eine $(1,3)$-Kette von x_1 nach x_3, so gibt es keine $(2,4)$-Kette von x_2 nach x_4, da die sich sonst in einem Land schneiden müssten. Existiert also o.B.d.A. keine $(1,3)$-Kette von x_1 nach x_3, so können wir durch Vertauschung eine der Farben einsparen. Dann ist eine Farbe für x frei. □

Die genaue Beschreibung des Beweises des Vierfarbensatzes würde den Rahmen dieses Kolloquiums sprengen. Mehr zur Lösung des Vierfarbenproblems findet man zum Beispiel in den Büchern von M. Aigner [1], von R. und G. Fritsch [3] und natürlich auch in der Arbeit von K. Appel und W. Haken [2].

Literatur

[1] M. Aigner, *Graphentheorie: Eine Entwicklung aus dem* 4*-Farben Problem*, Teubner Studienbücher: Mathematik, B. G. Teubner 1989.

[2] K. Appel und W. Haken, *Every planar graph is four colorable*, A.M.S. Contemporary Math. 98 (1989).

[3] R. und G. Fritsch, *Der Vierfarbensatz: Geschichte, topologische Grundlagen und Beweisidee*, BI-Wissenschaftsverlag 1994.

[4] W. Fulton, *Algebraic Topology: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics 153, Springer-Verlag 1995.

[5] G. Ringel, *Map Color Theorem*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 209, Springer-Verlag 1974.

[6] N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour und R. Thomas, *A new proof of the Four-Colour Theorem*, Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society 2 (1996), 17–25.

[7] N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour und R. Thomas, *The Four-Colour Theorem*, J. Combin. Theory, Ser. B70 (1) (1997), 2–44.

Dr. Cornelia Minette Busch
Katholische Universität Eichstätt–Ingolstadt
Mathematisch-Geographische Fakultät
85071 Eichstätt

cornelia.busch@ku-eichstaett.de