

KOMPLEXE ANALYSIS

Studiengang: Elektrotechnik, Informationstechnologie und
Rechnergestützte Wissenschaften

ETH, Zürich

Francesca Da Lio¹

¹Department of Mathematics, ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Switzerland

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Vorlesungsnotizen ist es, die Studenten bei der Prüfungsvorbereitung zu unterstützen. Die Vorlesungsnotizen basieren auf den Vorlesungen von KOMPLEXE ANALYSIS der Autorin aus den Studienjahren 2012-2015.

Inhaltsverzeichnis

1	Komplexe Zahlen und Funktionen	1
1.1	Komplexe Zahlen	1
1.2	Polardarstellung der komplexen Zahlen	3
1.3	Komplexwertige Funktionen	6
1.3.1	Einige Begriffe aus der Topologie	6
1.3.2	Komplexe Funktionen	8
2	Analytische Funktionen	17
2.1	Grenzwerte und Stetigkeit	17
2.2	Komplexe Ableitung	18
2.3	Analytische Funktionen	19
2.4	Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	20
2.5	Harmonische Funktionen	32
3	Die Integralformel von Cauchy	35
3.1	Kurvenintegrale	35
3.2	Der Satz von Cauchy	39
3.3	Anwendungen der Integralformel	47
4	Laurent-Entwicklung und Singularitäten	57
4.1	Laurent-Entwicklung	57
4.2	Singularitäten	61
4.2.1	Hebbare Singularitäten	62
4.2.2	Pole	62
4.2.3	Wesentliche Singularitäten	63
4.3	Nullstellen einer analytischen Funktion	64
5	Der Residuensatz und seine Anwendungen	66
5.1	Der Residuensatz	66
5.2	Anwendungen auf die Berechnung von reellen Integralen	71
5.2.1	Integrale von rationalen Funktionen von $\cos \sigma$ und $\sin \sigma$	71
5.2.2	Einige uneigentliche Integrale, I	73
5.2.3	Fourier-Integrale	75
5.2.4	Einige uneigentliche Integrale, II	77
6	Fourier-Reihen	82
6.1	Definitionen	82
6.2	Konvergenz	96

7	Fourier-Transformation	101
7.1	Definition der Fourier-Transformation	101
7.2	Interpretation der Fourier-Transformation	103
7.3	Rechenregeln	107
7.4	Einige Eigenschaften der Faltung	110
8	Laplace Transformation	115
8.1	Definition und Rechenregeln	115
8.1.1	Rechenregeln und Beispiele	119
8.2	Eine Methode zur Bestimmung der inversen Laplace-Transformation	125
8.3	Einige Anwendungen der Laplace-Transformation	127
A	Prüfungen	133
A.1	Prüfung Winter 2014	133
A.2	Lösung Prüfung Winter 2014	134
A.3	Prüfung Sommer 2014	140
A.4	Lösung Prüfung Sommer 2014	142

1 Komplexe Zahlen und Funktionen

1.1 Komplexe Zahlen

Gleichungen ohne reelle Lösungen (wie etwa $x^2 + 1 = 0$) führten zur Einführung der komplexen Zahlen.

Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen lässt sich wie folgt charakterisieren:

- a) \mathbb{C} ist ein Körper; die Elemente z von \mathbb{C} heißen komplexe Zahlen.
- b) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist ein Teilkörper.
- c) In \mathbb{C} gibt es zwei Lösungen i und $-i$ der Gleichung $z^2 + 1 = 0$.
- d) Jede komplexe Zahl z lässt sich darstellen in der Form

$$z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R},$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$ **reelle** Zahlen sind und i die **imaginäre Einheit** ist; das heißt: i ist durch die Identität $i^2 = -1$ definiert.

Die Koeffizienten x, y werden als **Realteil** und **Imaginärteil** von z bezeichnet.

\mathbb{C} kann mit \mathbb{R}^2 identifiziert werden:

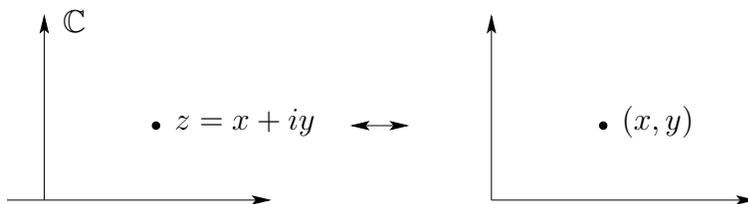


Fig. 1.1

Bei dieser Identifikation entsprechen die reellen komplexen Zahlen $z = x + i0$ der x -Achse, die heißt daher auch **reelle Achse**. Auf der y -Achse liegen die **rein imaginären** Zahlen $z = 0 + iy$. Die y -Achse heißt entsprechend **imaginäre Achse**.

Für zwei beliebige Zahlen $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ gilt gemäß Eigenschaften a) und b)

heißt

$$z + z' = x + x' + i(y + y').$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} z' \cdot z &= (x' + iy') \cdot (x + iy) \\ &= x'x + x'iy + iy'x + iy' \cdot iy, \end{aligned}$$

und somit wegen $i^2 = -1$:

$$z \cdot z' = xx' - yy' + i(x'y + y'x).$$

Für eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt

$$\alpha z = \alpha x + i\alpha y,$$

das heißt: Die Multiplikation einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$ entspricht geometrisch der Streckung des Vektors z mit dem Skalarfaktor α .

Vor allem \mathbb{C} ist ein Körper. Das heisst, beliebige $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzen einen Kehrwert $\frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{(-y)}{x^2 + y^2}.$$

Die Regel ist die folgende: der Nenner und der Zähler mit $x - iy$ zu multiplizieren (um im Nenner eine reelle Zahl zu erhalten). Der Körper \mathbb{C} ist, im Gegensatz zu \mathbb{R} , **nicht geordnet**, deswegen macht eine Ungleichung $z_1 < z_2$ **keinen Sinn!**

Die zu z **konjugiert komplexe** Zahl ist $\bar{z} := x - iy$. Die Punkte z und \bar{z} liegen **spiegelbildlich** zur reellen Achse.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

- $x = \Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i};$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z};$
- $\overline{\bar{z}} = z;$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}.$

Die Grösse

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt der (absolute) Betrag von z .

Für den Betrag gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} |z \cdot z'| &= |z| \cdot |z'| \\ z \in \mathbb{R} &\implies |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}} \\ |\Re z| &\leq |z|, \quad |\Im z| \leq |z| \\ |z + z'| &\leq |z| + |z'| \quad (\text{die Dreiecksungleichung}). \end{aligned}$$

Der Betrag $|z|$ von z entspricht dem Abstand des Punktes $z \simeq (x, y)$ vom Ursprung.

1.2 Polardarstellung der Komplexen Zahlen

In der Ebene \mathbb{R}^2 gibt es neben den kartesischen Koordinaten x, y die Polarkoordinaten r, ϕ .

Für einen Punkt (x, y) auf der (x, y) -Ebene \mathbb{R}^2 haben wir

$$(1.1) \quad \begin{cases} x = r \cos \phi & \text{wobei } r > 0 \text{ und } \phi \in \mathbb{R} \\ y = r \sin \phi. \end{cases}$$

In den Polarkoordinaten stellt r der Abstand des Punktes (x, y) vom Ursprung dar und ϕ stellt der Polarwinkel dar, also jener Winkel zwischen dem Vektor vom Ursprung nach (x, y) und der positiven x -Achse.

Der **Polarwinkel** (das ‘‘Argument’’) ϕ ist durch den Punkt (x, y) nur bis auf additive ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt und ist für den Punkt $(0, 0)$ undefiniert.

Gegeben ein Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$, verstehen wir das Argument $\arg(x, y)$ als die Menge aller $\phi \in \mathbb{R}$ für die (1.1) gilt.

Ist ϕ ein beliebiger Repräsentant von $\arg(x, y)$, so gilt

$$\arg(x, y) = \{\phi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} =: \{\phi\}.$$

Wir haben

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi \in \arg(x, y). \end{cases}$$

Bei der Identifikation von \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 definieren wir $\arg z := \arg(x, y)$, und entsprechend folgt

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \iff \begin{cases} r = |z| \\ \phi \in \arg z. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel

$$\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi} \quad (\phi \in \mathbb{R})$$

erhalten wir die Polardarstellung einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\boxed{z = |z| e^{i\phi}.$$

Diese Formel wird sich als äußerst nützlich erweisen.

1. Für zwei Zahlen $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$ hat man dank der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (bzw. der Additionstheoreme von Cosinus und Sinus)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$\text{(bzw. } z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2)$$

$$+ i(\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_2 \sin \phi_1)] \\ = r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)].$$

Anders formuliert: Bei der Multiplikation von komplexen Zahlen multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Argumente:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

(im Sinne der Addition von Mengen).

2. Wir sind daran interessiert, die **n -te Wurzel** einer komplexen Zahl $a \in \mathbb{C}$ zu finden. Dies sind jene Zahl(en) $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^n = a$. Wir werden sehen, dass es n verschiedene n -te Wurzeln von a gibt. Dazu muss insbesondere gelten

$$z^n = |a| e^{i\theta}.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn

$$|z^n| = |z|^n = |a| \quad \text{und} \quad n\phi = \theta + 2k\pi,$$

wobei $k = 0, 1, \dots, n-1$.

(Wir erinnern daran, dass $e^{i\theta}$ 2π -periodisch ist). Dann ist

$$|z| = |a|^{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

also

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Es gibt daher genau n verschiedene Lösungen z_k der Gleichung $z^n = a$ und diese n -ten Wurzeln der komplexen Zahl a bilden ein reguläres n -Eck auf einem Kreis um den Ursprung und mit Radius $\sqrt[n]{|a|}$.

Beispiel 1.1.

$$a = 1 \quad n = 2$$

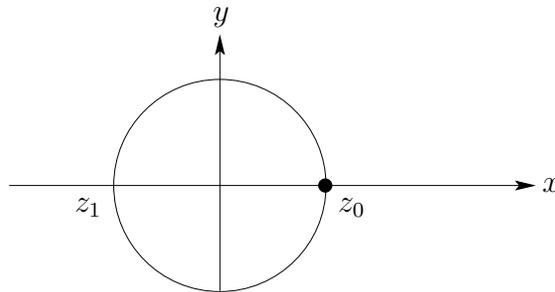


Fig. 1.2

$$a = -1 \quad n = 4$$

$$z_0 = |-1|^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_1 = |-1|^{\frac{1}{4}} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4})}$$

$$z_2 = |-1|^{\frac{1}{4}} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4})}, \quad z_3 = |-1|^{\frac{1}{4}} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4})}.$$

Damit:

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

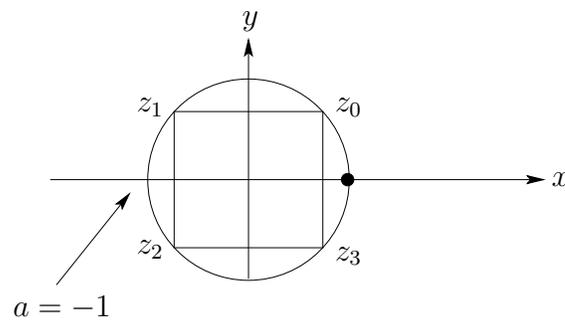


Fig. 1.3

Wir betrachten nun die Menge

$$\mathbb{C}^{-*} := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\},$$

d.h. wir schneiden die negative reelle Achse aus der komplexen Ebene heraus.

Auf dieser eingeschnittenen Ebene konstruieren wir, durch die Bedingung $-\pi < \Phi \leq \pi$, einen stetigen Repräsentanten des Arguments. Die Funktion

$$\text{Arg}: \mathbb{C}^{-*} \rightarrow (-\pi, \pi)$$

$$z \mapsto \arg z \cap (-\pi, \pi)$$

heißt **Hauptwert des Arguments**.

Es gilt $\text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z$, und auf der positiven reellen Achse ist $\text{Arg } z = 0$.

Bemerkung 1.2. Die Gleichung

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$$

ist im Allgemeinen nicht mehr gültig!

1.3 Komplexwertige Funktionen

1.3.1 Einige Begriffe aus der Topologie

Der Kreis mit Radius $r > 0$ und mit Zentrum z_0 kann durch die Gleichung $|z - z_0| = r$ beschrieben werden. Eine **Umgebung** des Punktes z_0 ist eine Menge $\{z : |z - z_0| < r\}$, wobei $r > 0$ eine positive reelle Zahl ist. Deswegen ist eine Umgebung eine Kreisscheibe mit Radius r ohne den Rand.

Ein **Kreisring** mit Zentrum z_0 und inneren und äusseren Radien r_1, r_2 ist die Menge $\{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

Ein Punkt z_0 in einer Teilmenge $S \subset \mathbb{C}$ ist ein **innerer** Punkt von S , falls es eine Umgebung von z_0 gibt, die in S enthalten ist.

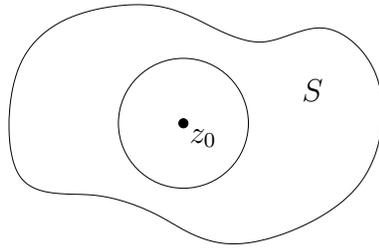


Fig. 1.4

Der Punkt z_0 ist ein **Berührungspunkt** von S , falls jede Umgebung von z_0 eine nichtleere Schnittmenge mit S hat.

Ein Berührungspunkt, der kein innerer Punkt ist, heißt **Randpunkt**.

Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt **offen**, falls alle Punkte, die zu ihr gehören, innere Punkte sind. Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, falls es eine Konstante $M > 0$ gibt, sodass jeder Punkt $z \in S$ die Ungleichung $|z| < M$ erfüllt. Anders gesagt:

$$S \subseteq \{z : |z| < M\}.$$

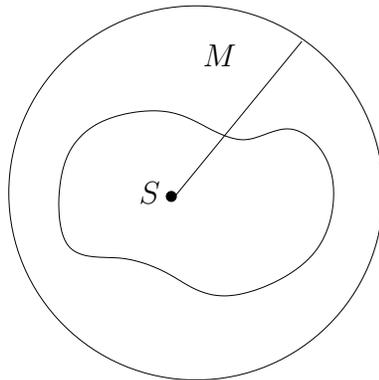


Fig. 1.5: Eine beschränkte Menge S .

Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, falls sie alle ihre Berührungspunkte enthält.

Eine **kompakte** Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Teilmenge, die beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiel 1.3. $S = \{z: |z| \leq 1\}$ ist eine (Kreis)Scheibe mit Radius 1 und Zentrum im Ursprung. Ihre inneren Punkte sind alle Punkte in der Menge $\{z: |z| < 1\}$. Letztere wird daher auch als offene (Kreis)Scheibe mit Radius 1 bezeichnet.

Die Berührungspunkte sind die Punkte in der Menge $\{z: |z| \leq 1\}$ und die Randpunkte sind die Punkte $\{z: |z| = 1\}$. Da alle Berührungspunkte von S in S enthalten sind, ist S abgeschlossen. S ist offensichtlich beschränkt. Die Menge $\{z: |z| < 1\}$ ist beschränkt aber nicht abgeschlossen, deshalb ist sie nicht kompakt.

Beispiel 1.4. Die Menge $\{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ ist offen und unbeschränkt. Ihre Randpunkte sind $\{z: \operatorname{Re} z = 0\}$ und die Menge $\{z: \operatorname{Re} z \geq 0\}$ ist abgeschlossen.

Notation 1.5. Für eine Menge S definieren wir den Abschluss \overline{S} wie folgt:

$$\begin{aligned} S \subseteq \mathbb{C} \implies \overline{S} &= S \cup \{\text{Randpunkte}\} \\ &= S \cup \{\text{Berührungspunkte}\} \end{aligned}$$

Eine Teilmenge S heißt **zusammenhängend**, falls je zwei Punkte durch einen Polygonzug (Streckenzug) verbunden werden können, der vollständig in S enthalten ist.

Beispiel 1.6.

- $S = \{z: |z| < 1, |z| > 2\}$ ist nicht **zusammenhängend**.

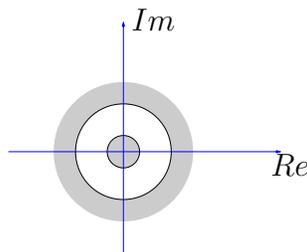


Fig. 1.6

- $S = \{z: 1 < |z| < 2\}$ ist **zusammenhängend**.

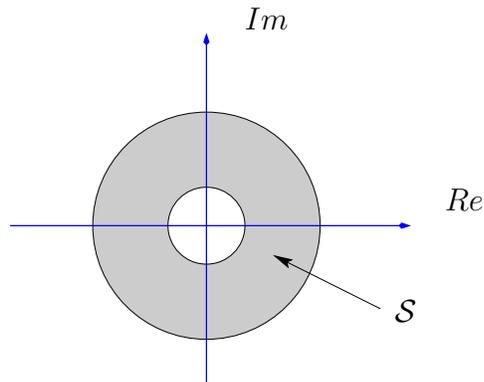


Fig. 1.7

- Ein **Gebiet** ist eine zusammenhängende offene Teilmenge von \mathbb{C} .

1.3.2 Komplexe Funktionen

Eine komplexe Funktion ist eine Funktion oder eine Abbildung $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ oder $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

Für $z \in \Omega$ ist $f(z)$ **das Bild** von z via f . Der Punkt z heißt **das Urbild** (oder ein **Urbild**) des Punktes $w = f(z)$.

Vorsicht: Das Urbild ist nicht immer eindeutig bestimmt!

Kurven in der komplexen Ebene

Definition 1.7. Eine **Kurve** ist eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma: I &\rightarrow \mathbb{C}, \\ t &\mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t). \end{aligned}$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall bezeichnet.

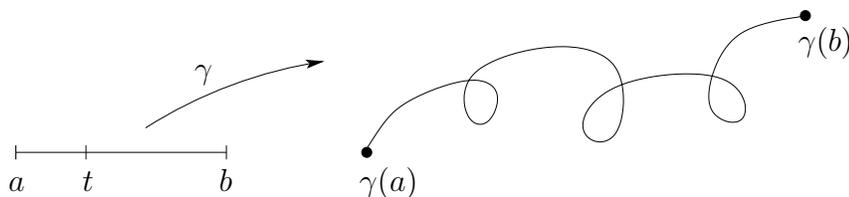


Fig. 1.8

Falls $I = [a, b]$, mit $a < b$, dann ist $\gamma(a)$ der Anfangspunkt der Kurve γ und $\gamma(b)$ der Endpunkt der Kurve γ .

Beispiel 1.8.

1. Die Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten $z, w \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\gamma: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z + t(w - z) \\ (\gamma(0) = z, \quad \gamma(1) = w)\end{aligned}$$

2. Die Einheitskreislinie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t.\end{aligned}$$

3. Es sei $c = a + ib$ eine vorgegebene komplexe Zahl verschieden von 0. Wir betrachten die Kurve

$$\begin{aligned}\gamma: (-\infty, +\infty) &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{ct} = e^{at} \cdot e^{ibt}.\end{aligned}$$

- Ist $b = 0$, so gilt $\text{Arg } z \equiv 0$ für alle Punkte z auf der Kurve.
 $\implies \gamma(t) = e^{at} \in \mathbb{R}$ und $e^{at} > 0$
 \implies der Punkt $\gamma(t)$ durchläuft die positive reelle Achse von 0 bis ∞ , falls $a > 0$, und von ∞ bis 0, falls $a < 0$.
- Ist $a = 0 \implies \gamma(t) = e^{-ibt}$ und $|\gamma(t)| = 1$
 $\implies \gamma$ beschreibt den Einheitskreis mit Winkelgeschwindigkeit b (vgl. Bsp **2.**) ; dabei entspricht $b > 0$ dem Umlauf im Gegenuhrzeigersinn und $b < 0$ im Uhrzeigersinn.
- Ist $a > 0, b \neq 0$, so ist $|\gamma(t)| = |e^{at+ibt}| = e^{at}$. Der Absolutbetrag $|\gamma(t)|$ nimmt mit t exponentiell zu.

Der Faktor e^{ibt} allein durchläuft wiederum den Einheitskreis mit konstanter Geschwindigkeit b . Die Kombination der zwei Faktoren e^{at} und e^{ibt} gibt eine Spirale.

Wir beobachten: $\gamma'(t) = ce^{ct} = (a + ib)\gamma(t)$

$\implies \arg \gamma'(t) = \arg \gamma(t) + \theta$, wobei $\theta = \arg(a + ib) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Das heißt, dass $\gamma(t)$ und $\gamma'(t)$ immer den konstanten Winkel $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ bilden.

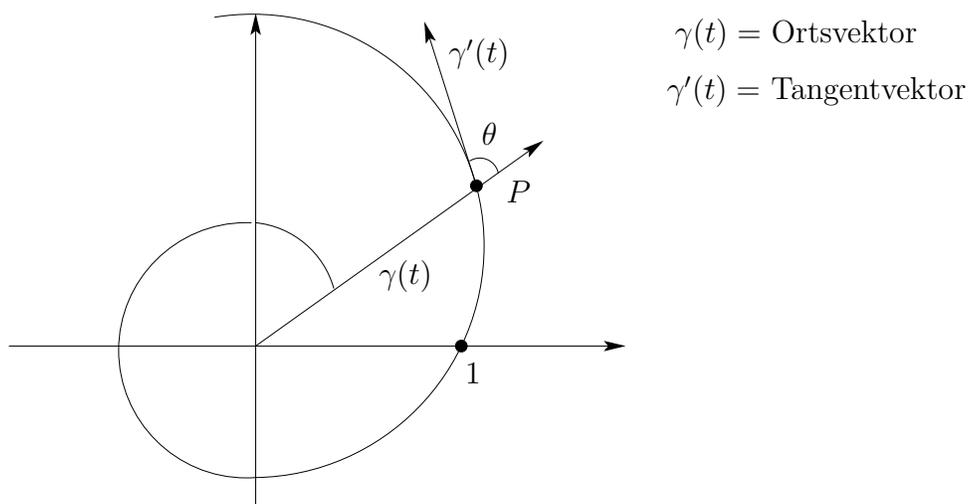


Fig. 1.9: Spirale aus Beispiel **3.**

Komplexwertige Funktionen einer komplexen Variablen

Wir betrachten jetzt Funktionen

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto w := f(z),$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet in der komplexen z -Ebene ist. Wir schreiben auch

$$f: x + iy \mapsto u + iv,$$

wobei nun u und v reellwertige Funktionen der reellen Variablen x und y sind:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Für u und v stehen die Begriffe der mehrdimensionalen Differentialrechnung zur Verfügung, wie “partielle Ableitungen”, “Funktionalmatrix”, usw.

Einige elementare Funktionen

- Wir betrachten die Funktion $f(z) := z + c$ bzw. die Abbildung

$$T_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto z + c,$$

dabei ist $c \in \mathbb{C}$ beliebig, aber **fest**.

Geometrisch ist T_c eine **Translation** um den komplexen Vektor c .

2. Wir betrachten die homogene lineare Funktion $f(z) := az$, bzw. die Abbildung

$$S_a: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$z \longmapsto az.$$

Es ist $|S_a(z)| = |a| |z|$ und

$$\arg S_a(z) = \arg a + \arg z.$$

S_a ist eine Drehstreckung mit Zentrum 0 (sie multipliziert die Beträge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit dem Faktor $|a|$ und addiert $\arg a$ zu ihren Argumenten):

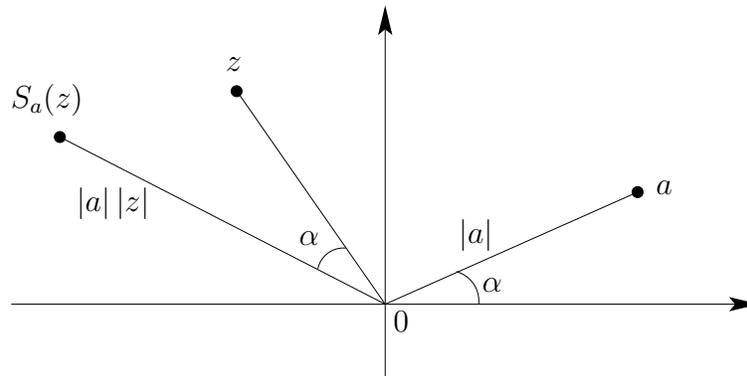


Fig. 1.10

3. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$z \longmapsto w := \frac{1}{z}.$$

Wir betrachten die Bilder von Strahlen $\arg z = \alpha$, α fest und von Kreisen $|z| = r$, $r > 0$ fest. Es sei

$$\gamma: t \longmapsto \gamma(t) := te^{i\alpha} \quad 0 < t < \infty, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ein Strahl. Wir haben

$$f(\gamma): t \longmapsto \frac{1}{\gamma(t)} = \frac{1}{t} e^{-i\alpha} \quad 0 < t < \infty.$$

Wir sehen: $f(\gamma)$ ist ein aus dem Unendlichen auf 0 zulaufender Strahl. γ und $f(\gamma)$ liegen spiegelbildlich zur reellen Achse.

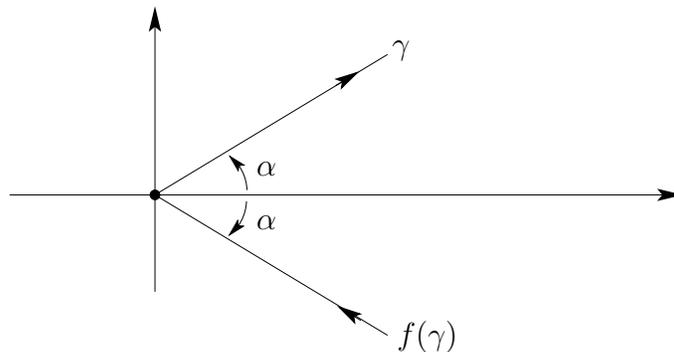


Fig. 1.11: Der Strahl γ und sein Bild unter $f(z) = \frac{1}{z}$.

Es sei jetzt:

$$\sigma : t \mapsto r e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

eine Kreislinie. Wir haben

$$f(\sigma): t \mapsto \frac{1}{\sigma(t)} = \frac{1}{r} e^{-it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Die Bildkurve ist ein Kreis mit Radius $\frac{1}{r}$, der im mathematischen negativen Sinn, d.h. im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

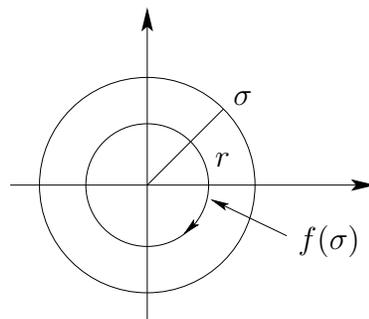


Fig. 1.12: Die Kreislinie σ und Ihr Bild unter $f(z) = \frac{1}{z}$.

4. Wir betrachten $f(z) = z^2$. Wir können diesmal den Strahl $\gamma: t \mapsto t e^{i\alpha}$ bei $t := 0$ beginnen lassen. Wir haben

$$f(\gamma): t \mapsto w(t) = (\gamma(t))^2 = t^2 e^{2i\alpha} \quad 0 \leq t < \infty.$$

Das Bild ist wieder ein von 0 ausgehender Strahl. Sein Argument ist 2α . Das f -Bild der Kreislinie $t \mapsto \sigma(t) = r e^{it}$ ist gegeben durch

$$f(\sigma) : t \mapsto w(t) = (\sigma(t))^2 = r^2 e^{2it}.$$

Es handelt sich um einen zweimal durchlaufenden Kreis mit Radius r^2 .

5. Wir haben gesehen, dass, gegeben $w \in \mathbb{C}^*$, es genau n verschiedene Lösungen z_k der Gleichung $z^n = w$ gibt. Diese n -ten Wurzeln der komplexen Zahl w bilden ein reguläres n -Eck auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|w|}$. Ist $w = |w|e^{i\phi}$, so sind diese z_k gegeben durch

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right)} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

In anderen Worten: Die n -te Wurzel

$$\text{wrz}_n(w) := \left\{ z \in \mathbb{C}^* : z^n = w \right\}, \quad w \in \mathbb{C}^*$$

ist eine mehrdeutige Funktion, nur $\text{wrz}_n(0) := 0$ ist eindeutig bestimmt.

Wir definieren den Hauptwert der n -ten Wurzel wie folgt:

$$\begin{aligned} pv \sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C}^* &\longrightarrow S = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid -\frac{\pi}{n} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{n} \right\} \\ w &\longmapsto \sqrt[n]{|w|} e^{i \frac{\text{Arg } w}{n}} \end{aligned}$$

(pv steht für **principal value**, Englisch für "Hauptwert").

Sei w eine positive reelle Zahl, so stimmt $pv \sqrt[n]{w}$ mit der n -ten Wurzel $\sqrt[n]{w}$ aus der reellen Analysis überein.

Beispiel 1.9.

$$w = i, \quad n = 2$$

$$\sqrt[2]{i} = \begin{cases} z_0 = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{0 \cdot 2\pi}{2}\right)} = e^{\frac{i\pi}{4}} \\ z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1 \cdot 2\pi}{2}\right)} = e^{\frac{i5\pi}{4}} \end{cases}$$

$$\implies pv \sqrt[2]{i} = z_1.$$

6. Wir kommen zu der (komplexen) **Exponentialfunktion**

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \quad z \longmapsto w := \exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k.$$

Eigenschaften

- a) Die Exponentialfunktion erfüllt der Funktionalgleichung

$$\exp(z + z') = \exp z \cdot \exp z', \quad (z, z' \in \mathbb{C}).$$

b) Wir schreiben auch e^z anstelle von $\exp z$.

c) Für reelle ϕ gilt die Eulersche Identität

$$e^{i\phi} \equiv \cos \phi + i \sin \phi.$$

Daraus folgt insbesondere $e^{2\pi i} = 1$ und mit a) ergibt sich die Identität

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z \cdot \exp(2\pi i) = \exp z.$$

Daher ist die komplexe Exponentialfunktion periodisch mit rein imaginären Periode $2\pi i$.

Es folgt, dass $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nicht global **umkehrbar** lässt und \exp ist durch seine Werte auf einem horizontalen Streifen der Breite 2π , zum Beispiel auf dem Streifen $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$, vollständig bestimmt.

Geometrische Beschreibung

Wir schreiben $z = x + iy$ und erhalten

$$w = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Damit folgt

$$|w| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}, \quad \arg w = \operatorname{Im}(z).$$

Wir betrachten die horizontale Gerade durch iy

$$\gamma: x \mapsto x + iy, \quad -\infty < x < +\infty,$$

wobei y fest ist. Wir haben

$$\exp(\gamma): x \mapsto e^x \cdot e^{iy}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

das heißt: Die Gerade wird in den von 0 ausgehenden und ins Unendliche laufenden Strahl mit Argument y übergeführt.

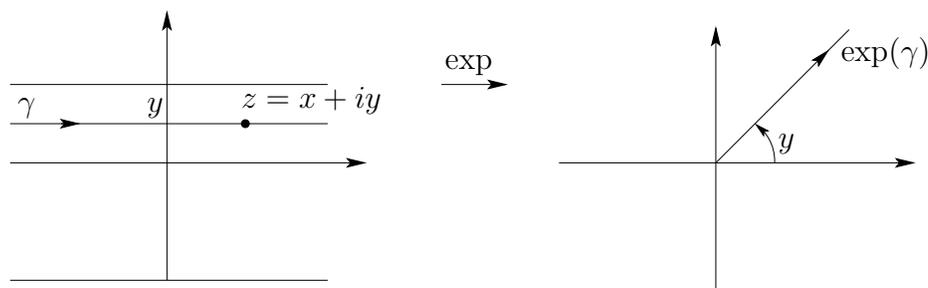


Fig. 1.13

Betrachten wir nun die vertikale Gerade (Parallele zur y -Achse) durch x

$$\tilde{\gamma}: y \mapsto x + iy, \quad -\infty < y < \infty,$$

wobei x fest ist. Wir haben

$$\exp(\tilde{\gamma}) : y \mapsto e^x \cdot e^{iy}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Es handelt sich um den Kreis mit Radius $e^x > 0$, der unendlich oft durchlaufen wird.

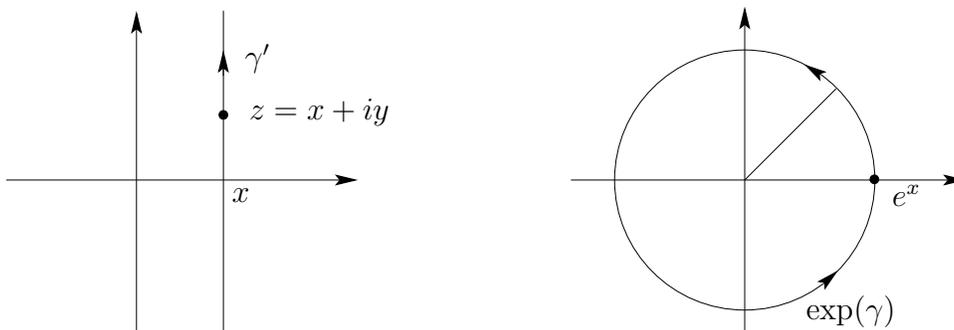


Fig. 1.14

7. Als nächsten betrachten wir den **Logarithmus**.

Im Reellen ist der natürliche Logarithmus $\ln(a)$ einer Zahl $a > 0$ definiert als die wohlbestimmte Lösung der Gleichung $e^x = a$.

Es sei nun eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}^*$ gegeben, davon wir den Logarithmus bestimmen wollen. Allerdings hat wegen der Periodizität der Exponentialfunktion die Gleichung $e^z = w$ unendlich viele Lösungen. Der **Logarithmus** der Zahl $w \in \mathbb{C}^*$ ist definiert als die unendliche Menge

$$\log w := \{z \in \mathbb{C} \mid e^z = w\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Es sei $w = |w| e^{i\phi}$. Wir müssen die Gleichung $e^z = w$ auflösen, dies bedeutet die Gleichung

$$e^x \cdot e^{iy} = |w| e^{i\phi}$$

nach x und y auflösen. Es ergibt sich

$$x = \ln|w|, \quad y \in \arg w.$$

Damit haben wir

$$\log w = \ln|w| + i \arg w,$$

wobei hier \ln der gewöhnliche Logarithmus auf \mathbb{R} bezeichnet und $\arg(w)$ eine Menge ist.

Übung 1.10. Für beliebige $w, w' \in \mathbb{C}^*$ gilt

$$\log(w \cdot w') = \log w + \log w'.$$

Wir definieren jetzt den Hauptwert des Logarithmus, welches wir mit Log bezeichnen, also mit einen großen "L". Es handelt sich um die Funktion

$$\begin{aligned} \text{Log} : \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C}, \\ w &\mapsto \ln |w| + i \text{Arg } w, \end{aligned}$$

wobei Arg wie oben definiert der Hauptwert des Argumentes bezeichnet.

Log ist injektiv und der **eindeutig bestimmte Repräsentant** von $\log w$ im Streifen

$$\begin{aligned} S &= \{z = x + iy \mid -\pi < y < \pi\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } z| < \pi\} \end{aligned}$$

der z -Ebene. Log ist die Umkehrfunktion de Einschränkung von \exp auf den genannten Streifen.

8. Wir betrachten schließlich noch die Potenz $z \mapsto a^z$.

In der Analysis I wurde für reelle $a > 0$ und beliebige $t \in \mathbb{R}$ die Potenz definiert durch

$$(1.2) \quad a^t := e^{t \ln a}.$$

Wir definieren für beliebige $a \in \mathbb{C}^*$ (und nur für solche a !) und für $z \in \mathbb{C}$ den Hauptwert von a^z durch

$$pv a^z := \exp(z \text{Log } a).$$

Dieser stimmt für $a > 0$ und reelle z mit (1.2) überein; ferner gilt die Regel

$$pv a^{z+z'} = pv a^z \cdot pv a^{z'} \quad (z, z' \in \mathbb{C}).$$

Übung 1.11.

$$\begin{aligned} pv a^k &= a^k && \text{für } k \in \mathbb{Z} \\ pv a^{\frac{1}{n}} &= pv \sqrt[n]{a} && \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

2 Analytische Funktionen

2.1 Grenzwerte und Stetigkeit

Die Begriffe Grenzwert und Stetigkeit einer komplexen Funktion sind ähnlich den entsprechenden Begriffen für reelle Funktionen.

Definition 2.1. Sei $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion, wobei U eine Umgebung von z_0 ist.

Die Aussage $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ ist wie folgt definiert:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass falls $0 < |z - z_0| < \delta$ gilt, $|f(z) - a| < \varepsilon$ folgt.

Vorsicht:

Falls f eine Funktion einer Variablen ist, muss $x \rightarrow x_0$ nur entlang einer Linie betrachtet werden.

Falls f eine Funktion mehrerer Variablen ist, kann z aus jeder beliebigen Richtung gegen z_0 streben.

Definition 2.2.

1. Eine Funktion f heißt **stetig** in z_0 , falls $f(z_0)$ definiert ist und $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ gilt.
2. Die Funktion f heißt **stetig** auf dem Gebiet Ω , falls sie stetig in allen Punkten $z_0 \in \Omega$ ist.

Bemerkung 2.3.

1. Summe, Differenz und Produkt zweier stetiger Funktionen sind stetig.
2. Die Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$ ist stetig.
3. Seien $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: D' \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen. Wenn $f(D) \subseteq D'$ (d.h. der Wertebereich von f im Definitionsbereich von g enthalten ist), so kann man die zusammengesetzte (verkettete) Funktion

$$\begin{aligned} g \circ f: D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto g(f(z)) \end{aligned}$$

definieren. Die Komposition von stetigen Funktionen ist stetig.

4. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}, D \subseteq \mathbb{C}$, ist genau dann stetig, wenn sowohl der Real- als auch der Imaginärteil stetig sind.

2.2 Komplexe Ableitung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$ und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Insbesondere ist damit für jedes $z_0 \in \Omega$ die Funktion f stets auch in einer Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 definiert.

Definition 2.4. Die Funktion f heißt differenzierbar im Punkt $z_0 \in \Omega$, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

existiert. In diesem Fall bezeichnet man diesen Grenzwert mit $f'(z_0)$ oder $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Bemerkung 2.5.

- i) Auch hier darf z aus jeder beliebigen Richtung gegen z_0 streben.
- ii) Stetigkeit ist eine Eigenschaft, die auch in einem Randpunkt definiert werden kann, während Differenzierbarkeit stets nur in einem inneren Punkt definiert ist.

Beispiel 2.6.

1. Sei $f(z) = z^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z_0^2 + 2z_0 \Delta z + \Delta z^2 - z_0^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0. \end{aligned}$$

Wie zu erwarten war, entspricht dies mit dem aus der reellen Analysis bekannten Ergebnis. Im Allgemeinen ist die Situation aber nicht so einfach.

2. Sei $f(z) = \bar{z}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \bar{z}_0}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta x + i \Delta y}}{\Delta x + i \Delta y}. \end{aligned}$$

Falls Δz entlang der x -Achse gegen 0 strebt, haben wir $\overline{\Delta z} = \Delta z$, sodass

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1.$$

Falls hingegen Δz entlang der y -Achse gegen 0 strebt, folgt $\overline{\Delta z} = -\Delta z$ und daher

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1.$$

Daraus folgt, dass

$f(z) = \bar{z}$ nicht differenzierbar ist!

Die Rechenregeln für die komplexe Ableitung entsprechen den Rechenregeln für die reelle Ableitung.

a) **Linearität:** $\forall a, b \in \mathbb{C}$

$$(af + bg)' = a f' + b g'.$$

b) **Produktregel:**

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

c) **Quotientenregel:**

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad g(z) \neq 0.$$

d) **Kettenregel:**

$$\frac{d}{dz} \left(f(\underbrace{g(z)}_w) \right) = \frac{df}{dw}(g(z)) \frac{dg}{dz}.$$

e) **Umkehrregel:**

$$\frac{d}{dz} (f^{-1}(z)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

Bemerkung 2.7. f differenzierbar in $z_0 \implies f$ stetig in z_0 .

Beweis.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

2.3 Analytische Funktionen

Definition 2.8. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Die Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (komplex) **analytisch** oder auch **holomorph** auf Ω , falls f in jedem Punkt $z \in \Omega$ differenzierbar ist und die Ableitung $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist.

(Nach einem berühmten Satz von E. Goursat ist f' von selbst stetig. Wir machen es uns hier einfacher und nehmen die Stetigkeit von f' in die Definition auf).

Wir sagen, dass f analytisch in z_0 ist, wenn f analytisch in einer Umgebung U von z_0 ist. Eine Funktion, die auf ganz \mathbb{C} analytisch ist, heißt **ganz-analytische** oder auch **ganze** Funktion.

Beispiel 2.9. Polynome, Rationale Funktionen.

- Die Potenzen $1, z, z^2, \dots, z^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, sind ganze Funktionen.
- Entsprechend sind Polynome der Form

$$f(z) = c_0 + cz + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n,$$

wobei $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, ganze Funktionen. Der Quotient zweier Polynome $g(z)$ und $h(z)$

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

ist **analytisch** außer in solchen Punkten, in denen $h(z) = 0$.

Andere analytische Funktionen sind in den folgenden Beispielen zu finden.

2.4 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Wir wollen nun untersuchen, was sich über Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ aussagen lässt. Es geht also um die Zerlegung

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (x + iy \in \Omega).$$

Satz 2.10. (CR Differentialgleichungen)

- i) Sei $f = u + iv$ **analytisch** im Gebiet Ω . Dann haben $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetige partielle Ableitungen nach x und nach y , und diese partiellen Ableitungen sind miteinander verbunden durch die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$(CR) \quad u_x(x, y) = v_y(x, y); \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y) \quad x + iy \in \Omega.$$

Ferner gelten die Formeln

$$(2.1) \quad f' = u_x + iv_x = f_x, \quad f' = v_y - i u_y = -i f_y.$$

- ii) Haben die beiden Funktionen $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetige partielle Ableitungen nach x und nach y , und erfüllen sie die CR-Differentialgleichungen (CR), so ist die komplexe Funktion

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

auf Ω analytisch und es gelten die Formeln (2.1).

Bemerkung 2.11.

- a) Die komplexwertige Funktion $f = u + iv$ hat natürlich auch komplexwertige partielle Ableitungen nach x und nach y ; dabei ist $f_x = u_x + i v_x$. Die Gleichungen in (2.1) drücken aus, wie f_x, f_y mit der komplexen Ableitung f' verbunden sind.

- b) Die CR-Differentialgleichungen sind **notwendig** und **hinreichend** Bedingungen dafür, dass f analytisch ist.

Beweis von Satz 2.10.

i) Da f differenzierbar in z ist, haben wir

$$(2.2) \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

wobei das Inkrement Δz aus allen Richtungen gegen 0 geht.

Wir schreiben $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$. Dann ist $z + \Delta z = (x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$. Wir formulieren den Limes (2.2) wie folgt:

$$(2.3) \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)) - (u(x, y) + iv(x, y))}{\Delta x + i \Delta y}.$$

- Zuerst wählen wir in (2.3) $\Delta z = \Delta x$ (also $\Delta y = 0$).

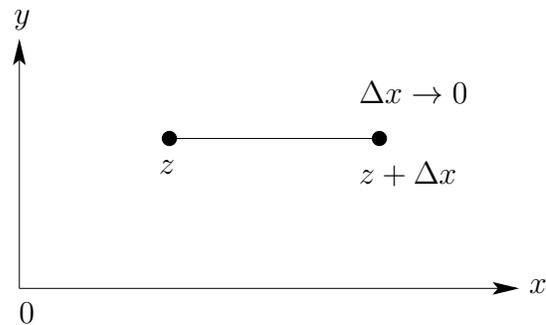


Fig. 2.1

Wir erhalten

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{(u(x + \Delta x, y) - u(x, y))}{\Delta x} + i \frac{(v(x + \Delta x, y) - v(x, y))}{\Delta x} \right] \\ &= u_x(x, y) + i v_x(x, y). \end{aligned}$$

- Danach wählen wir in (2.3) $\Delta z = i \Delta y$ (also $\Delta x = 0$).

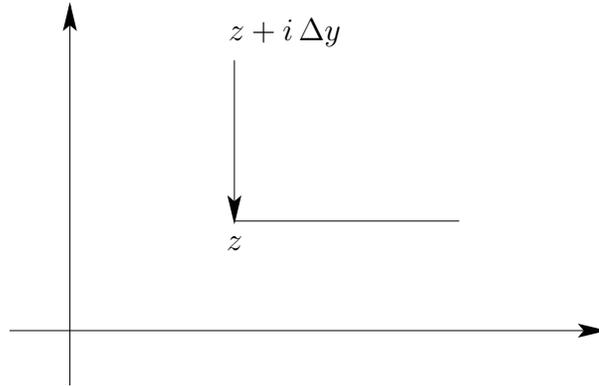


Fig. 2.2

Nun erhalten wir

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i \Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right]$$

$$= -i u_y + v_y.$$

Da nach Voraussetzung $f'(z)$ existiert, erhalten wir

$$u_x(x, y) + i v_x(x, y) = -i u_y(x, y) + v_y(x, y).$$

Damit eine solche Gleichung gilt, müssen die Real- und Imaginärteile der zwei komplexen Zahlen jeweils gleich sein. Daraus folgt

$$\begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y) \\ v_x(x, y) = -u_y(x, y) \end{cases}$$

für jeden Punkt (x, y) , in dem f differenzierbar ist.

ii) Wir betrachten einen festen Punkt $z = x + iy \in \Omega$. Wir brauchen ein bisschen Analysis in mehreren Variablen.

Für u, v gilt (man beachte, dass u, v reelle Funktionen von reellen Variablen x und y sind):

$$\begin{aligned} \Delta u &:= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \\ &= u_x(x, y) \Delta x + u_y(x, y) \Delta y + \sigma_1(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta v &:= v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \\ &= v_x(x, y) \Delta x + v_y(x, y) \Delta y + \sigma_2(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

wobei für die Funktionen σ_i folgt

$$\lim_{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0} \frac{\sigma_i(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Weiterhin gilt (wir schreiben abkürzend $u_x := u_x(x, y)$, und entsprechend für die anderen Funktionen)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta z} = \\ &= \frac{u_x \Delta x + u_y \Delta y + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y)}{\Delta z} + \frac{\sigma_1(\Delta x, \Delta y) + i \sigma_2(\Delta x, \Delta y)}{\Delta z}. \end{aligned}$$

Mithilfe von den (CR) ergibt sich

$$= \underbrace{\frac{u_x(\Delta x + i \Delta y) + i v_x(\Delta x + i \Delta y)}{\Delta z}}_{= \boxed{1}} + \underbrace{\frac{\sigma_1(\Delta x, \Delta y) + i \sigma_2(\Delta x, \Delta y)}{\Delta z}}_{= \boxed{2}}.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\boxed{1} + \boxed{2}) \\ &= u_x + i v_x + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sigma_1(\Delta x, \Delta y) + i \sigma_2(\Delta x, \Delta y)}{|\Delta z| \cdot \Delta z} \cdot |\Delta z| \\ &= u_x + i v_x + 0. \end{aligned}$$

Somit ist f differenzierbar und $f'(z) = u_x + i v_x$.

Korollar 2.12. Die Ableitung einer holomorphen Funktion f kann mittels der partiellen Ableitungen ihres Real- und Imaginärteils nach x und y ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + i v_x \\ &= v_y - i u_y. \end{aligned}$$

Beispiel 2.13.

1. $f(z) = \bar{z}$ ist nicht differenzierbar.

Die CR-Gleichungen sind nicht erfüllt:

$$f(z) = x - iy, \quad \text{also } u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y.$$

Damit folgt $u_x = 1 \neq -1 = v_y$.

2. $f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

In diesem Fall ist $u(x, y) = x^2 + y^2$ und $v \equiv 0$. Daraus folgt dass die CR-Differentialgleichungen nur im Ursprung erfüllt sind und die Ableitung von f nur im Ursprung existiert. Deswegen ist f nur im Ursprung differenzierbar.

Vorsicht:

Dennoch ist $f(z) = |z|^2$ keine analytische Funktion im Ursprung, denn eine Funktion heißt analytisch in z_0 , falls sie in einer ganzen Umgebung von z_0 analytisch ist.

3. $f(z) = e^z = e^x(\cos x + i \sin y).$

In diesem Fall ist $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$. Wir haben

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y & u_y &= -e^x \sin y \\ v_x &= e^x \sin y & v_y &= e^x \cos y \end{aligned}$$

\implies die *CR*-Differentialgleichungen sind erfüllt und

$$f'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

4. Der Hauptwert des Logarithmus ist analytisch auf \mathbb{C}^* . Es geht also um die Funktion

$$\text{Log } z := \ln|z| + i \text{Arg } z \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Wir überprüfen (CR) und wir beschränken uns dabei auf die Halbebene $x > 0$. Dort ist

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\ v(x, y) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung führt zu folgenden Ergebniss:

$$u_x = v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_x = -u_y = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Da diese partiellen Ableitungen in dem betrachteten Bereich stetig sind, ist Log eine analytische Funktion. Ferner haben wir:

$$\text{Log}'(z) = u_x + i v_x = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Bemerkung 2.14. $\text{Log } z$ ist die Umkehrfunktion der Einschränkung $\exp|_S$, wobei S den Streifen $|\text{Im } z| < \pi$ bezeichnet und es gilt $(e^z)' = e^z$ für alle z ungleich 0.

Damit haben wir für alle $w \in \mathbb{C}^*$

$$\text{Log}'w = \frac{1}{\exp'(\log w)} = \frac{1}{\exp \log w} = \frac{1}{w}$$

wie zuvor.

5. Die Funktionen

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

sind analytisch. (Übung !) Sie heißen **komplexe trigonometrische Funktionen**.

6. Die Funktionen

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

sind analytisch. (Übung !) Sie heißen **komplexe hyperbolische Funktionen**.

7. $pv \sqrt[n]{\cdot} =: g$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $f(z) = z^n$ eingeschränkt auf den Sektor

$$\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C}^* : -\frac{\pi}{n} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{n} \right\}.$$

f ist differenzierbar, und $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ auf \mathcal{S} . Deshalb ist g auf \mathbb{C}^* analytisch, und es folgt

$$\begin{aligned} g'(w) &= \frac{1}{f'(g(w))} = \frac{1}{n(g(w))^{n-1}} = \frac{g(w)}{ng^n(w)} = \\ &= \frac{1}{nw} \cdot g(w) = \frac{1}{nw} \cdot pv \sqrt[n]{w}. \end{aligned}$$

Satz 2.15. (Anwendung der CR-Differentialgleichungen)

Sei f analytisch auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und sei k eine Konstante. Fall es gilt $|f(z)| = k$ für alle $z \in \Omega$, dann ist f konstant.

Es ist klar, dass die Aussage falsch ist, wenn f eine komplexwertige Funktion von reellen Variablen ist. Um den Satz zu beweisen, fangen wir mit dem folgenden Lemma an:

Die Aussage des **Lemmas** ist sehr einfach, und sein Beweis demonstriert eine wichtige Idee in der komplexen Analysis: Wenn möglich betrachten wir ein Problem nicht auf der komplexen Ebene (oder einem Teilgebiet), sondern entlang Kurven in der komplexen Ebene. Der Vorteil ist, dass wir ein Problem in einer Dimension (einer reellen Variablen) erhalten.

Lemma 2.16. Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $f'(z) = 0$ auf Ω . Dann ist f auf Ω konstant.

Beweis. Seien $z_0 \neq z_1$ zwei beliebige Punkte aus Ω . Wir möchten beweisen, dass $f(z_0) = f(z_1)$. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Kurve, die z_0 und z_1 verbindet, sodass die Komposition $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Kurve ist, die die Punkte $f(z_0)$ und $f(z_1)$ verbindet.

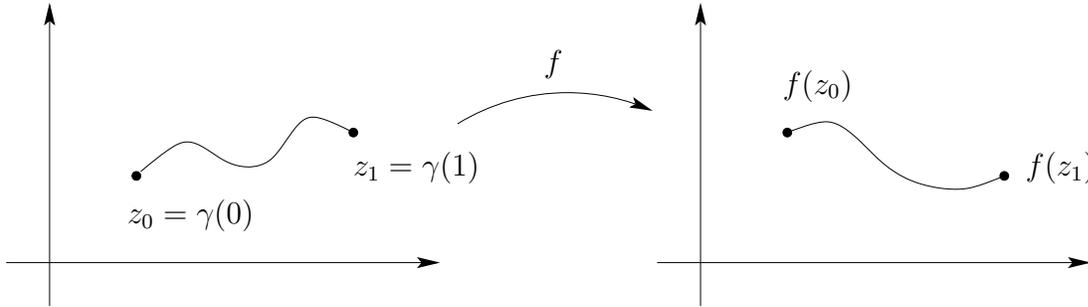


Fig. 2.3

Nach der Kettenregel ist der Tangentenvektor an die Kurve $f \circ \gamma$ gegeben durch $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \gamma'(t)$. Nach unserer Annahme ist $f'(\gamma(t)) = 0$, sodass $(f \circ \gamma)'(t) \equiv 0$. Daraus folgt, dass der Real- und der Imaginärteil von $f \circ \gamma$ konstant sind. Damit sind aber auch $f \circ \gamma$ und schließlich f konstant. \square

Beweis des Satzes 2.15: Da $|f(z)| = k$, haben wir $k^2 = |f(z)|^2 = u^2 + v^2$. Wenn $k = 0$, dann ist $f \equiv 0$. Nun nehmen wir an, dass $k \neq 0$. Wir leiten partiell nach x ab:

$$0 = 2uu_x + 2vv_x \stackrel{\text{(CR)}}{=} 2uu_x - 2vv_y$$

Analog, wir leiten partiell nach y ab:

$$0 = 2uu_y + 2vv_y \stackrel{\text{(CR)}}{=} 2uu_y + 2vv_x.$$

Daraus folgt:

$$(2.4) \quad \begin{cases} uu_x - vv_y = 0 \\ uu_y + vv_x = 0. \end{cases}$$

- (i) Wir multiplizieren die erste Gleichung in (2.4) mit u und die zweite Gleichung mit v , und wir erhalten

$$\begin{cases} u^2u_x - uvv_y = 0 \\ uvu_y + v^2u_x = 0. \end{cases}$$

Die Summe dieser zwei Gleichungen ist dann $0 = u^2u_x + v^2u_x = (u^2 + v^2)u_x$. Da $u^2 + v^2 = k^2 \neq 0$ angenommen wurde, muss $u_x = 0$ sein.

- (ii) Andererseits können wir die erste Gleichung in (2.4) mit $-v$ und die zweite Gleichung mit u multiplizieren und die Summe der zwei Gleichungen wie oben bilden. Wir erhalten diesmal

$$\begin{cases} -uvu_x + v^2u_y = 0 \\ u^2u_y + uvu_x = 0 \end{cases} \implies 0 = (u^2 + v^2)u_y = k^2u_y \\ \implies u_y = 0.$$

Nach den CR-Gleichungen gilt damit auch $v_x = v_y = 0$. Daraus lässt sich folgern, dass $f' = u_x + iv_x = 0$, und Lemma 2.16 liefert schließlich die Behauptung. \square

Übung 2.17.

- Beweisen Sie, dass die CR-Differentialgleichungen in Polarkoordinaten lauten $u_r = \frac{1}{r} v_\theta$, $v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$.
- Beweisen Sie, dass die CR-Differentialgleichungen genau dann erfüllt sind, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Letzteres ist äquivalent zu der Gleichung $f_x + if_y = 0$.

Übung 2.18.

1. Bestimmen Sie den Hauptwert des Argumentes der Zahlen $z_1 = 1 - i$, $z_2 = (1 - i)^{20}$, $z_3 = -5 - i$.
2. Bestimmen Sie die folgenden n -ten Wurzeln: $\sqrt[3]{3 + 4i}$, $\sqrt[4]{-4}$, $\sqrt[3]{1 - i}$.
3. Bestimmen Sie die vier komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 + (1 + i)z^2 + i = 0.$$

4. Bestimmen Sie die Menge:

- i) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1 - 2i| \leq \frac{1}{4}\}$;
- ii) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| \geq |z - i|\}$;
- iii) $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < |z - 1 + 2i| < \pi\}$.

5. Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile der folgenden Funktionen:

- i) $f(z) = 5z^2 - 12z + 3 + 2i$;

- ii) $f(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$;

6. Beweisen Sie, dass $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ nirgends differenzierbar ist.

7. Welche der folgenden Funktionen sind analytisch?

- i) $f(z) = i z \bar{z}$;
- ii) $f(z) = e^{-x} \cos y - i e^{-x} \sin y$;
- iii) $f(z) = \operatorname{Re} z^2 - i \operatorname{Im} z^2$;
- iv) $f(z) = \operatorname{Arg} z$.

Lösungen einiger Übungen

Übung 2.18:

1. $z_1 = 1 - i$.

Wir haben

$$r_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\arg z_1 = \arctan(-1) + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Laut Definition ist $-\pi < \operatorname{Arg} z_1 \leq \pi$.

Damit:

$$\operatorname{Arg} z_1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = (1 - i)^{20} = (\sqrt{2})^{20} e^{i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^{20}}$$

$$= 2^{10} e^{-i(5\pi + 40k\pi)}$$

$$= 2^{10} e^{-i\pi + 2k\pi}$$

$\implies \operatorname{Arg} z_2 = \pi$ (entspricht $k = 1$).

3.

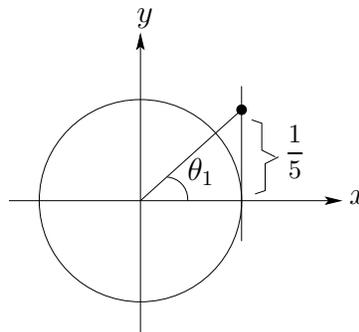
$$z_3 = -5 - i$$

$$r_3 = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$\arg z_3 = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\pi$$

$$= \sigma_1 + 2k\pi$$

$\implies \operatorname{Arg} z_3 = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$.



2. $z_1 = \sqrt[3]{3+4i}$

Wir schreiben $w_1 = 3 + 4i$ in der Polardarstellung um,

$$r_1 = \sqrt{9+16} = 5, \quad \arg w_1 = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + 2k\pi.$$

Wir können schreiben: $w_1 = 5e^{i \arctan \frac{4}{3}}$. Daher folgt

$$z_1^k = \sqrt[3]{5} e^{i \frac{1}{3} \arctan \frac{4}{3} + \frac{2k\pi}{3}} \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_1^0 = \sqrt[3]{5} e^{i \frac{1}{3} \arctan \frac{4}{3}}$$

$$z_1^1 = \sqrt[3]{5} e^{i \left(\frac{1}{3} \arctan \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)}$$

$$z_1^2 = \sqrt[3]{5} e^{i \left(\frac{1}{3} \arctan \frac{4}{3} + \frac{4\pi}{3} \right)}.$$

$z_2 = \sqrt[4]{-4}$

Mit der Darstellung $-4 = 4e^{i\pi}$ erhalten wir unmittelbar

$$z_2^k = \sqrt[4]{4} e^{i \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_2^0 = \sqrt{2}, \quad z_2^1 = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}, \quad z_2^2 = \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{4}}, \quad z_2^3 = \sqrt{2} e^{i \left(\frac{7\pi}{4} \right)}.$$

3. $z^4 + (1+i)z^2 + i = 0$.

Wir substituieren $w = z^2$, und erhalten somit die Gleichung

$$w^2 + (1+i)w + 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$w = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4i}}{2} = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{1-2i+i^2}}{2}$$

$$\implies w_1 = \frac{-(1+i) + (1-i)}{2} = \frac{-1-i+1-i}{2} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$w_2 = \frac{-(1+i) - (1-i)}{2} = \frac{-1-i-1+i}{2} = -1 = e^{-i\pi}.$$

Jetzt müssen wir noch $\sqrt{w_1}$ und $\sqrt{w_2}$ berechnen. Wir erhalten

$$\sqrt{w_1} = e^{-\frac{\pi i}{4} + \frac{2k\pi i}{2}}, \quad k = 0, 1$$

$$\sqrt{w_2} = e^{-\frac{i\pi}{2} + \frac{2k\pi i}{2}}, \quad k = 0, 1.$$

Insgesamt finden wir also die vier Lösungen

$$z_1 = e^{-\frac{\pi i}{4}}, \quad z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad z_3 = e^{-\frac{i\pi}{2}}, \quad z_4 = e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

Bemerkung 2.19. Man beachte: Für $(1 - i)^2 = -2i = 2e^{-\frac{i\pi}{2}}$ folgt

$$\sqrt{(1 - i)^2} = \sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2}} \quad k = 0, 1$$

$$k = 0 : \sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} = 1 - i$$

$$k = 1 : \sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4} + \pi} = -1 + i.$$

In der Lösungsformel für quadratische Gleichungen genügt es also, eine dieser beiden Wurzeln einzusetzen, die andere wird automatisch durch das \pm berücksichtigt. Im hintergrund ist, wie im Reellen, die Beobachtung $(-z)^2 = z^2$.

4. ii) $|z + i| \geq |z - i|$.

Mit $z = x + iy$ folgt

$$|z + i| = |x + i(y + 1)| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$$

$$|z - i| = |x + i(y - 1)| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |z + i| \geq |z - i| &\iff x^2 + (y + 1)^2 \geq x^2 + (y - 1)^2 \\ \implies (y + 1)^2 \geq (y - 1)^2 &\iff y^2 + 2y + 1 \geq y^2 - 2y + 1 \\ \implies y \geq 0. \end{aligned}$$

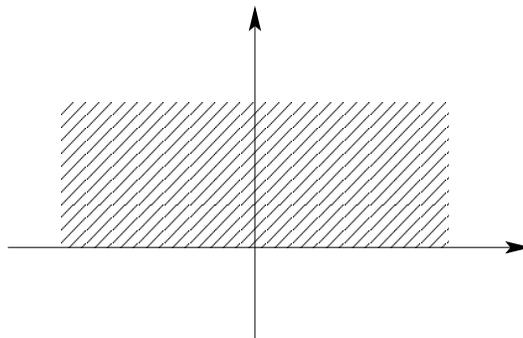


Fig. 2.4

5. ii) $f(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$.

Mit $z = x + iy$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{x + iy}{(x + 1) + iy} = \frac{(x + iy)(x + 1 - iy)}{(x + 1)^2 + y^2} = \\
 &= \frac{x(x + 1) - iyx + iy(x + 1) + y^2}{(x + 1)^2 + y^2} \\
 &= \frac{x(x + 1) + y^2}{(x + 1)^2 + y^2} + \frac{iy}{(x + 1)^2 + y^2} \\
 \operatorname{Re} f &= \frac{x(x + 1) + y^2}{(x + 1)^2 + y^2}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{y}{(x + 1)^2 + y^2}.
 \end{aligned}$$

6. Für jedes $z = x + iy$, $f(z) = x$ erfüllt nicht die CR-Differentialgleichungen.

7. i) $f(z) = iz\bar{z} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = iz = 0 \iff z = 0$

$\implies f$ ist nicht analytisch.

Alternativ: Es gilt $f(z) = i|z|^2$, und $|z|^2$ wurde schon in Beispiel 2.13 betrachtet.

ii) $f_x = -e^{-x} \cos y + i e^{-x} \sin y$
 $f_y = -e^{-x} \sin y - i e^{-x} \cos y$

$$f_x + i f_y = -e^{-x} \cos y + i e^{-x} \sin y - i e^{-x} \sin y + e^{-x} \cos y = 0$$

$\implies f$ ist analytisch!

iii) $f(z) = \operatorname{Re} z^2 - i \operatorname{Im} z^2$

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$\operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2 \quad \operatorname{Im} z^2 = 2xy.$$

Wir erhalten somit

$$u = x^2 - y^2, \quad v = -2xy,$$

und es folgt weiterhin

$$\begin{aligned}
 u_x &= 2x, & v_x &= -2y, \\
 u_y &= -2y, & v_y &= -2x.
 \end{aligned}$$

Die CR-Differentialgleichungen sind daher außer im Ursprung nirgends erfüllt, somit ist f nicht analytisch.

2.5 Harmonische Funktionen

Der **Laplace-Operator** auf \mathbb{R}^2 ist der Differentialoperator

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge. Eine C^2 -Funktion² $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn sie die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllt.

Sei nun $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Wir stellen Ω wieder als Teilmenge von \mathbb{R}^2 dar und bezeichnen Real- und Imaginärteil von f mit

$$u := \operatorname{Re} f, \quad v := \operatorname{Im} f.$$

Diese sind reellwertige C^1 -Funktionen³ auf Ω , die die CR -Gleichungen erfüllen:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

Sind die Funktionen $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar (wie wir später sehen werden ist diese Bedingung immer erfüllt), so gilt

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Hier folgt die zweite Gleichung aus (CR) und die dritte aus der Tatsache, dass die zweiten Ableitungen kommutieren (der Satz von H.A. Schwarz). Analog folgt $\Delta v = 0$.

Also sind u und v harmonische Funktionen. Erfüllen zwei harmonische Funktionen die CR -Gleichungen, so nennen wir v zu u **harmonisch konjugiert**.

Bemerkung 2.20. Die Laplace-Gleichung ist eine der wichtigsten partiellen Differentialgleichungen in der Physik. Sie kommt u.a. in der Gravitation, in der Elektrostatik und in der Wärmediffusion vor.

Beispiel 2.21. Wie können wir eine harmonische konjugierte Funktion mithilfe von der CR -Gleichungen finden?

Weisen Sie nach, dass $u = x^2 - y^2 - y$ harmonisch in \mathbb{C} ist und finden Sie eine zu u harmonische konjugierte Funktion v .

Lösung

²Eine Funktion f ist C^2 in ihrem Definitionsbereich, falls sie stetige erste und zweite Ableitungen nach x und y besitzt

³Eine Funktion f ist C^1 in ihrem Definitionsbereich, falls sie stetige erste Ableitungen nach x und y besitzt

- Wir haben

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_{xx} &= 2 \\ u_y &= -2y - 1, & u_{yy} &= -2. \end{aligned}$$

Damit ist $\Delta u = 2 - 2 = 0$.

- Eine zu u konjugierte Funktion v muss wegen der CR-Gleichungen erfüllen:

$$v_y = u_x = 2x \quad \text{und} \quad v_x = -u_y = 2y + 1.$$

Wir integrieren die erste Gleichung nach y

$$v(x, y) = \int 2x \, dy + h(x) = 2xy + h(x).$$

Wir leiten dieses Ergebnis nach x ab und erhalten

$$v_x = 2y + h'(x).$$

Aber v_x muss gleich $-u_y$ sein, was die Gleichung

$$2y + h'(x) = 2y + 1$$

liefert. Dies ergibt

$$h'(x) = 1 \implies h(x) = x + c.$$

Insgesamt erhalten wir somit $v(x, y) = 2xy + x + c$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$.

Diese Funktion v ist die allgemeine harmonisch Konjugierte zu der gegebenen Funktion u . Die zugehörige analytische Funktion ist

$$\begin{aligned} f(z) = u + iv &= (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x + c) \\ &= z^2 + iz + ic. \end{aligned}$$

Insbesondere können wir ablesen, dass f bis auf eine rein imaginäre Konstante eindeutig bestimmt ist.

Frage:

Gegeben sei eine “genügend glatte”, sagen wir zweimal stetig partiell ableitbare Funktion $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Kann man stets eine analytische Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit Realteil u finden?

Satz 2.22. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes achsenparalleles Rechteck und $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Dann existiert eine analytische Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit Realteil u .*

(Dieser Satz gilt im Allgemeinen für “einfach zusammenhängende” Gebiete $D \subseteq \mathbb{C}$).

Beweis von Satz 2.22: Sei $D = (a, b) \times (c, d)$, mit $a < b$, $c < d$.

Wir fixieren zwei Punkte $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$. Unser Ziel ist es, eine Funktion v derart zu konstruieren, dass u und v die CR-Gleichungen erfüllen. In Hinsicht auf die Gleichung $\partial_x u = \partial_y v$ definieren wir daher für $x \in (a, b)$:

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \partial_x u(x, t) dt + h(x).$$

Die (differenzierbare) Funktion h muss noch bestimmt werden.

Dieses Integral ist als Funktion von x differenzierbar, und wir finden

$$\begin{aligned} \partial_x v(x, y) &= \int_{y_0}^y \partial_{xx}^2 u(x, t) dt + h'(x) \\ &= - \int_{y_0}^y \partial_{yy}^2 u(x, t) dt + h'(x) \\ &= \partial_y u(x, y_0) - \partial_y u(x, y) + h'(x). \end{aligned}$$

Um auch die Gleichung $\partial_x v = -\partial_y u$ zu erfüllen, müssen wir wählen

$$h'(x) = -\partial_y u(x, y_0).$$

Damit erhalten wir

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \partial_x u(x, t) dt - \int_{x_0}^x \partial_y u(t, y_0) dt.$$

Die Funktion $f = u + iv$ leistet das Gewünschte. □

Vorsicht: Die Funktion

$$u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \mathbb{C}^*$.

Aber: es gibt keine analytische Funktion $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\operatorname{Re} f = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \ln |z|.$$

Übung 2.23. Bestimmen Sie die Parameter $a \in \mathbb{R}$, sodass die durch

$$u_a(x, y) = x^3 + axy^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

definierte Funktion harmonisch ist. Bestimmen Sie ferner für diese Parameter a auch alle zu u_a harmonisch konjugierten Funktionen, bzw. alle analytischen Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f = u_a$.

3 Die Integralformel von Cauchy

3.1 Kurvenintegrale

Wir beginnen mit einigen topologischen Begriffen.

Der Zusammenhangsbegriff

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- Ω ist zusammenhängend: Sind $U, V \subseteq \Omega$ offene Teilmengen, sodass $\Omega = U \cup V$ und $U \cap V = \emptyset$ gelten, dann ist $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.
- Ω ist weg-zusammenhängend: Für je zwei Punkte $z_0, z_1 \in \Omega$ gibt es eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z_1$.
- Für je zwei Punkte $z_0, z_1 \in \Omega$ gibt es eine glatte (das heißt C^∞) Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma(0) = z_0$, und $\gamma(1) = z_1$.

Definition 3.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Seien $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \Omega$ glatte Kurven mit

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) =: z_0$$

$$\gamma_0(1) = \gamma_1(1) =: z_1$$

γ_0, γ_1 heißen **homotop** (mit festen Endpunkten), wenn es eine C^∞ -Abbildung $\Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ gibt, sodass für alle $\lambda, t \in [0, 1]$ folgendes gilt:

$$\Phi(\lambda, 0) = z_0, \quad \Phi(\lambda, 1) = z_1, \quad \Phi(0, t) = \gamma_0(t), \quad \Phi(1, t) = \gamma_1(t).$$

Wir schreiben auch $\gamma_\lambda(t) := \Phi(\lambda, t)$ und nennen Φ oder die Kurvenschar $\{\gamma_\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq 1}$ eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 .

Definition 3.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Ω heißt einfach zusammenhängend, falls Ω zusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve in Ω homotop zur konstanten Kurve (wir sagen, dass die Kurve zu einem Punkt zusammenziehbar ist).

Bemerkung 3.3. Eine andere Charakterisierung von einfach zusammenhängender Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist oft nützlich.

Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ eine C^1 geschlossene Kurve, ohne Selbstschnitte; d.h. $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ für alle $0 \leq s < t < 1$.

Nach dem "Jordanschen Kurvensatz" berandet γ ein beschränktes Gebiet $\Omega_\gamma \subseteq \mathbb{C}$. Die Relation $\Omega_\gamma \subseteq \Omega$ gilt nun für alle derartigen Kurven genau dann, wenn Ω einfach zusammenhängend ist.

Beispiel 3.4.

- i) $B((0, 0), 1)$ ist einfach zusammenhängend.
- ii) $B((0, 0), 2) \setminus B((0, 0), 1)$ ist nicht einfach zusammenhängend.
- iii) Eine konvexe Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend. Seien γ_1, γ_2 zwei glatte Kurven mit denselben Endpunkten. Eine explizite Formel für eine glatte Homotopie ist

$$\gamma(t) := (1 - \lambda) \gamma_0(t) + \lambda \gamma_1(t).$$

Insbesondere ist jede glatte geschlossene Kurve in Ω zusammenhängend.

Definition 3.5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, und $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ eine C^1 -Kurve auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Das Integral von f über γ ist definiert durch

$$(3.1) \quad \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Die rechte Seite der Gleichung (3.1) ist zu verstehen als das Riemann-Integral einer stetigen komplexwertigen Funktion über dem Intervall $[a, b]$.

Der Wert des Integrals ist eine komplexe Zahl, deren Realteil das Integral der reellwertigen Funktion $t \mapsto \operatorname{Re}(f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t))$ ist und deren Imaginärteil das Integral der Funktion $t \mapsto \operatorname{Im}(f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t))$ ist.

Eigenschaften des Kurvenintegrals

1. **Linearität:** Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und beliebige stetige Funktionen f und g gilt

$$\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz.$$

2. $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{-\gamma} f(z) dz$, wobei $-\gamma$ die in umgekehrter Richtung durchlaufende Kurve ist.

3. Ist $|f(z)| \leq M$ in allen Punkten $z \in \gamma$, so gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) M,$$

wobei $L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ die Länge der Kurve γ ist.

4. Sei γ eine Kette von Kurven, das heißt, eine Konkatenation (Verkettung) von Kurven γ_i , sodass der Endpunkt einer Kurve der Anfangspunkt einer anderen Kurve ist.

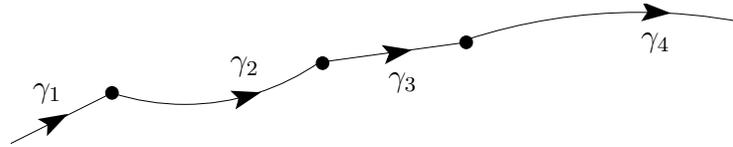


Fig. 3.1

Wir schreiben dann auch $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$, und sagen, dass γ eine *stückweise glatte* Kurve ist. Wir definieren

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

Beispiel 3.6.

- 1.** Wir möchten $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ von 0 bis $1 + 2i$ entlang zwei verschiedenen Kurven integrieren:

$$\begin{aligned} \gamma_1: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_2 &= \gamma_2^1 + \gamma_2^2 \\ t &\mapsto t + 2it & \gamma_2^1: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ & & t &\mapsto t + i0 \\ & & \gamma_2^2: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ & & t &\mapsto 1 + 2it \end{aligned}$$

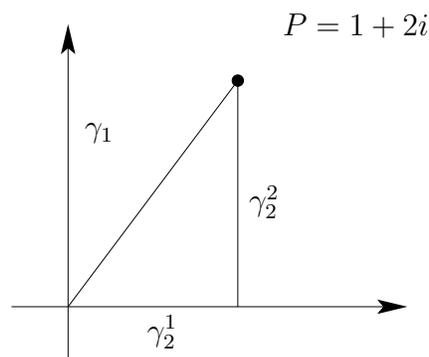


Fig. 3.2

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_0^1 f(t + 2it) \cdot (1 + 2i) dt \\
&= \int_0^1 t(1 + 2i) dt = (1 + 2i) \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1 + 2i}{2} \\
\int_{\gamma_2^1} f(z) dz &:= \int_0^1 t \cdot 1 dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\
\int_{\gamma_2^2} f(z) dz &:= \int_0^1 1 \cdot 2i dt = 2it \Big|_0^1 = 2i.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\gamma_1} f(z) dt = \frac{1 + 2i}{2}; \quad \int_{\gamma_2} f(z) dz = \frac{1}{2} + 2i.$$

Das Integral hängt von der Kurve ab!

2. Wir berechnen das Integral

$$\int_{\gamma = \partial D_r} z^n dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

wobei $\gamma = \partial D_r: t \mapsto z := r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ den in mathematisch positiver Richtung durchlaufenden Randkreis von der Kreisscheibe $D_r = B((0, 0), r)$, $r > 0$, bezeichnet. Es ist $\dot{\gamma}(t) = r i e^{it}$. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} r i e^{it} dt \\
&= i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.
\end{aligned}$$

Weiterhin finden wir

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi, & n = -1 \\ \frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0, & n \neq -1, \end{cases}$$

und erhalten damit schließlich

$$\int_{\gamma} z^n = 0, \quad n \neq -1, \quad \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Insbesondere ist das Ergebnis unabhängig von r .

Definition 3.7. Die (mathematische) positive Orientierung einer (geschlossenen) Kurve entspricht dem Gegenuhrzeigersinn. Grob gesprochen bedeutet dies, dass das von der Kurve umschlossene Gebiet “links von ihr liegt.”

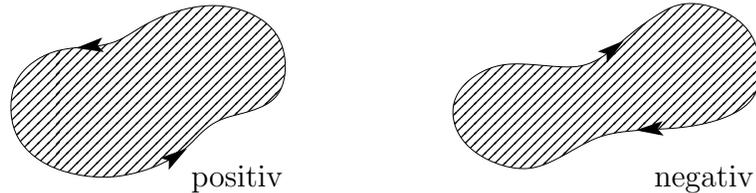


Fig. 3.3

Falls nicht explizit angegeben, nehmen wir im Folgenden stets die positive Orientierung.

3.2 Der Satz von Cauchy

Wir möchten Situationen bestimmen, in denen Kurvenintegral einer stetigen Funktion nur von den Anfangspunkten und Endpunkten der Kurve abhängt, aber unabhängig vom dazwischen durchlaufenen Weg ist.

Satz 3.8. Sei Ω ein beliebiges Gebiet und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- i) $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ für jede geschlossene Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$.
- ii) f besitzt eine analytische Stammfunktion $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (d.h. eine Funktion, sodass $F' = f$ auf Ω) und wir können das Integral $\int_{\gamma} f(z)dz$ mittels der Stammfunktion ausdrücken:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(B) - F(A), \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} A = \gamma(a), \\ B = \gamma(b), \end{array}$$

wobei γ eine beliebige Kurve in Ω und B (bzw. A) der Endpunkt (bzw. der Anfangspunkt) von γ ist.

Beweis. ii) \implies i)

Falls γ eine geschlossene Kurve ist, ist der Endpunkt gleich dem Anfangspunkt. Daraus folgt $\int_{\gamma} f(z)dz = F(A) - F(A) = 0$.

i) \implies ii)

Sei $A \in \Omega$ ein beliebiger, aber fester Punkt und sei $z \in \Omega$ ein beliebiger Punkt. Da Ω zusammenhängend ist, gibt es immer eine ganz in Ω verlaufende Kurve γ mit Anfangspunkt A und Endpunkt z . Wir setzen

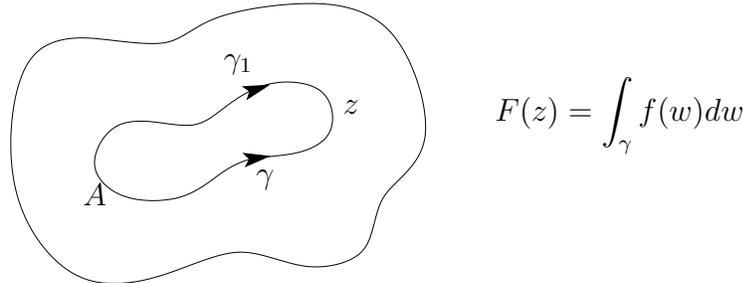


Fig. 3.4

und prüfen nach, dass die Funktion F wohldefiniert ist.

Sei γ_1 eine zweite Kurve von A nach z . Dann folgt aus der Voraussetzung i)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma+(-\gamma_1)} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{-\gamma_1} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass F Abbildung Fig. 3.4 in der Tat wohldefiniert ist, d.h. ihre Definition unabhängig von der konkreten Wahl einer Kurve γ , ist. Wir verzichten an dieser Stelle auf den Nachweis, dass diese Funktion F analytisch und dass es $F' = f$ gilt, (prinzipiell folgt man dabei einer ähnlichen Argumentation wie im Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aus der reellen Analysis). \square

Die eigentliche Frage nun lautet: **Wann gilt eine dieser Aussagen?**

Das ist der Inhalt des **Integralsatzes von Cauchy**, eines der zentralen Ergebnisse der komplexen Analysis. In der Tat werden alle weiteren Resultate der komplexen Analysis, die in diesem Kurs behandelt werden, Folgerungen daraus sein.

Satz 3.9. (*Satz von Cauchy für einfach zusammenhängende Gebiete*)

Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet. Für jede geschlossene Kurve γ in Ω folgt dass $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Die Grundidee in 3.9 ist, dass das Kurvenintegral einer holomorphen Funktion über γ invariant unter Homotopie ist und jede geschlossene Kurve ist homotop zu einem Punkt.

Beispiel 3.10.

- 1.** Sei f eine ganze Funktion (z.B. $f(z) = z^n$, $n \geq 0$, $f(z) = \sin z$, $f(z) = e^z$). Dann ist $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jede geschlossene Kurve γ .

2. Sei $f(z) = \frac{1}{\sin z}$. Da $\sin z = 0$ für $z = \pi k$, $z \in \mathbb{Z}$, ist f nicht ganz.

Falls γ eine geschlossene Kurve in \mathbb{C} ist, die keine Nullstellen von $\sin z$ in ihrem Inneren enthält (und natürlich auch die Kurve selbst durch keine der Nullstellen verläuft), erhalten wir $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

3. $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, wobei $\gamma = \partial D = \text{Einheitskreis}$.

Die Funktion ist nicht analytisch \implies wir können den Satz von Cauchy nicht anwenden. Mit der Parameterdarstellung $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ von ∂D , erhalten wir

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i.$$

Das heißt also: Für nicht-analytische Funktionen ist der Satz von Cauchy nicht nur nicht anwendbar, sondern auch die Aussage ist im allgemeinen auch falsch.

4. $f(z) = \frac{1}{z}$ ist auch nicht analytisch. Sei $\gamma = \partial D$, dann haben wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} e^{it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{2it} dt \\ &= i \frac{1}{2i} e^{2it} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

(Die Funktion $t \mapsto e^{it}$ ist 2π -periodisch). Dieses Beispiel zeigt: Auch für nicht-analytische Funktionen kann das Kurvenintegral trotzdem den Wert 0 ergeben.

5. Sei $f = \frac{1}{z}$ auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Funktion f ist zwar analytisch auf Ω , dieses Gebiet ist aber nicht einfach zusammenhängend. Falls $\gamma = \partial D = \partial B(0, 1)$ (mit positiven Orientierung), dann gilt

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i.$$

Das Problem hier ist, dass es Punkte im Inneren der Kurve gibt, in denen f nicht analytisch (nicht definiert) ist.

Wir werden später sehen, was wir sagen können, falls das Gebiet Ω nicht einfach zusammenhängend ist.

Korollar 3.11. Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem einfachen zusammenhängenden Gebiet Ω . Dann ist das Integral von f unabhängig von der Kurve; d.h. seien γ_1, γ_2 zwei Kurven von p nach q , wobei $p, q \in \Omega$. Dann ist

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Beweis. Identisch zum Teil i) \implies ii) des Beweises von Satz 3.8. □

Anwendungen des Satzes von Cauchy

Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra sagt aus, dass jedes **nicht-konstante Polynom** $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} besitzt. Wenn p , beispielsweise, die Nullstelle z_1 hat, kann man den Satz erneut auf das Polynom $p_1(z) = \frac{p(z)}{z-z_1}$ anwenden; iterativ folgt dann, dass jedes Polynom n ten Grades genau n Nullstellen besitzt (von denen aber möglicherweise einige übereinstimmen).

Beweis. Wir wollen diesen Satz mithilfe des Satzes von Cauchy beweisen. O.B.d.A. können wir dafür vereinfachend annehmen, dass $a_n = 1$. Wir wollen einen Widerspruchsbeweis führen, und nehmen dafür weiter an, dass $p(z) \neq 0$ für jede $z \in \mathbb{C}$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{p'(z)}{p(z)} \\ &= \frac{z^{n-1} \cdot (n + (n-1)a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1})}{z^n \cdot (1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n})} \\ &= \frac{n}{z} (1 + r(z)) , \end{aligned}$$

eine ganze Funktion, wobei $r(z) \rightarrow 0$, falls $|z| \rightarrow +\infty$. Jetzt wählen wir $R > 0$ so gross, dass $|r(z)| < \frac{1}{2}$ für alle $z \in \partial D_R = \partial B(0, R)$.

Nach dem Satz von Cauchy gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D_R} f(z) dz = \int_{\partial D_R} \frac{n}{z} dz + n \int_{\partial D_R} \frac{r(z)}{z} dz \\ &= 2n\pi i + n \int_{\partial D_R} \frac{r(z)}{z} dz . \end{aligned}$$

Aber:

$$\left| \int_{\partial D_R} \frac{r(z)}{z} dz \right| \leq 2\pi R \max_{z \in \partial D_R} \left| \frac{r(z)}{z} \right| = 2\pi \max_{z \in \partial D_R} |r(z)| < \pi .$$

Deshalb würden wir $0 = 2n\pi i + \alpha$ erhalten, wobei α eine komplexe Zahl mit $|\alpha| < n\pi$ ist, und das ist offenbar ein Widerspruch. \square

Übung 3.12. Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \cos(2t) dt$ mithilfe des Satzes von Cauchy.

Der Satz von Cauchy für beliebige Gebiete

Definition 3.13. Ein Gebiet Ω mit genau einem Loch wird zweifach zusammenhängend genannt.

Korollar 3.14. Sei Ω ein zweifach zusammenhängendes Gebiet mit Randkomponenten C_1, C_2 (d.h. $\partial\Omega = C_1 \cup C_2$).

Sei $f: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem Gebiet Ω_0 , das Ω enthält, $\Omega \subseteq \Omega_0$.

Wir nehmen an, dass die Kurve C_1 im von der Kurve C_2 umschlossenen Gebiet enthalten ist und, dass die gleiche Orientierung hat (vgl. Fig. 3.5).

1) Dann ist

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

2) Falls $\gamma \subseteq \Omega_0$ eine geschlossene Kurve ist, die nur Punkte von Ω in ihrem Inneren enthält, dann ist

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

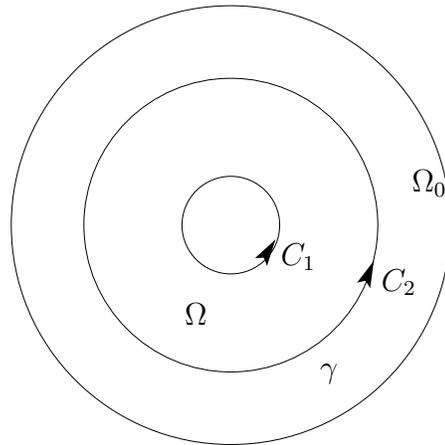
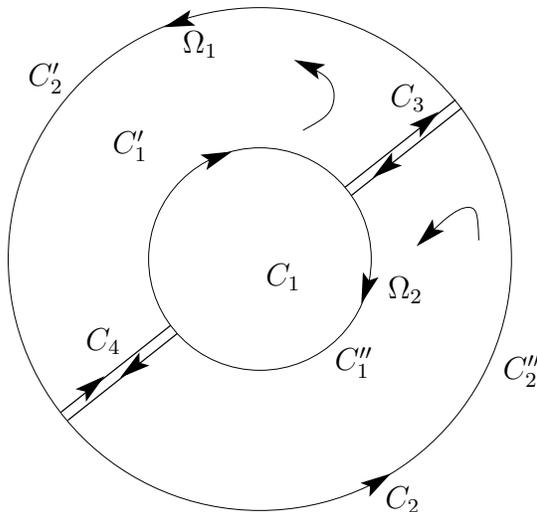


Fig. 3.5

Idee des Beweises von 1):



Seien $-C_1$ und C_2 die Randkomponenten mit mathematisch positiven Orientierung (in Fall von C_2 entspricht dies dem Gegenuhrzeigersinn, und im Fall von $-C_1$ ist es im Uhrzeigersinn).

Fig. 3.6

Wir können das Gebiet in zwei einfach zusammenhängende Gebiete zerlegen: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Seien $-C_1 = -C'_1 \cup -C''_1$, $C_2 = C'_2 \cup C''_2$ und C_3, C_4 die Kurven längs des Schnittes mit der gezeigten Orientierung. Da Ω_1 und Ω_2 einfach zusammenhängend sind, gilt

$$\int_{\partial\Omega_1} f(z)dz = 0 = \int_{\partial\Omega_2} f(z)dz.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega_1} f dz = \int_{-C'_1} f dz + \int_{C_3} f dz + \int_{C'_2} f dz + \int_{C_4} f dz \\ 0 &= \int_{\partial\Omega_2} f dz = \int_{-C''_1} f dz - \int_{C_3} f dz + \int_{C''_2} f dz - \int_{C_4} f dz. \end{aligned}$$

Wir addieren diese zwei Gleichungen und wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-C'_1} f dz + \int_{-C''_1} f dz + \int_{C'_2} f dz + \int_{C''_2} f dz \\ \implies &\int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz. \quad \square \end{aligned}$$

Diese Aussage ist das sogenannte **Prinzip der Deformation von Kurven**. Wir können dieses Prinzip anwenden, um eine sehr wichtige Konsequenz des Satzes von Cauchy zu zeigen: die **Integralformel von Cauchy**.

Satz 3.15. (*Integralformel von Cauchy*)

Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω . Für jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ und jede geschlossene Kurve γ in Ω , die z_0 einmal im mathematisch positiven Sinn umläuft, gilt dass

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

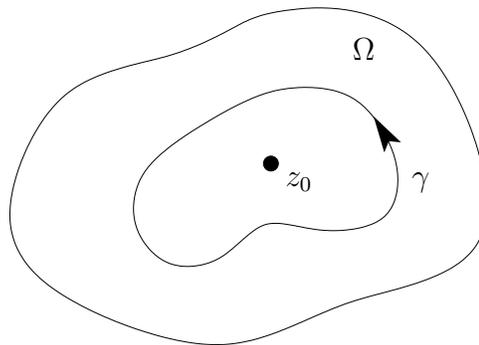


Fig. 3.7

Beweis. Wir formen den Integranden um, gemäß

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \underbrace{\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz}_{\boxed{1}} + \underbrace{\int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz}_{\boxed{2}}.$$

Für den zweiten Term folgt dann sofort

$$\boxed{2} = f(z_0) \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = f(z_0) \cdot 2\pi i.$$

Nach Korollar 3.14 gilt $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{dz}{z - z_0}$, wobei ρ hinreichend klein ist.

Es bleibt zu zeigen $\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$, bzw. $|\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Laut dem Prinzip der Deformation der Kurven genügt es dazu, das Integral entlang einer Kreislinie $\partial B(z_0, \rho)$ mit Zentrum z_0 und Radius $\rho > 0$ zu berechnen.

Sei $\varepsilon > 0$; die Funktion f ist analytisch und damit insbesondere stetig. Folglich können wir $\rho > 0$ so wählen, dass die Ungleichung $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ auf $\partial B(z_0, \rho)$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| &= \left| \int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \max_{z \in \partial B(z_0, \rho)} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \cdot 2\pi\rho \leq \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 3.16.

1. Wir berechnen $\int_C \frac{e^z}{z - 2} dz$, wobei

- i) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 1\}$;
- ii) $C = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{3}{2}\right| = 1\right\}$;
- iii) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \partial D = \partial B(0, 1)$.

Da $z = 2$ im Inneren von C in i) und ii) liegt, ist

$$\int_C \frac{e^z}{z - 2} dz = 2\pi i e^2.$$

Andererseits folgt

$$\int_{\partial D} \frac{e^z}{z - 2} dz = 0,$$

da $\frac{e^z}{z - 2}$ holomorph auf $D = B(0, 1)$ ist.

2. Wir möchten das Integral $\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz$ berechnen, wobei C :

- i) $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$;
- ii) $C_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1}{2}\right| = 1\right\}$;
- iii) $C_3 = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \left(-1 + \frac{i}{2}\right)\right| = 1\right\}$;
- iv) $C_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$.

Wäre die Funktion analytisch auf \mathbb{C} , hätten wir nichts zu berechnen und das Integral wäre null. Aber $\frac{z^2+1}{z^2-1}$ ist in $z = 1$ und $z = -1$ nicht analytisch.

- i) Um die Integralformel von Cauchy zu benutzen, muss die Funktion $f(z)$ auf dem Inneren der Kurve analytisch sein. So schreiben wir

$$\frac{z^2}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{(z - 1)(z + 1)} = \frac{f(z)}{z - 1}, \quad \text{wobei } f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1}.$$

Dann gilt:

$$\int_{C_1} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - 1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i.$$

- ii) Gleiche Argumentation wie für i).
- iii) Jetzt schreiben wir $\frac{z^2+1}{z^2-1} = \frac{g(z)}{z+1}$, wobei $g(z) = \frac{z^2+1}{z-1}$ analytisch auf dem Inneren von C_3 ist. Damit folgt

$$\int_{C_3} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \int_{C_3} \frac{g(z)}{z + 1} dz = 2\pi i g(-1) = -2\pi i.$$

- iv) Hier erhalten wir $\int_{C_4} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = 0$, weil $\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$ analytisch auf dem Inneren von C_4 ist.

3. Wir berechnen das Integral

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\tan z}{z^2 - 1} dz.$$

$\tan z$ ist in den Punkten $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ nicht analytisch, aber alle diese Punkte liegen außerhalb dieses Kreises.

$\frac{1}{z^2-1}$ ist in $z = 1$ und $z = -1$ nicht analytisch, und beide Punkte sind innerhalb des Kreises. Wir verwenden die Zerlegung

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1} \right).$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\tan z}{z^2 - 1} dz &= \frac{1}{2} \int_C \frac{\tan z}{z - 1} dz - \frac{1}{2} \int_C \frac{\tan z}{z + 1} dz \\ &= \pi i \tan(1) - \pi i \tan(-1) = 2\pi i \tan(1).\end{aligned}$$

Korollar 3.17. *Unter den Voraussetzungen von Korollar 3.14 und für jedes $z_0 \in \Omega$ gilt*

$$2\pi i f(z_0) = \int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

3.3 Anwendungen der Integralformel

1. Mittelwert-Eigenschaft

Satz 3.18. *Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion in dem beliebigen Gebiet Ω und $B(a, \rho)$ eine geschlossene Kreisscheibe in Ω . Dann gilt*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

In Worten: *Der Wert von f im Mittelpunkt einer Kreisscheibe $B(a, r) \subseteq \Omega$ entspricht dem Mittelwert von f über ihren Rand.*

Beweis. Nach der Integralformel von Cauchy haben wir

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, \rho)} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Mit der Parametrisierung $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, des Kreises $\partial B(a, \rho)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i\rho e^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) dt. \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung 3.19. Die Annahme, dass f analytisch ist, ist notwendig. Die Funktion $f(z) = |z|$ liefert ein einfaches Gegenbeispiel. Dann gilt

$$f(0) = 0 \neq 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,1)} |z| dz.$$

Eine wichtige Konsequenz der Mittelwerteigenschaft ist das folgende **Maximum-Prinzip**.

Satz 3.20. Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion und sei $z_0 \in \Omega$ ein Punkt im Inneren von Ω , in dem $|f|$ ein **Maximum** annimmt, d.h. $|f(z_0)| = \max_{z \in \Omega} |f(z)|$. Dann ist f konstant auf Ω .

Frage:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist dann stets auch f' differenzierbar?

Im Allgemeinen: Nein!

Sei zum Beispiel $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$. Die Funktion f ist differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \frac{3}{2} |x|^{\frac{3}{2}-1} \frac{x}{|x|} = \frac{3}{2} |x|^{-\frac{1}{2}} x$$

ist stetig und nicht mehr differenzierbar im Ursprung; grob gesprochen, weil der Graph von f' eine Ecke im Ursprung hat.

Im Gegensatz dazu ist eine analytische Funktion immer beliebig oft differenzierbar, und mithilfe der Integralformel von Cauchy können wir auch eine Formel für die höheren Ableitungen herleiten.

Satz 3.21. Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f beliebig oft differenzierbar, und für die n -te Ableitung $f^{(n)}$ gilt die Formel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

wobei γ eine Kurve ist, die z_0 einmal im positiven Sinn umläuft.

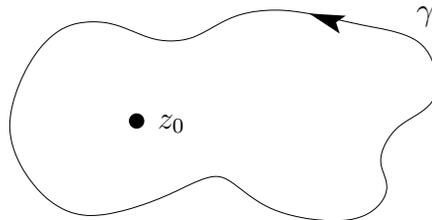


Fig. 3.8

Bemerkung 3.22. Um sich an die Formel zu erinnern, muss man lediglich die übliche Cauchy-Formel n -mal unter dem Integral nach z_0 ableiten.

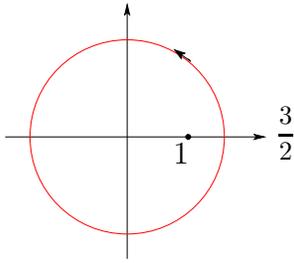
Diese Formel kann wiederum verwendet werden, um weitere Integrale zu berechnen.

Beispiel 3.23. Wir möchten das Integral $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z - \pi i)^2} dz$ berechnen, wobei γ eine Kurve ist, die πi einmal im positiven Sinn umläuft:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z - \pi i)^2} dz &= 2\pi i \frac{d}{dz} (\cos z) \Big|_{\pi i} = -2\pi i \sin(\pi i) \\ &= 2\pi \sinh(\pi). \end{aligned}$$

Falls $\gamma = \partial B(0, 1)$, so ist $\int_{\partial B(0,1)} \frac{\cos z}{(z - \pi i)^2} dz = 0$, weil die Funktion $\frac{\cos z}{(z - \pi i)^2}$ auf $B(0, 1)$ analytisch ist.

Beispiel 3.24. Sei $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{3}{2}\}$. Wir möchten das Integral $\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z - 1)^2(z^2 + 4)} dz$ berechnen.



Hier ist $z = 1$ innerhalb γ und $z = \pm 2i$ liegen außerhalb γ .

Fig. 3.9

Das heißt, die Funktion $f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 4}$ ist analytisch auf dem Inneren von γ . Wir können daher die Formel von Cauchy verwenden:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{e^z}{(z - 1)^2(z^2 + 4)} dz &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - 1)^2} dz = 2\pi i f'(z) \Big|_{z=1} \\ &= 2\pi i \frac{e^z(z^2 + 4) - e^z 2z}{(z^2 + 4)^2} \Big|_{z=1} \\ &= 2\pi i \frac{3e}{25} = \frac{6\pi e i}{25}. \end{aligned}$$

2. Ungleichung von Cauchy und Satz von Liouville

Wir können mittels der Formel der n -ten Ableitung **die Ungleichung von Cauchy** erhalten.

Lemma 3.25. *Wir nehmen an, dass $|f(z)| \leq M$ auf der Kreislinie vom Radius r um den Punkt a gilt. Dann folgt*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M}{r^n}.$$

Beweis. Laut der Formel der n -ten Ableitung haben wir

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \max_{z \in \partial B(a,r)} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}} \\ &= n!r \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \max_{z \in \partial B(a,r)} |f(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M. \quad \square \end{aligned}$$

Aus dieser einfachen (und trotzdem wichtigen) Abschätzung ergibt sich der folgende Satz:

Satz 3.26. (Liouville)

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und wir nehmen an, dass $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$. Dann ist f konstant auf \mathbb{C} .

Beweis. Nach der Ungleichung von Cauchy mit $n = 1$ folgt, dass

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{\rho} \text{ f\"ur jedes } \rho > 0.$$

Diese Abschätzung bleibt korrekt für $\rho \rightarrow \infty$, und wir erhalten somit $|f'(z)| = 0$ auf ganz \mathbb{C} . Damit ist aber auch $f'(z) = 0$, und nach Lemma 2.16 ist f konstant. \square

Der Fundamentalsatz der Algebra: ein alternativer Beweis

Wir wollen noch einen zweiten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra mit Methoden der komplexen Analysis geben (es gibt natürlich noch zahlreiche weitere Beweise aus anderen Teilbereichen der Mathematik), der auf dem Satz von Liouville basiert,

Sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, n \geq 1, a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$. Wir nehmen wieder an, dass p keine Nullstelle hat, also dass $p(z) \neq 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Aus der Umformung

$$|p(z)| = |a_n z^n| \left| \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right) \right|$$

können wir sofort ablesen, dass

$$(3.2) \quad \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |p(z)| = +\infty.$$

Wir betrachten nun die Funktion $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. Da $p(z) \neq 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt, ist $f(z)$ eine ganze Funktion. Außerdem existiert wegen (3.2) ein $R > 0$, so dass $|f(z)| \leq 1$ für $|z| > R$. Andererseits hat $|f(z)|$ auf der Menge $\overline{B(0, R)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ ein Maximum, d.h. $|f(z)| \leq M$, mit $M > 0$ (denn $|f|$ ist stetig und $\overline{B(0, R)}$ ist eine abgeschlossene und beschränkte (also kompakte) Menge). Deshalb folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$|f(z)| \leq C := \max(1, M),$$

und aus Satz 3.26 schließen wir, dass f auf \mathbb{C} konstant ist, und damit auch $p = \frac{1}{f}$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (p soll ein nicht-konstantes Polynom sein). \square

Wir kommen nun zu einer sehr wichtigen Eigenschaft analytischer Funktionen: Jede analytische Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich an jeder Stelle $a \in \Omega$ in eine Taylor-Reihe entwickeln, und die Reihe stellt die Funktion auf einer maximalen offenen Kreisscheibe (d.h. eine Kreisscheibe von maximalem Radius) dar.

Satz 3.27. *Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem Gebiet und sei $z_0 \in \Omega$ ein Punkt mit Abstand $\rho > 0$ vom Rand von Ω . Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n}{n!}$$

für alle $z \in B(z_0, \rho)$.

Die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Scheibe

$$\overline{B(z_0, R)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\},$$

wobei $R < \rho$.

Bevor wir Satz 3.27 beweisen, möchten wir einige Eigenschaften von Potenzreihen wiederholen.

3. Potenzreihen

Eine Potenzreihe mit Mittelpunkt (Entwicklungspunkt) $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

wobei $z \in \mathbb{C}$ und $a_k \in \mathbb{C}$ (a_k sind die Koeffizienten der Reihe).

Wir können immer annehmen, dass $z_0 = 0$ ist (andernfalls substituieren wir $w := z - z_0$) und wir betrachten dann die Potenzreihen

$$(3.3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Potenzreihen konvergieren auf Kreisscheiben

Satz 3.28.

- a) *Für jede Potenzreihe (3.3) existiert eine Zahl ρ , $0 \leq \rho \leq +\infty$, so dass gilt: Für $|z| < \rho$ ist die Reihe absolut konvergent und für $|z| > \rho$ divergent. Diese Zahl ρ heißt Konvergenzradius.*

b) Der Konvergenzradius ρ ergibt sich stets als

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Dabei wird $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$ gesetzt. Alternativ kann er berechnet werden als

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Beispiel 3.29.

1. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert auf der offenen Kreisscheibe $B(0, 1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und stellt dort die Funktion $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ dar.

2. Die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{j^2}}{j!} = 1 + z + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^9}{3!} + \dots$$

muss erst auf die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

gebracht werden. Es ergibt sich

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{j!}, & \text{falls } k = j^2, \quad j \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und somit

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j^2]{\frac{1}{j!}}.$$

Wir wissen, dass für jedes $j \geq 1$ die einfache Abschätzung $1 \leq j! \leq j^j$ gilt und folglich

$$1 \leq \sqrt[j^2]{j!} \leq \sqrt[j^2]{j^j} = \sqrt[j]{j}.$$

Da hier die rechte Seite mit $j \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert, ergibt sich auch in diesem Beispiel $\rho = 1$.

Satz 3.28 sagt nichts über das Verhalten der Reihe (3.3) auf der Kreislinie $|z| = \rho$ aus. Dieses Verhalten variiert von Reihe zu Reihe.

Beispiel 3.30.

1. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ divergiert in allen Punkten von $\partial B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

2. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ divergiert an der Stelle $z := 1$ und konvergiert an der Stelle $z := -1$.

Man kann sogar zeigen, dass diese Reihe in allen Punkten $z \in \partial B(0, 1) \setminus \{1\}$ konvergiert (dabei verwendet man beispielsweise das Abelsche Konvergenzkriterium).

3. Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ absolut für jedes $z \in \partial B(0, 1)$.

Eigenschaften von Potenzreihen

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist die Funktion $f: B(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, holomorph und es gilt

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, \quad \forall z \in B(0, \rho).$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k z^{k-n}.$$

Insbesondere gilt $f^{(n)}(0) = n! a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Daraus folgt, dass die Reihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gleichzeitig die Taylor-Reihe von f ist.

Um den Satz 3.27 zu beweisen, benötigen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 3.31. Sei Ω ein Gebiet, z_0 ein Punkt in Ω und $\rho > 0$ eine positive reelle Zahl, sodass $\overline{B}(z_0, \rho) \subseteq \Omega$.

Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die stetig auf der Kreislinie $\partial B(z_0, \rho)$ ist und sei g durch

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \forall z \notin \partial B(z_0, \rho)$$

definiert. Dann ist

$$g(z) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n & \text{für } |z - z_0| < \rho \\ -\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n & \text{für } |z - z_0| > \rho, \end{cases}$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Sei $|z - z_0| < \rho$ (der Beweis für $|z - z_0| > \rho$ ist ähnlich). Falls $\zeta \in \partial B(z_0, \rho)$, ist $|\zeta - z_0| = \rho$, sodass

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} < \frac{\rho}{\rho} = 1,$$

und wir können $\frac{1}{\zeta - z}$ wie folgt in eine geometrische Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Wir haben hier benutzt, dass die geometrische Reihe gleichmäßig konvergiert. \square

Bemerkung 3.32.

- 1) Der Satz 3.27 besagt, dass jede analytische Funktion nach Taylor entwickelt werden kann.
- 2) ρ kann dabei auch ∞ sein, d.h. eine ganze Funktion kann in einer auf der ganzen komplexen Ebene konvergente Taylor-Reihe entwickelt werden.

Beweis von Satz 3.27: Wir dürfen $z_0 = 0$ annehmen. Wir betrachten ein festes $z \in B(0, \rho)$ und wir wählen ein r mit $|z| < r < \rho$. Wir können dann die Integralformel von Cauchy auf die Kreisscheibe $B(0, r)$ anwenden und wir erhalten mit Lemma 3.31 die Darstellung von f :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

wobei die a_k durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad k \geq 0$$

gegeben sind wie behauptet. \square

Beispiel 3.33.

1. Wir bestimmen die Taylor-Reihe von $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ mit Zentrum in $z_0 = 0$.

Lösung: Wir erinnern uns, dass für jedes $|z| < 1$ gilt

$$(3.4) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Wir ersetzen in (3.4) z durch $-z^2$:

$$(3.5) \quad \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Wie man sofort erkennt, ist $f(z)$ nicht analytisch in $z = \pm i$. Folgerichtig gilt die Gleichung (3.5) nicht für $|z| \geq 1$ (die Reihe auf der rechten Seite divergiert für jedes solche z).

2. Wir bestimmen die Taylor-Reihe von $f(z) = \arctan z$.

Lösung: Es gilt $f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

Wir integrieren (3.5) gliedweise und benutzen, dass $f(0) = 0$ ist:

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot z^{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

3. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe um $z = z_0$ von

a) $f(z) = \sin\left(\frac{z^2}{2}\right), \quad z_0 = 0;$

b) $f(z) = \frac{1}{8+z^2}, \quad z_0 = 1;$

c) $f(z) = \frac{1}{1+2iz}, \quad z_0 = i;$

d) $f(z) = \sin^2 z, \quad z_0 = 0;$

e) $f(z) = \frac{z+2}{1-z^2}, \quad z_0 = 0.$

Lösung: Wir zeigen nur e):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z+2}{1-z^2} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} \\ &= \frac{A(1+z) + B(1-z)}{1-z^2}. \end{aligned}$$

Es folgt $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ sowie

$$\frac{3}{2} \frac{1}{1-z} = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

Insgesamt ist somit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \right) z^n, \quad |z| < 1.$$

4 Laurent-Entwicklung und Singularitäten

Wir haben uns bisher mit analytischen Funktionen beschäftigt. Insbesondere haben wir gelernt:

- 1) das Integral einer analytischen Funktion zu berechnen;
- 2) eine analytische Funktion nach Taylor zu entwickeln;
- 3) wir haben auch das Integral spezieller nicht-analytischer Funktionen berechnet, wie zum Beispiel

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

wobei f eine analytische Funktion innerhalb der geschlossenen Kurve γ ist und z_0 ein Punkt innerhalb γ .

Wir werden in diesem Kapitel das Verhalten von Funktionen, die analytisch auf einem Gebiet Ω mit Ausnahme einiger Punkte sind, untersuchen. Insbesondere werden wir Funktionen der Form $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$ betrachten.

4.1 Laurent-Entwicklung

Wir beginnen mit dem folgenden Satz.

Satz 4.1. *[Laurent-Entwicklung]*

Sei f eine analytische Funktion auf dem Kreisring $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z - z_0| < b\}$, und es sei $a < r < b$. Dann lässt sich f als

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (a < |z - z_0| < b),$$

darstellen, wobei die Koeffizienten c_k durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

gegeben sind. Die Kurve $\partial B(z_0, r)$ wird dabei im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

Beweis. Laut Korollar 3.17 wissen wir, dass für $z \in \Omega$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2 = \partial B(z_0, b)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 = \partial B(z_0, a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Weiterhin folgen aus Lemma 3.31 und Korollar 3.14 die Formeln

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } |z - z_0| < b$$

und

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } |z - z_0| > a,$$

wobei $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C=\partial B(z_0, \rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$ und $a < \rho < b$.

Da die erste Formel für $|z - z_0| < b$ und die zweite für $|z - z_0| > a$ gilt, konvergieren beide Reihen im Schnittbereich, also für $a < |z - z_0| < b$. \square

Bemerkung 4.2.

1. Auf einem gegebenen Gebiet ist die Laurent-Entwicklung **eindeutig**, aber sie hängt vom Gebiet ab.
2. In der **Praxis** werden die Koeffizienten a_n einer Laurent-Entwicklung nicht durch Integration, sondern mithilfe von algebraischen Methoden oder von “bekannteren” Reihenentwicklungen bestimmt.

Beispiel 4.3.

1. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

hat in $z = \pm 1$ eine Singularität und ist analytisch in den beiden Kreisringen

$$\Omega_1 = \{0 < |z - 1| < 2\}, \quad \Omega_2 = \{|z - 1| > 2\}.$$

Jetzt setzen wir $z = 1 + \zeta$ und wir betrachten anstelle von f die Funktion

$$g(\zeta) = f(1 + \zeta) = \frac{1}{\zeta^2 + 2\zeta}$$

in den Kreisringen

$$\Omega'_1 = \{0 < |\zeta| < 2\}, \quad \Omega'_2 = \{|\zeta| > 2\}.$$

Diese Substitution hat den Vorteil, dass wir nun in der Standardsituation, d.h. eine Reihenentwicklung um den Entwicklungspunkt $\zeta_0 = 0$, sind. Eine Partialbruchzerlegung liefert weiter

$$(4.1) \quad g(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{4} \frac{1}{1 + (\frac{\zeta}{2})}.$$

Ist $\zeta \in \Omega'_1$, so können wir den zweiten Partialbruch sofort in eine geometrische Reihe entwickeln und erhalten

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi} - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\xi}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^k}{2^{k+2}}. \end{aligned}$$

Für die Funktion f ergibt sich damit:

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-1)^k}{2^{k+2}}.$$

Für $\zeta \in \Omega'_2$ schreiben wir den zweiten Partialbruch in (4.1) etwas um, worauf wir wieder in eine geometrische Reihe entwickeln können:

$$\begin{aligned} g(\zeta) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2\zeta} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\zeta}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{\zeta^k} \quad \xi \in \Omega'_2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^{k-1}}{\zeta^{k+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{k-2}}{\zeta^k}. \end{aligned}$$

Man beachte: In beiden Fällen ist der erste Partialbruch bereits in der für eine Laurentreihe um $\zeta_0 = 0$ erforderlichen Form.

- 2.** Wir wollen die Laurent-Entwicklung von $f(z) = z^{-5} \sin z$ mit Zentrum im Ursprung bestimmen.

Wir wissen, dass

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} z^{-5} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-4} \\ &= \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{120} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n-4} \quad \forall |z| > 0. \end{aligned}$$

Hier ist der Kreisring $\Omega = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a_n = 0$ für alle $n \leq -5$ und für alle n ungeraden (positiv und negativ).

- 3.** Als Nächstes betrachten wir die Laurent-Reihe von $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ mit Zentrum $z_0 = 0$.

Wir wissen, dass $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Dann gilt

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \quad \forall |z| > 0$$

und

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-2}} = \dots + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + z + z^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Hier ist also $a_n = 0$ für alle $n \geq 3$ und $a_n = \frac{1}{(2+n)!}$ für alle $n \leq 2$.

- 4.** Wir möchten alle Entwicklungen von $f(z) = \frac{-2z+3}{z^2-3z+2}$ mit Zentrum $z_0 = 0$ finden.

Die Bestimmung der Nullstellen des Nenners ergibt die Faktorisierung $z^2 - 3z + 2 = (z - 1)(z - 2)$. Die Funktion f ist also auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = 1, z = 2\}$ analytisch.

Wir werden drei Laurent-Entwicklungen finden auf den Gebieten

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\},$$

$$\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}.$$

Die **Partialbruchzerlegung** liefert

$$f(z) = \frac{-2z+3}{z^2-3z+2} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

$$|z| < 1 \implies \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$|z| > 1 \implies \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z(\frac{1}{z}-1)} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

$$|z| < 2 \implies \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$|z| > 2 \implies \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z(1-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^{n+1}}.$$

Auf Ω_1 haben wir daher

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

Auf Ω_2 haben wir

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}},$$

also $a_n = -1$ für $n \leq -1$ und $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ für $n \geq 0$.

Auf Ω_3 schließlich folgt

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = - \sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2^n) \frac{1}{z^{n+1}},$$

d.h. $a_n = 0$ für $n \geq 0$ und $a_n = -(1 + 2^{n-1})$ für $n \leq -1$.

Übung 4.4. Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen von $g(w) = \frac{-2w+5}{w^2-5w+6}$ mit Zentrum $z_0 = 1$ auf $\Omega_1 = \{w: |w-1| < 1\}$, $\Omega_2 = \{w: 1 < |w-1| < 2\}$ und $\Omega_3 = \{w: |w-1| > 2\}$.

Lösung: Auf Ω_1 ist $g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \frac{1}{2^{n+1}})(w-1)^n$, auf Ω_2 ist $g(w) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(w-1)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-1)^n}{2^{n+1}}$, und auf Ω_3 ist $g(w) = - \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + 2^n) \frac{1}{(w-1)^n}$.

4.2 Singularitäten

Definition 4.5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$ und $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion.

Wenn f in z_0 nicht definiert oder nicht analytisch ist, dann heißt z_0 eine **Singularität**.

Der Punkt z_0 ist eine **isolierte Singularität** von f , falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass f keine weitere Singularität in der Scheibe $B(z_0, \varepsilon)$ hat.

Beispiel 4.6.

- 1.** $\sin \frac{1}{z}$ hat im Ursprung eine isolierte Singularität.
- 2.** $\tan \frac{1}{z}$ hat Singularitäten im Ursprung und in den Punkten $z_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, k ungerade. Die Singularität im Ursprung ist nicht isoliert und die anderen sind isoliert.

Es gibt drei verschiedene Typen von isolierten Singularitäten, die mithilfe der Laurent-Entwicklung erkannt werden können. Wir können diese drei Kategorien auch durch qualitative Eigenschaften von f in der Umgebung der Singularität charakterisieren.

Definition 4.7. Die Summe der Terme der Laurent-Entwicklung mit negativem Index n

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$$

wird **Hauptteil der Laurent-Entwicklung** genannt.

Die drei Typen von isolierten Singularitäten heissen **hebbare Singularitäten**, **Pole**, und **wesentliche Singularitäten**.

4.2.1 Hebbare Singularitäten

Die Koeffizienten c_n der Laurent-Entwicklung um **den Punkt z_0** mit $n \leq -1$ sind Null, d.h. der Hauptteil der Laurent-Entwicklung verschwindet. In diesem Fall lässt sich die Funktion f analytisch in den Punkt z_0 hinein fortsetzen.

Beispiel 4.8. Die Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ hat in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität. Es gilt

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots, \quad z \neq 0.$$

Wir können ablesen, dass der Hauptteil Null ist, und wir können daher die Funktion im Ursprung wie folgt fortsetzen

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0. \end{cases}$$

Die Funktion \tilde{f} ist analytisch auf \mathbb{C} .

Satz 4.9. [*Hebbarkeitssatz von Riemann*]

Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ (d.h. f ist holomorph auf $\Omega \setminus \{z_0\}$). Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) z_0 ist eine hebbare Singularität von f .
- ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert in \mathbb{C} .
- iii) f ist auf einer punktierten Kreisscheibe $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$, $\rho > 0$ beschränkt.

4.2.2 Pole

Ist $z_0 \in \Omega$ ein Punkt, in dem f nicht analytisch ist und der Hauptteil der Laurent-Entwicklung mit Zentrum z_0 auf $B(z_0, \rho)$, $\rho > 0$, nur endlich viele Negativterme hat, dann heißt z_0 ein Pol. Falls der Hauptteil der Laurent-Entwicklung der Form

$$\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{-c_m}{(z - z_0)^m}$$

hat, dann heißt z_0 ein **Pol der Ordnung m** . Ist $m = 1$, so spricht man auch von einem einfachen Pol.

Es gilt folgender Satz:

Satz 4.10. *Sei f analytisch und $z_0 \in \Omega$ ein Pol von f . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- i) z_0 ist ein Pol.
- ii) Es gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.
- iii) Es gibt ein $n \geq 1$, sodass $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beispiel 4.11.

1.

$$\begin{aligned} f(z) = z^{-5} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{5!} + \dots \end{aligned}$$

hat in $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 4.

2. $f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^4}$ hat in $z = 0$ einen Pol der Ordnung 3 und in $z = 1$ einen Pol der Ordnung 4.

Bemerkung 4.12. Im Fall eines Pols z_0 der Ordnung m können wir die Funktion f in einer Umgebung $B(z_0, r)$ von z_0 darstellen als

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} g(z),$$

wobei g holomorph in $B(z_0, r)$ ist und $g(z_0) \neq 0$.

4.2.3 Wesentliche Singularitäten

Definition 4.13. z_0 ist eine wesentliche Singularität, falls der Hauptteil der Laurent-Entwicklung in einer Umgebung von z_0 aus unendlich vielen Termen besteht.

In diesem Fall existiert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ nicht, und in der Umgebung einer wesentlichen Singularität verhält sich eine Funktion f sehr unregelmäßig.

Beispiel 4.14. Ein typisches Beispiel ist $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Wir haben

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \quad \forall z \neq 0.$$

Andererseits existiert $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$ nicht:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z=x}} e^{\frac{1}{z}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \rightarrow 0^- \\ \infty & \text{falls } x \rightarrow 0^+. \end{cases}$$

Man kann diese Aussage sogar noch drastisch verschärfen: Die Funktion $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ nimmt auf jeder noch so kleinen Scheibe mit Zentrum $z_0 = 0$ jeden Wert $w \in \mathbb{C}^*$ unendlich oft an. Sei $c = c_0 e^{i\alpha} \neq 0$ und sei $z = r e^{i\theta} \in B(0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$. Wir wollen die folgenden Gleichungen lösen:

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{\cos \sigma - i \sin \sigma}{r}} = c_0 e^{i\alpha}.$$

Es ergibt sich

$$\frac{\cos \sigma}{r} = \ln c_0 \quad \text{und} \quad \frac{-\sin \sigma}{r} = \alpha.$$

Wir erhalten

$$1 = \cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma = r^2 \ln^2 c_0 + r^2 \alpha^2.$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} r^2 = \frac{1}{\ln^2 c_0 + \alpha^2} \\ \tan \sigma = -\frac{\alpha}{\ln c_0}. \end{cases}$$

Durch Addieren von Vielfachen von 2π zu α kann man daher r beliebig klein machen, während c unverändert bleibt.

4.3 Nullstellen einer analytischen Funktion

Definition 4.15. Eine Nullstelle einer analytischen Funktion f ist ein Punkt z_0 mit $f(z_0) = 0$. z_0 ist eine Nullstelle der Vielfachheit n , falls $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, aber $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ gilt. Wenn $n = 1$ ist, dann spricht man auch von z_0 als einfache Nullstelle, bzw. allgemeine n -fache Nullstelle.

Beispiel 4.16.

- $1 + z^2$ hat einfache Nullstellen bei $z_0 = \pm i$.
- $(1 - z^4)^2$ hat Nullstellen der Vielfachheit 2 bei $\pm 1, \pm i$.
- Die Funktion $f(z) = 1 - \cos z$ hat doppelte Nullstellen bei $2\pi k, z \in \mathbb{Z}$.

Falls f eine n -fache Nullstelle in z_0 hat, gilt für die Taylor-Entwicklung von f :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_n (z - z_0)^{k-n} \\ &= (z - z_0)^n g(z) \quad \text{mit} \quad g(z_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Fazit: Eine analytische Funktion kann nur isolierte Nullstellen besitzen ($(z - z_0)^n = 0$ gilt nur für $z = z_0$ und ferner ist $g(z) \neq 0$ in einer Umgebung von z_0).

Satz 4.17. [*Pole und Nullstellen*]

Sei f analytisch in $z = z_0$ und sei $z = z_0$ eine n -fache Nullstelle. Weiterhin sei h eine analytische Funktion in $z = z_0$ und sei $h(z_0) \neq 0$. Dann haben die Funktionen

$$\frac{1}{f(z)} \quad \text{und} \quad \frac{h(z)}{f(z)} .$$

bei $z = z_0$ einen Pol der Ordnung n .

Bemerkung 4.18. Man sagt, dass f analytisch bei ∞ ist (oder eine Singularität oder eine Nullstelle bei ∞ hat), wenn dieselbe gilt im Ursprung ($z = 0$) für die Funktion $g(z) = f(\frac{1}{z})$.

Definition 4.19. Eine analytische Funktion, deren Singularitäten auf \mathbb{C} nur Pole sind, wird **meromorph** genannt.

5 Der Residuensatz und seine Anwendungen

Wir haben bereits untersucht, wie man Integrale einer analytischen Funktion oder einer Funktion in der Form $\frac{f(z)}{z-z_0}$ berechnen kann.

In diesem Kapitel wird es darum gehen, Integrale einer Funktion mit isolierten Singularitäten zu berechnen. Für jede Singularität muss man das sogenannte Residuum berechnen, und das Integral entlang einer geschlossenen Kurve wird dann durch diese Residuen ermittelt.

5.1 Der Residuensatz

Ein einfacher Spezialfall

Sei f analytisch auf dem Gebiet $\Omega \setminus \{z_0\}$ und sei $\Gamma \subseteq \Omega \setminus \{z_0\}$ eine Kurve, die einmal um den Punkt z_0 herum im Gegenuhrzeigersinn läuft.

Wie wir im vorherigen Kapitel gesehen haben, kann die Funktion f auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

entwickelt werden, wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

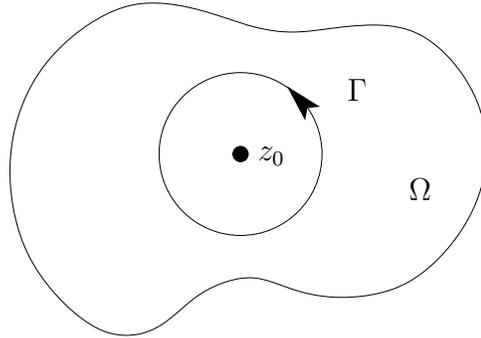


Fig. 5.1

Insbesondere im Fall $n = -1$ ist $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz$.

Umgekehrt bedeutet dies: $\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$, somit kann der Wert des Integrals aus der Laurentreihe abgelesen werden.

Beispiel 5.1. Sei $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}$. Wir berechnen $\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz$.

Nach der Laurent-Entwicklung für $0 < |z| < 1$ haben wir

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = \frac{1}{z^3(1 - z)} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3}.$$

In diesem Fall haben wir $a_{-1} = 1$ und $\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz = 2\pi i$.

Bemerkung 5.2. Zur Bestimmung des Koeffizienten a_{-1} ist eine Laurent-Entwicklung der Funktion auf einer kleinen, “punktierten” Scheibe um z_0 erforderlich.

Definition 5.3. Sei f eine analytische Funktion auf $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$. Der Koeffizient a_{-1} der Laurent-Entwicklung mit Zentrum z_0 , die f auf $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$ darstellt, heißt das Residuum $\text{res}(f|z_0)$ von f an der Stelle z_0 . Wir können deshalb

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \text{res}(f|z_0)$$

schreiben. (Γ ist eine geschlossene Kurve im Gegenuhrzeigersinn, die in ihrem Inneren den Punkt z_0 enthält und in $B(z_0, \rho)$ enthalten ist).

Satz 5.4. [Residuensatz]

Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch bis auf isolierte Singularitäten und sei $\Omega_0 \subseteq \Omega$ ein Gebiet, dessen Rand $\partial\Omega_0$ in Ω enthalten ist und die Singularitäten nicht trifft. Dann gilt:

$$\int_{\partial\Omega_0} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \Omega_0} \text{res}(f|z_i),$$

wobei der Rand $\partial\Omega_0$ im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

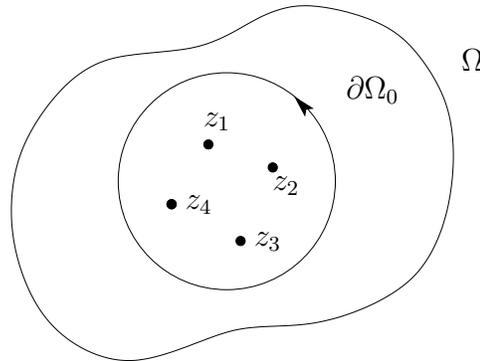


Fig. 5.2

Frage: Wie kann man die Residuen berechnen (ohne die Laurent-Entwicklung zu berechnen)?

Formeln für Residuen

Einfache Pole

i) Sei z_0 ein einfacher Pol der Funktion f . Dann ist

$$\operatorname{res}(f|z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

ii) Wenn es gilt $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ mit $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$ und $h(z_0) \neq 0$, dann ist z_0 ein einfacher Pol für f und

$$\operatorname{res}(f|z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Beweis. i) Da z_0 ein einfacher Pol ist, lässt f sich als

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

darstellen, wobei $a_{-1} = \operatorname{res}(f|z_0) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(a_{-1} + (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right) \\ &= a_{-1}. \end{aligned}$$

ii) Wir haben

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \neq 0.$$

Daraus folgt, dass z_0 ein einfacher Pol für f ist und nach i) $\operatorname{res}(f|z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$. \square

Beispiel 5.5.

$$\boxed{1.} \quad f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{1 + z^2} \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Wir verwenden die Eigenschaft ii) mit $h(z) = e^{i\alpha z}$ und $g(z) = 1 + z^2$. In diesem Fall ist $g(z) = 0 \iff z = \pm i$ und $g'(\pm i) = 2z|_{z=\pm i} \neq 0$.

Ferner haben wir $h(\pm i) \neq 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f|i) &= \left(\frac{e^{i\alpha z}}{2z} \right)_{z=i} = \frac{e^{-\alpha}}{2i} \\ \operatorname{res}(f|-i) &= \frac{-e^{\alpha}}{2i}. \end{aligned}$$

$$\boxed{2.} \quad f(z) = \frac{9z+i}{z^3+z} = \frac{9z+i}{z(z^2+1)} = \frac{9z+i}{z(z-i)(z+i)}.$$

Diese Funktion hat drei einfache Pole: $z = 0$, $z = i$, $z = -i$.

Wir benutzen ii) mit $h(z) = 9z + i$ und $g(z) = z^3 + z$. Es gilt $g'(z) = 3z^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f|0) &= \left. \left(\frac{9z+i}{3z^2+1} \right) \right|_{z=0} = \frac{i}{1} = i \\ \operatorname{res}(f|i) &= \left. \left(\frac{9z+i}{3z^2+1} \right) \right|_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i \\ \operatorname{res}(f|-i) &= \left. \left(\frac{9z+i}{3z^2+1} \right) \right|_{z=-i} = \frac{-8i}{6} = -\frac{4i}{3}. \end{aligned}$$

Pole der Ordnung n in z_0

Sei z_0 ein Pol der Ordnung n der Funktion f . Dann ist

$$\operatorname{res}(f|z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)].$$

Beweis. Die Laurent-Entwicklung von f mit Zentrum z_0 auf $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$ ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + \\ &\quad + a_1(z-z_0) + \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} (z-z_0)^n f(z) &= a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} \\ &\quad + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Wir leiten nach z $(n-1)$ -mal ab und erhalten

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-z_0)^n f(z) = (n-1)! a_{-1} + n(n-1) \dots 2(z-z_0)a_0 + \dots$$

Daraus folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-z_0)^n f(z) = (n-1)! a_{-1}. \quad \square$$

Kurz gesagt: Das Residuum des Pols n -ter Ordnung z_0 von f ist gerade der $(n-1)$ te Taylorkoeffizient der analytischen Funktion $(z-z_0)^n f(z)$.

Beispiel 5.6.

1. Wir berechnen $\text{res}(f|i)$ von $f(z) = \frac{z^4}{(z^2 - iz + 2)(z - i)^2}$.

Der Punkt $z_0 = i$ ist ein Pol der Ordnung 2. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{res}(f|i) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{z^4}{(z^2 - iz + 2)(z-i)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{4z^3(z^2 - iz + 2) - z^4(2z - i)}{(z^2 - iz + 2)^2} = \\ &= \dots = -\frac{9i}{4}. \end{aligned}$$

2. Wir berechnen das Integral $\int_{\gamma} \frac{z^4}{(z^2 - iz + 2)(z - i)^2} dz$, wobei

- 1) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$,
- 2) $\gamma = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = \frac{3}{2}\right\}$,
- 3) γ wie im Bild:

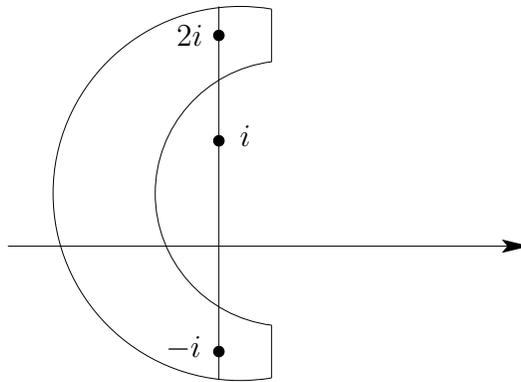


Fig. 5.3

Lösung:

$z_0 = 2i$ und $z_0 = -i$ sind einfache Pole von f .

Wir wenden den **Residuensatz** 4.1 an

$$1) \quad \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{z^4}{(z^2 - iz + 2)(z - i)^2} dz = 2\pi i (\text{res}(f|2i) + \text{res}(f|i) + \text{res}(f|-i)).$$

$$2) \quad \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{z^4}{(z^2 - iz + 2)(z - i)^2} dz = 2\pi i (\text{res}(f|2i) + \text{res}(f|i)).$$

$$3) \implies \int_{\gamma} \frac{z^4}{(z^2 - iz + 2)(z - i)^2} dz = 2\pi i (\operatorname{res}(f|2i) + \operatorname{res}(f|-i)).$$

Wir berechnen die Residuen und wir erhalten

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f|2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{z^4}{(z - 2i)(z + i)(z - i)^2} \\ &= \frac{(2i)^4}{(3i)(i)^2} = \frac{16}{3} i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f|-i) &= \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{z^4}{(z + i)(z - 2i)(z - i)^2} \\ &= \frac{(-i)^4}{(-3i)(-2i)^2} = \frac{i}{12}. \end{aligned}$$

Übung 5.7. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} + ze^{\frac{\pi}{z}} \right) dz,$$

wobei $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 9x^2 + y^2 = 9\}$.

Lösung: $\pi \left(\pi^2 - \frac{1}{4} \right) i$.

5.2 Anwendungen auf die Berechnung von reellen Integralen

Mithilfe des Residuensatzes können wir insbesondere spezielle reelle Integrale explizit berechnen. Wir werden vier Typen von Integralen betrachten.

- 1) Integrale von rationalen Funktionen von $\cos \sigma$ und $\sin \sigma$.
- 2) Integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, wobei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ein Quotient zweier Polynome ist, $\deg p \leq \deg q - 2$ und $q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
- 3) Fourier-Integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x dx$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x dx$.
- 4) Integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, wobei f einen einfachen Pol in $x = x_0 \in \mathbb{R}$ hat.

5.2.1 Integrale von rationalen Funktionen von $\cos \sigma$ und $\sin \sigma$

Wir möchten Integrale der Form $\int_0^{2\pi} F(\cos \sigma, \sin \sigma) d\sigma$ berechnen, wobei F eine reelle rationale Funktion von $\cos \sigma$ und $\sin \sigma$ ist, welche für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist. Der Trick besteht darin, das gegebene Integral in ein komplexes Linienintegral über den Einheitskreis $\partial B(0, 1)$ umzuwandeln.

Wir verwenden die übliche Darstellung des Einheitskreises: $\sigma \mapsto z(\sigma) = e^{i\sigma}$, $\sigma \in [0, 2\pi]$. Wir haben auf $\partial B(0, 1)$:

$$\begin{cases} \cos \sigma = \frac{e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ \sin \sigma = \frac{e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right). \end{cases}$$

Wir können nun folgendermassen argumentieren:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\cos \sigma, \sin \sigma) d\sigma &= \int_0^{2\pi} F\left(\frac{e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}}{2}, \frac{e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}}{2i}\right) \frac{1}{ie^{i\sigma}} \cdot ie^{i\sigma} d\sigma \\ &\stackrel{z=e^{i\sigma}}{\cong} \int_0^{2\pi} F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{z'(\sigma)} \cdot z'(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{i} \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{z} F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) dz. \end{aligned}$$

Die Funktion $\tilde{F}(z) = \frac{1}{z} F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$ ist eine rationale Funktion von z , die auf $\partial B(0, 1)$ keine Pole besitzt (sonst wäre $f(t) = F(\cos t, \sin t)$ für gewisse t undefiniert). Gemäßdem Residuensatz gilt

$$\int_{\partial B(0,1)} \tilde{F}(z) dz = 2\pi i \sum_{z_j \in B(0,1)} \text{res}(\tilde{F}|z_j).$$

Beispiel 5.8. Wir berechnen $\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{\sqrt{2} - \cos \sigma}$.

Lösung:

Wir benutzen $\cos \sigma = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ und $d\sigma = \frac{dz}{iz}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{\sqrt{2} - \cos \sigma} &= \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{\partial B(0,1)} \frac{2dz}{2\sqrt{2}z - z^2 - 1} \\ &= \int_{\partial B(0,1)} \frac{2idz}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} \\ &= 2i \int_{\partial B(0,1)} \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}. \end{aligned}$$

Die Punkten $z = \sqrt{2} \pm 1$ sind jeweils einfache Pole, aber es gilt $|\sqrt{2} + 1| > 1$. Deshalb ist $\sqrt{2} - 1$ der einzige Pol, der in $B(0, 1)$ enthalten ist:

$$\text{res}\left(\frac{2i}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} \Big| \sqrt{2} - 1\right) = \lim_{z \rightarrow \sqrt{2}-1} \frac{2i}{z - \sqrt{2} - 1} = -i$$

Daraus folgt, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{\sqrt{2} - \cos \sigma} d\sigma = 2\pi i(-i) = 2\pi$$

□

5.2.2 Einige uneigentliche Integrale, I

Zur Erinnerung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x)dx.$$

Falls beide Grenzwerte existieren, dann folgt außerdem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx.$$

Es ist jedoch möglich, dass $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx$ existiert, während das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hingegen nicht existiert.

Beispiel 5.9.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x dx$$

und beide Limes existieren nicht, aber:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx = 0.$$

Fazit: Man kann die folgende Methode nur anwenden, wenn man schon *vorher* weiß, dass das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existiert.

Beispiel 5.10.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \text{ da } \frac{1}{(1+x^2)^2} \text{ eine gerade Funktion ist.}$$

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \text{ existiert genau dann, wenn } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \text{ existiert.}$$

Um das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ zu berechnen, betrachten wir das entsprechende komplexe Linienintegral $\int_{C_R} f(z)dz$, wobei C_R die Verkettung der Strecke $[-R, R]$ mit dem Halbkreis $S_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| = R, \text{Im } z > 0\}$ ist.

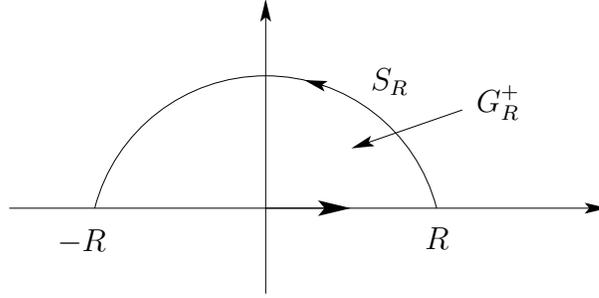


Fig. 5.4

Damit die Methode funktioniert, müssen die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sein:

- 1) $f(z)$ hat endlich viele isolierte komplexe Singularitäten und keine reelle Singularitäten.
- 2) R muss groß genug sein, damit alle Singularitäten mit positivem imaginären Teil innerhalb C_R enthalten sind.

Beispiel 5.11.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \deg(q) - \deg(p) \geq 2, \quad q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aus diesen Voraussetzungen und laut dem Residuensatz erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R f(x)dx + \int_{S_R} f(z)dz &= \int_{C_R} f(z)dz \\ &= (2\pi i) \sum_{z_i \in G_R^+} \text{res}(f|z_i). \end{aligned}$$

Falls $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} f(z)dz = 0$, ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z_i \in G_R^+} \text{res}(f|z_i).$$

Lemma 5.12. Falls $f = \frac{p}{q}$ eine rationale Funktion ist und $q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ und $\deg(p) \leq \deg(q) - 2$, dann gilt:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} f(x)dx = 0.$$

Beweis. Auf S_R (also für $|z| = R$) haben wir

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| = \left| \frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0} \right| = \left| \frac{z^n}{z^m} \right| \cdot \left| \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^m}} \right| \\ &\leq \frac{c}{R^{m-n}} \leq \frac{c}{R^2} \quad (c > 0). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\max_{z \in S_R} |f(z)| \leq \frac{c}{R^2}$, und schließlich

$$\begin{aligned} \left| \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} f(z) dz \right| &\leq |S_R| \max_{z \in S_R} |f(z)| \\ &\leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi R \cdot \frac{c}{R^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi c}{R} = 0. \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.13. Wir berechnen $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Hier ist $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$, $q(x) = (1+x^2)^2$, $p(x) = 1$ und damit $\deg q = 4 > \deg p + 2 = 2$. Wir haben

$$q(z) = 0 \iff z = \pm i.$$

Der Integrand $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ hat somit zwei Pole der Ordnung zwei.

Der Pol $z = +i$ ist der einzige Pol mit positivem Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \operatorname{ref}(f|i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}} ((z-i)^2 f(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} -\frac{1}{2(z+i)^{-3}} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}. \\ \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

5.2.3 Fourier-Integrale

Wir betrachten nun Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx.$$

Diese Integrale sind von zentraler Bedeutung für die Fourier-Transformation. Dazu betrachten wir das folgende Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

wobei f die Bedingungen in 5.2.2 erfüllt.

Man kann dann beweisen, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{res}(f(z) e^{i\alpha z} | z_i), \quad \text{falls } \alpha \geq 0$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i < 0} \operatorname{res}(f(z) e^{i\alpha z} | z_i), \quad \text{falls } \alpha \leq 0$$

Daraus wiederum folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx &= -2\pi \operatorname{Im} \left(\sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{res}(f(z) e^{i\alpha z} | z_i) \right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx &= 2\pi \operatorname{Re} \left(\sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{res}(f(z) e^{i\alpha z} | z_i) \right) \end{aligned}$$

falls $\alpha \geq 0$ und

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx &= 2\pi \operatorname{Im} \left(\sum_{\operatorname{Im} z_i < 0} \operatorname{res}(f(z) e^{i\alpha z} | z_i) \right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx &= -2\pi \operatorname{Re} \left(\sum_{\operatorname{Im} z_i < 0} \operatorname{res}(f(z) e^{i\alpha z} | z_i) \right) \end{aligned}$$

falls $\alpha \leq 0$.

Beispiel 5.14.

Wir wollen $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} dx$ mit $\alpha \geq 0$ berechnen.

Die Funktion $f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}$ hat nur einen einfachen Pol mit positivem Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx &= 2\pi i \operatorname{res} \left(\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2} \Big| i \right) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{i\alpha z}}{(1+z^2)} (z-i) \\ &= 2\pi i \frac{e^{i^2\alpha}}{2i} = \pi e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \pi e^{-\alpha} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} dx = 0.$$

5.2.4 Einige uneigentliche Integrale, II

Als Letztes betrachten wir das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, wobei f einfache Pole auf der reellen Achse hat.

Erinnerung:

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Punkt, wobei $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ gilt und sei $[a, b]$ ein Intervall, das x_0 enthält. Dann ist

$$(5.1) \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^{x_0-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{x_0+\beta}^b f(x)dx$$

und das Integral existiert genau dann, wenn beide Integrale existieren. Zudem wird auch der Hauptwert des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ betrachtet, d.h.

$$pv \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx \right).$$

Die Abkürzung pv steht dabei für *principal value*.

Falls das Integral (5.1) existiert, so existiert auch der Hauptwert und beide Werte sind gleich. Es kann jedoch vorkommen, dass zwar der Hauptwert existiert, aber das Integral (5.1) hingegen nicht (Übung!).

Um diese Integrale zu berechnen, werden wir den folgenden Satz verwenden:

Satz 5.15. *Sei f eine analytische Funktion, die einen einfachen Pol in $z = z_0 \in \mathbb{R}$ hat. Sei $\gamma_\varepsilon = \{z : |z - z_0| = \varepsilon, \text{Im } z \geq 0\}$. Wir laufen γ_ε in mathematisch positiver Richtung durch. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \pi i \text{res}(f|z_0).$$

Beweis. Da $z = z_0$ ein einfacher Pol ist, kann f als $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$ dargestellt werden, wobei g analytisch in $\overline{B}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ ist, und $a_{-1} = \text{res}(f|z_0)$. Mit der Parameterdarstellung $\sigma \mapsto \varepsilon e^{i\sigma} + z_0, \sigma \in [0, \pi]$ folgt nun

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{z-z_0} dz + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz \\ &= \int_0^\pi \frac{a_{-1}}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} d\sigma + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz \\ &= ia_{-1}\pi + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz \\ &= \text{res}(f|z_0)\pi i + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz &= \operatorname{res}(f|z_0) \pi i + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} g(z) dz \\ &= \operatorname{res}(f|z_0) \pi i,\end{aligned}$$

da

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} g(z) dz \right| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{z \in \Gamma_\varepsilon} |g(z)| \pi \varepsilon = 0.$$

Man beachte, dass die analytische Funktion g insbesondere beschränkt ist. \square

Wir möchten jetzt das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ berechnen, wobei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $\deg p \leq \deg q - 2$, $q(x_0) = 0$, $q'(x_0) \neq 0$, $p(x_0) \neq 0$.

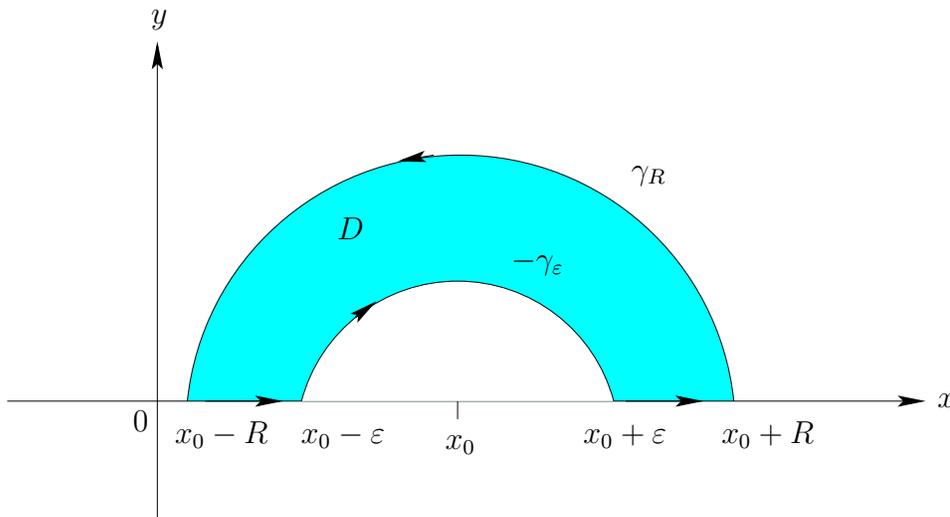


Fig. 5.5

Sei D das Gebiet, dessen Rand die Verkettung der Strecke $[x_0 - R, x_0 - \varepsilon]$, des Halbkreises $-\gamma_\varepsilon$, der Strecke $[x_0 + \varepsilon, x_0 + R]$ und des Halbkreises γ_R ist, wobei R gross genug und $\varepsilon > 0$ klein genug sein sollen, sodass D alle Pole mit $\operatorname{Im} z > 0$ enthält. Laut dem Residuensatz haben wir dann

$$\int_{x_0-R}^{x_0-\varepsilon} f(z) dz + \int_{-\gamma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{x_0+\varepsilon}^{x_0+R} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{res}(f|z_i).$$

Wir berechnen die Grenzwerte für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow +\infty$, und erhalten mithilfe des Satzes 5.15 und des Lemmas 5.12, dass

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[\int_{x_0-R}^{x_0-\varepsilon} f(z) dz + \int_{x_0+\varepsilon}^{x_0+R} f(z) dz \right] &+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{res}(f|z_i) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_\varepsilon} f(z) dz,\end{aligned}$$

d.h. (man beachte die Orientierung bei $-\gamma_\varepsilon$)

$$pv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{res}(f|z_i) + \pi i \operatorname{res}(f|x_0).$$

Es ist möglich, die gleiche Methode anzuwenden, wenn f mehrere einfache Pole auf der reellen Achse besitzt. Dies ergibt die Formel

$$pv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{res}(f|z_i) + \pi i \sum_{x_i \in \mathbb{R}} \operatorname{res}(f|x_i).$$

Beispiel 5.16. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - iz}$.

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2 - iz}$ hat einen einfachen Pol auf der reellen Achse im Ursprung und einen einfachen Pol, mit positivem Imaginärteil in $z = i$. Es ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \operatorname{res}\left(\frac{1}{z^2 - iz}, 0\right) &= \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{z^2 - iz} = \frac{1}{-i} = i \\ \operatorname{res}\left(\frac{1}{z^2 - iz}, i\right) &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot \frac{1}{z^2 - iz} = \frac{1}{i} = -i. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{x^2 - iz} &= 2\pi i \operatorname{res}(f|i) + \pi i \operatorname{res}(f|0) \\ &= 2\pi i(-i) + \pi i(i) = 2\pi - \pi = \pi. \square \end{aligned}$$

Übung 5.17. Wir berechnen $pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2\pi ix}}{x^2} dx$. Diese Funktion hat offenbar in $x = 0$ einen einfachen Pol.

Wir untersuchen dazu das folgende Gebiet G :

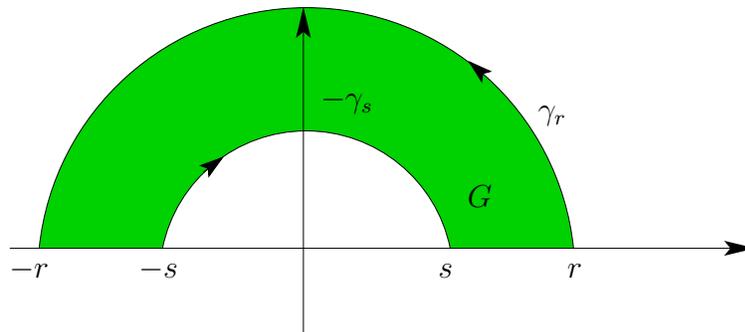


Fig. 5.6

Auf G ist die Funktion $f(z) = \frac{1 - e^{2\pi iz}}{z^2}$ analytisch, deshalb ist $\int_{\partial G} f(z) dz = 0$ und damit

$$0 = \int_{\partial G} f(z) dz = \int_{-r}^{-s} \frac{1 - e^{2\pi ix}}{x^2} dx - \int_{\gamma_s} f(z) dz + \int_s^r \frac{1 - e^{2\pi ix}}{x^2} dx + \int_{\gamma_r} f(z) dz.$$

Weiterhin ist

$$|f(z)| \leq \frac{2}{|z|^2}$$

und somit

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq L(\gamma_r) \max_{z \in \gamma_r} |f(z)| \leq \pi r \max_{z \in \gamma_r} \frac{2}{|z|^2} \leq \pi r \frac{2}{r^2}$$

Daraus folgt

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{r^2} = 0$$

und schließlich

$$\begin{aligned} pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2\pi ix}}{x^2} dx &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\gamma_s} f(z) dz \\ &= \pi i \operatorname{res} \left(\frac{1 - e^{2\pi iz}}{z^2} \middle| 0 \right) \\ &= \pi i \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1 - e^{2\pi iz}}{z^2} \\ &= \pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2\pi iz} - 1}{2\pi iz} (-2\pi i) \\ &= 2\pi^2. \end{aligned}$$

□

Übung 5.18. Wir berechnen $pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$. Diese Funktion hat ebenfalls in $x = 0$ einen einfachen Pol.

Wir betrachten das Gebiet G von Fig. 5.6 erneut. Auf G ist die Funktion $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ analytisch, deshalb folgt $\int_{\partial G} f(z) dz = 0$ und

$$0 = \int_{\partial G} f(z) dz = \int_{-r}^{-s} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{\gamma_s} f(z) dz + \int_s^r \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_r} f(z) dz.$$

Damit gilt

$$(5.2) \quad pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\gamma_s} f(z) dz - \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz$$

Aus Satz 5.15 folgt, dass

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\gamma_s} f(z) dz = i\pi \operatorname{res}(f, 0) = i\pi.$$

Wir zeigen nun noch

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Die Halbkreislinie γ_r hat die Parameterdarstellung $t \mapsto re^{it} = r(\cos t + i \sin t)$, $t \in [0, \pi]$.

Damit ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{ir(\cos t + i \sin t)}}{re^{it}} ire^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{ir(\cos t + i \sin t)}}{re^{it}} ire^{it} \right| dt \\ (5.3) \quad &= \int_0^\pi e^{-r \sin(t)} dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin(t)} dt \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2rt/\pi} dt = \frac{\pi}{2r} (1 - e^{-r}). \end{aligned}$$

Wir haben die Symmetrie der Funktion $\sin t$ bezüglich der Gerade $t = \pi/2$ verwendet, und in der letzten Zeile von (5.3) wird die einfache Abschätzung $\sin t \geq 2t/\pi$ (was seinerseits aus der Konkavität des Sinus auf $[0, \pi/2]$ folgt) vorgenommen.

aus $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2r} (1 - e^{-r}) = 0$ folgt schließlich $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$ wie behauptet und damit auch $pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi$. \square

Aus obigem Ergebnis erhalten wir das sogenannte Dirichlet Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \operatorname{Im} \left(pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} \right) = \pi.}$$

6 Fourier-Reihen

Dieses Kapitel behandelt Fourier-Reihen. Dabei werden periodische Funktionen durch trigonometrische Funktionen (Cosinus und Sinus) dargestellt.

Fourier-Reihen spielen eine wichtige Rolle in zahlreichen Anwendungen (z.B. Signalanalyse, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen). Fourier-Reihen sind wesentlich allgemein verwendbar als Taylor- und Potenzreihen, da sie nicht-analytische und sogar nicht-stetige Funktionen darstellen können.

6.1 Definitionen

Definition 6.1. Falls es ein reelles $p > 0$ gibt, sodass

$$f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

heißt f periodisch und p heißt **Periode** von f . Man sagt auch, dass f eine p -periodische Funktion ist. Die kleinste Periode wird auch also **Fundamentalperiode** genannt.

Beispiel 6.2.

1. $e^{i\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, ist periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{|\alpha|}$.
2. $\cos x$, $\sin x$ sind periodisch mit Fundamentalperiode 2π . Alle ganzzahligen Vielfache von 2π sind ebenfalls Perioden.
3. Die Summe periodischer Funktionen ist periodisch und das Produkt periodischer Funktionen ist periodisch mit gleicher Periode (nicht unbedingt gleicher Fundamentalperiode: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$, $\sin \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ haben Fundamentalperiode π).
4. Sei f eine Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert ist. Dann kann man f stets periodisch fortsetzen mit Periode $b - a$.

Wir betrachten in diesem Kapitel Funktionen einer reellen Variablen mit komplexen oder reellen Werten, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $X \subseteq \mathbb{R}$.

Definition 6.3. Ein trigonometrisches Polynom vom Grad N ist eine Linearkombination

$$\sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt} \quad \text{oder} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt),$$

wobei c_N oder c_{-N} bzw. a_N oder b_N ungleich null sind. Die Reihen

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{oder} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

heißen **trigonometrische** oder **Fourier Reihen**.

In Definition 6.3 ist die Periode einer trigonometrischen Reihe 2π .

Fragen

- (1) Welche 2π -periodische Funktionen können durch trigonometrische Reihen dargestellt werden?
- (2) Wie kann man die zugehörigen Koeffizienten a_k , b_k und c_k bestimmen?
- (3) Gibt es einen Unterschied zwischen der “reellen” trigonometrischen Reihe (mit $\cos(kt)$ und $\sin(kt)$) und der “komplexen” trigonometrischen Reihe (mit e^{ikt})?
- (4) Weshalb sind trigonometrische Reihen nützlich?

Antworten

(3): Die komplexe Schreibweise der Fourier-Reihen ist vor allem für theoretische Betrachtungen geeignet. Die reelle Schreibweise hingegen wird für konkrete Beispiele bevorzugt. Außerdem können bei reellen Reihen spezielle Symmetrieeigenschaften direkt verwendet werden: Wir werden zum Beispiel sehen, dass wir eine Fourier-Reihen-Entwicklung nur mit $\sin(kx)$ (bzw. $\cos(kx)$) erhalten, falls die darzustellende Funktion ungerade (bzw. gerade) ist.

(4): Um ein physikalisches System zu beschreiben, muss man zuerst ein mathematisches Modell des Systems bestimmen und anschließend die Lösung der entsprechenden partiellen Differentialgleichungen finden. Die Lösung partieller Differentialgleichungen kann mithilfe ihrer Fourier-Reihen-Entwicklung dargestellt werden. Dies ist neben Potenzreihen eine der häufigsten Methoden, explizite Lösungen anzugeben.

Beide Varianten enthalten aber den gleichen Informationsgehalt. Um die c_k ($k \in \mathbb{Z}$) und die a_k, b_k ($k \in \mathbb{N}$) ineinander umzurechnen, betrachten wir ein festes $k > 0$. Aus $e^{i\tau} = \cos \tau + i \sin \tau$ folgt

$$\begin{aligned} c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} &= c_{-k} [\cos(kt) + i \sin(kt)] + c_{-k} [\cos(kt) - i \sin(kt)] \\ &= (c_k + c_{-k}) \cos(kt) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kt) \\ &\stackrel{!}{=} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \end{aligned}$$

und daher

$$(6.1) \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k > 0;$$

umgekehrt ergibt sich daraus

$$(6.2) \quad c_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k), \quad k > 0.$$

Im Fall $k = 0$ folgt unmittelbar $b_0 = 0$ und $a_0 = 2c_0$.

Auch die Frage (2) erlaubt eine einfache direkte Antwort. Diese ist auf dem folgenden Lemma aufgebaut. Vor der Formulierung des Lemmas formulieren, benötigen wir noch etwas Notation.

Definition 6.4. Seien f, g 2π -periodische Funktionen. Das **Skalarprodukt** von f und g ist durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

definiert. Falls $\langle f, g \rangle = 0$ und $f \not\equiv 0$ und $g \not\equiv 0$, heißen f und g zueinander **orthogonal**.

Die **Norm** einer 2π -periodischen Funktion ist durch

$$\|f\|^2 := \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

definiert.

Bemerkung 6.5.

i) Das Skalarprodukt von zwei Funktionen f, g besitzt fast genau die gleichen Eigenschaften wie das Skalarprodukt von zwei Vektoren in \mathbb{R}^n :

$$\left. \begin{aligned} \bullet \langle \lambda f, g \rangle &= \lambda \langle f, g \rangle \\ \bullet \langle f, \lambda g \rangle &= \overline{\lambda} \langle f, g \rangle \end{aligned} \right\} \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\bullet \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

$$\bullet \langle af + bg, h \rangle = a \langle f, h \rangle + b \langle g, h \rangle$$

$$\bullet \langle f, f \rangle \geq 0 \text{ und } = 0 \iff f = 0.$$

ii) Die Norm einer Funktion besitzt exakt die gleichen Eigenschaften wie der Absolutbetrag eines Vektors in \mathbb{R}^n .

Lemma 6.6. (Orthogonalitätsrelationen)

a) Für die Funktionen $e_k: t \mapsto e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$, gilt

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = \delta_{k\ell} := \begin{cases} 1 & k = \ell \\ 0 & k \neq \ell. \end{cases}$$

b) Für die reellen trigonometrischen Funktionen folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cos(\ell t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \sin(\ell t) dt = \pi \delta_{k\ell} \quad ((k, \ell) \neq (0, 0)) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \sin(\ell t) dt &= 0 \quad \forall k, \ell. \end{aligned}$$

Beweis von Lemma 6.6:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \langle e_k, e_\ell \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{\overline{i\ell t}} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)t} dt \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(k-\ell)t}}{(k-\ell)i} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & k \neq \ell \\ \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1 & k = \ell. \end{cases}
 \end{aligned}$$

b) Um diese Relationen zu beweisen, kann man entweder die Formeln $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ und $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ oder die Additionstheoreme

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

verwenden. Die restlichen Rechnungen sind analog zu a). □

Aus diesem Lemma folgt nun unmittelbar die Antwort zu Frage (2).

Satz 6.7. Sei f eine 2π -periodische Funktion, die durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden kann, d.h. sei

$$(6.3) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

oder

$$(6.4) \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

Dann gilt:

$$(6.5) \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k \geq 0$$

$$(6.6) \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k \geq 1$$

$$(6.7) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Integrale können auf einem beliebigen Intervall der Länge 2π berechnet werden.

Beweis. Wir werden die Formel für c_k überprüfen. Sei $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e_k$. Wir multiplizieren auf beiden Seiten skalar mit e_n , $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Es ergibt sich

$$\langle f, e_n \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \langle e_k, e_n \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta_{k,n} = c_n.$$

Daraus folgt nach Definition des Skalarprodukts

$$c_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt. \quad \square$$

Definition 6.8. Sei f eine 2π -periodische Funktion. Die Reihen

$$(6.8) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad \text{mit } c_k \text{ durch (6.7) gegeben}$$

$$(6.9) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

mit a_k, b_k durch (6.5) und (6.6) gegeben, heißen die **komplexe** beziehungsweise die **reelle** Fourier-Reihe von f .

Die Reihe (6.4) ist der **einzige** mögliche Kandidat für eine Darstellung der Form

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}.$$

Um auszudrücken, dass die c_k mithilfe von (6.7) aus f erhalten wurden, schreibt man gelegentlich

$$f(t) \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$$

oder auch $c_k(f)$. Selbstverständlich hoffen wir, dass \rightsquigarrow unter möglichst schwachen Voraussetzungen durch $=$ ersetzt werden kann.

Bevor wir fortfahren, definieren wir Folgendes:

Definition 6.9. Die Funktion $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \mapsto \hat{f}(k) := \langle f, e_k \rangle$ wird als (diskrete) Fourier-Transformierte von f bezeichnet. Die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$, welche einer periodischen Funktion ihre Fourier-Transformierte zuordnet, wird (diskrete) Fourier-Transformation genannt.

Im nächsten Kapitel werden wir die *kontinuierliche* Fourier-Transformation (das Gegenstück für nicht-periodische Funktionen) behandeln.

Eigenschaften

- 1) Die Fourier-Transformation ist linear, d.h. $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$ und $\widehat{\lambda f} = \lambda \widehat{f}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.
- 2) Falls $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h. f ist reellwertig) ist $c_{-k} = \overline{c_k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \geq 0$.
- 3) Falls f eine gerade Funktion ist, gilt $b_k = 0$ für alle $k > 0$ und

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(kx) dx, \quad k \geq 0.$$

Falls f eine ungerade Funktion ist, gilt $a_k = 0$ für alle $k \geq 0$ und

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx) dx, \quad k > 0.$$

Beweis. Das Produkt von zwei geraden Funktionen oder zwei ungeraden Funktionen ist **gerade**. Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist **ungerade**:

$$g(x) \text{ gerade} \implies \int_{-\pi}^\pi g(x) dx = 2 \int_0^\pi g(x) dx$$

$$g(x) \text{ ungerade} \implies \int_{-\pi}^\pi g(x) dx = 0. \quad \square$$

4) Ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodisch mit einer gewissen Periode $T > 0$ (anstelle von 2π), dann ist ihre Fourier-Reihe gegeben durch:

$$f(t) \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$$

$$f(t) \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right),$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{\frac{-2k\pi i x}{T}} dx,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx.$$

Beweis. Dies basiert auf der Beobachtung, dass $g(x) := f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ 2π -periodisch ist:

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x).$$

Damit haben wir $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$, wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx.$$

Mit der Substitution $x = \frac{2\pi}{T}y$ und $dx = \frac{2\pi}{T}dy$ folgt somit

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} g\left(\frac{2\pi}{T}y\right) e^{-ik\frac{2\pi}{T}y} dy \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-ik\frac{2\pi}{T}y} dy. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$f(y) = g\left(\frac{2\pi}{T}y\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}y}. \quad \square$$

Beispiel 6.10.

1. Trigonometrische Polynome sind ihre eigenen Fourier-Reihen. Sehr ähnlich ist es für (algebraische) Polynome in $\sin t$ und $\cos t$.

- $$\begin{aligned} \cos^4 t + \sin^4 t &= (\cos^2 t)^2 + (\sin^2 t)^2 \\ &= \left(\frac{\cos 2t + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\cos 2t - 1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} [2\cos^2(2t) + 2] = \frac{\cos^2 2t}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\cos 4t + 1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4}. \end{aligned}$$
- $$\cos^n(t) = \frac{(e^{it} + e^{-it})^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kit} e^{-(n-k)it}.$$

2. Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), & t \in \left[0, \frac{\pi}{\omega}\right] \\ 0, & t \in \left[-\frac{\pi}{\omega}, 0\right]. \end{cases}$$

Diese Funktion beschreibt einen Wechselstrom mit Kreisfrequenz ω .

Wir möchten die Fourier-Reihe von f finden. Hier ist die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$, sodass

$$\frac{2k\pi}{T} = \frac{2k\pi\omega}{2\pi} = k\omega.$$

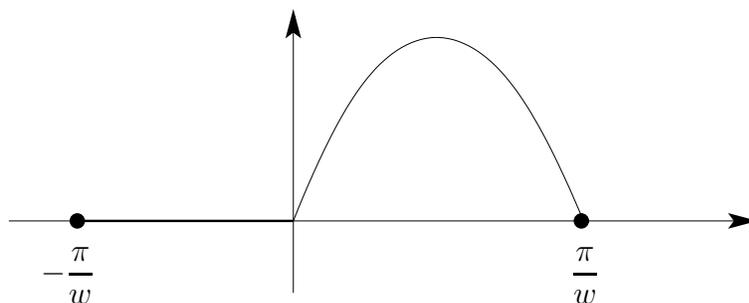


Fig. 6.1

Auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{\omega}]$ haben wir $f(t) = A \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = A \sin(\omega t)$. Die Fourier-Reihe ist

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)),$$

wobei

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} A \sin(\omega t) \cos(k\omega t) dt,$$

$$b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} A \sin(\omega t) \sin(k\omega t) dt.$$

Wir erinnern uns, dass

$$\begin{cases} \sin(\omega t) \cos(k\omega t) = \frac{1}{2} [\sin[(k+1)\omega t] + \sin[(1-k)\omega t]] \\ \sin(\omega t) \sin(k\omega t) = \frac{1}{2} [\cos[(k-1)\omega t] - \cos[(1+k)\omega t]]. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$a_k = \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (\sin[(k+1)\omega t] + \sin[(1-k)\omega t]) dt, \quad k \geq 0,$$

$$b_k = \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (\cos[(1-k)\omega t] - \cos[(1+k)\omega t]) dt, \quad k > 0.$$

Die Auswertung dieser Integrale ergibt dann

$$a_0 = \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} 2 \sin(\omega t) dt = \frac{A\omega}{\pi} \frac{(-\cos(\omega t))}{\omega} \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\ = \frac{2A}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(2\omega t) dt = -\frac{\cos 2\omega t}{2\omega} \frac{A\omega}{\pi} \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\ = 0$$

$$a_k \stackrel{k \geq 2}{=} \frac{A\omega}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{(1+k)\omega} \cos((1+k)\omega t) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} - \frac{1}{(1-k)\omega} \cos((1-k)\omega t) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \right. \\ = \frac{A}{2\pi} \left[\frac{1 - \cos(1+k)\pi}{1+k} + \frac{1 - \cos(1-k)\pi}{1-k} \right] \\ = \begin{cases} \frac{A}{2\pi} \left(\frac{1-1}{1+k} + \frac{1-1}{1-k} \right) = 0, & k \text{ ungerade,} \\ \frac{A}{2\pi} \left(\frac{1-(-1)}{1+k} + \frac{1-(-1)}{1-k} \right) = \frac{2A}{\pi} \frac{1}{(1-k^2)}, & k \text{ gerade,} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{\omega A}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \left(-\cos((1+k)\omega t) + \cos((1-k)\omega t) \right) dt \stackrel{k \neq 1}{=} \\ = \frac{\omega A}{2\pi} \left(-\frac{\sin((1+k)\omega t)}{(1+k)\omega} \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} + \frac{\sin((1-k)\omega t)}{(1-k)\omega} \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \right) \\ = 0$$

$$b_1 = \frac{\omega A}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (-\cos(2\omega t) + 1) dt = \frac{\omega A}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{A}{2}.$$

Daraus folgt, dass die Fourier-Reihe von f gegeben ist durch

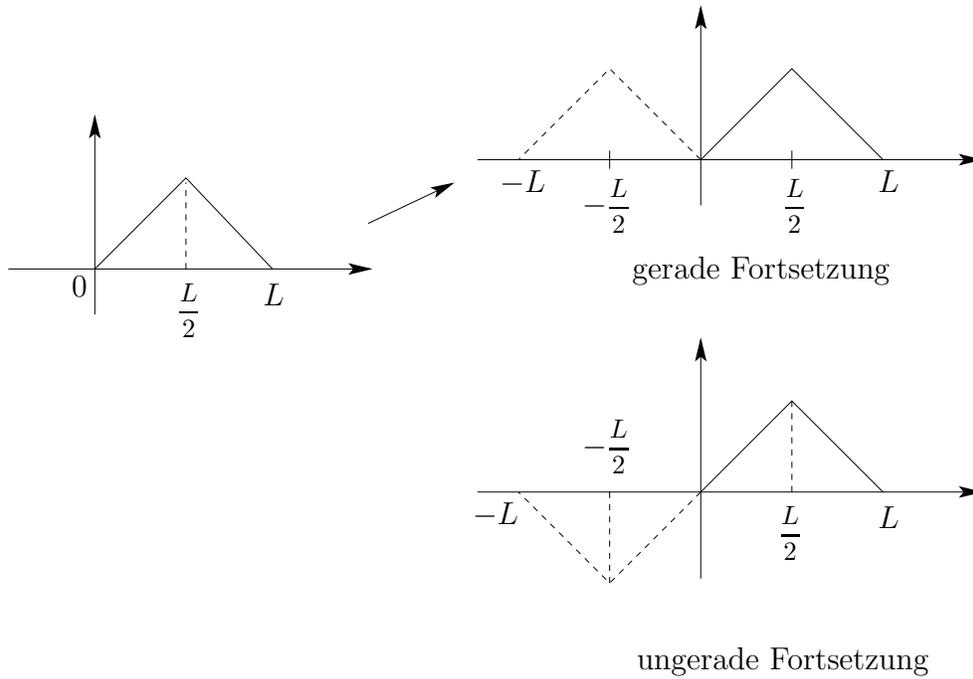
$$f(t) \sim \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin(\omega t) + \frac{2A}{\pi} \sum_i^{\infty} \frac{\cos(2k\omega t)}{(1+2k)(1-2k)}. \square$$

Manchmal haben wir eine Funktion, die auf einem Intervall $[0, L]$ definiert ist. Wir können dann die Funktion auf die ganze reelle Achse periodisch fortsetzen.

Beispiel 6.11.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{L} x, & x \in \left[0, \frac{L}{2}\right] \\ \frac{2\alpha}{L} (L-x), & x \in \left[\frac{L}{2}, L\right], \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$, $L > 0$.



Manchmal ist es besser, eine gerade Fortsetzung zu haben (d.h. Fourier-Reihe mit $b_k = 0$), manchmal wird aber eine ungerade Fortsetzung ($a_k = 0$) geeigneter sein.

Welche Fortsetzung (gerade oder ungerade) besser ist, hängt von der Anwendung (etwa den Randbedingungen der partiellen Differentialgleichung) ab.

Gerade Fortsetzung

$$b_k = 0, \quad \text{Periode } T = 2L$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{2\alpha x}{L} \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \frac{2\alpha}{L} (L-x) \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx \\ &= \dots (\text{mittels partieller Integration}) \\ &= \frac{4\alpha}{k^2\pi^2} \left(2 \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos(k\pi) - 1\right). \end{aligned}$$

Ungerade

$$a_k = 0 \quad T = 2L$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{2\alpha}{L} x \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \frac{2\alpha}{L} (L-x) \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx \\ &= \dots = \frac{8\alpha}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Jetzt möchten wir die erste der eingangs gestellten Fragen beantworten: Welche periodische Funktionen können durch trigonometrische Reihen dargestellt werden?

Die Antwort zu dieser Frage ist sehr schwierig, es gibt dazu umfangreiche mathematische Literatur. Wir werden aber einen Satz beweisen (bzw. einen Spezialfall davon).

Satz 6.12. *Sei f eine auf $[-\pi, \pi]$ definiert 2π -periodische Funktion, die stückweise stetig ist und für die in jedem Punkt in $[-\pi, \pi]$ die linke und die rechte Ableitung existiert. Dann ist die Fourier-Reihen-Entwicklung von f auf $[-\pi, \pi]$ konvergent.*

Die Summe der Fourier-Reihe ist

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = f(x), \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = f(x),$$

in allen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$, in denen f stetig ist, und

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx_0} = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right] \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right]$$

für alle Sprungstellen $x_0 \in [-\pi, \pi]$.

Beispiel 6.13. (Rechtecksignal) Sei

$$f(x) = \begin{cases} -\alpha, & -\pi < x < 0, \\ \alpha, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad \text{und } f(x + 2\pi) = f(x).$$

Diese Funktion bezeichnet man auch als Rechtecksignal; sie beschreibt ein periodisches Signal, das zwischen zwei Werten hin und her schaltet, und entsprechend als Graph einen rechteckigen Verlauf aufweist. Wie man sehr schnell nachrechnet, ist die Fourier-Reihe von f gegeben durch

$$\frac{4\alpha}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)x);$$

man beachte, dass f ungerade ist.

Der Satz besagt nun, dass für alle $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{4\alpha}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)x) = f(x).$$

Falls $x = n\pi$, so folgt

$$\frac{4\alpha}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin((2k+1)n\pi) = 0 = \frac{-\alpha + \alpha}{2} = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow n\pi^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow n\pi^+} f(x) \right],$$

übereinstimmend mit dem Satz.

Übung 6.14. Zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$ im Beispiel 6.13 in einem geeigneten Punkt.

Beweis des Satzes 6.12. Wir werden annehmen, dass f zweimal differenzierbar ist und die Ableitungen stetig sind, sonst ist der Beweis zu schwierig. Für $k \neq 0$ folgt dann mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ik} \frac{e^{-ikx}}{-ik} f'(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i^2 k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) e^{-ikx} dx \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i^2 k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

Infolge der Stetigkeit von f'' existiert ein $M > 0$ so dass

$$|f''(x)| \leq M, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Daraus folgt, dass

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi k^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx \leq \frac{M}{k^2}.$$

Mit einem analogen Argument erhalten wir aus der Stetigkeit von f

$$|f(x)| \leq M_0 \quad \text{und} \quad |c_0| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \leq M_0.$$

Insgesamt folgt dann

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \right| \leq M_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{M}{k^2} = M_0 + 2M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Nach dem Konvergenzkriterium von Weierstraß ist daher die Fourier-Reihe von f gleichmässig konvergent.

Die anderen Teile des Satzes werden wir hier nicht beweisen, da die Beweise zu aufwändig sind bzw. fortgeschrittenere Mittel benötigen. \square

Übung 6.15. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Lösung der Übung 6.15.

Die Lösung demonstriert eine der einfacheren Anwendungen von Fourierreihen. Die Idee ist Fourier-Reihen-Entwicklungen elementarer bzw. (relativ) einfacher Funktionen zu verwenden, um damit (unter Berücksichtigung des Konvergenzresultates in Satz 6.12) die Grenzwerte von Reihen explizit zu bestimmen. In diesem Fall können wir beispielsweise $f(x) = (x - \pi)^2$ betrachten.

Die Funktion kann zwar auf ganz \mathbb{R} definiert werden, wir wollen $f(x)$ aber nur auf $[0, \pi]$ betrachten und dann auf \mathbb{R} zu einer geraden 2π -periodischen Funktion fortsetzen, um auf diese Variante dann in eine Fourier-Reihe mit ausschließlich Cosinus-Termen zu entwickeln.

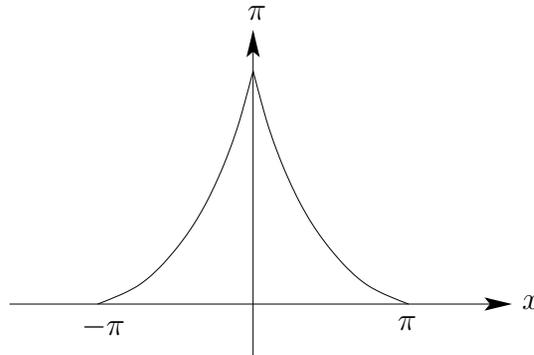


Fig. 6.3

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 dx = \frac{2}{3\pi} (x - \pi)^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 \cos(nx) dx$$

= mittels partieller Integration

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} (x - \pi)^2 \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2(x - \pi) \frac{\sin(nx)}{n} dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[2(x - \pi) \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n^2} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{2\pi}{n^2} + \frac{2}{n^2} \left(-\frac{\sin(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{4}{n^2}.$$

Daraus folgt, dass $(x - \pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx)$, $x \in (-\pi, \pi)$. Speziell für $x = 0$ erhalten wir

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6.2 Konvergenz

Die Konvergenz einer Fourier-Reihe ist nicht besonders gut, bzw. benötigt starke Voraussetzungen ($f \in C^2 \implies$ gleichmässige Konvergenz).

Beispiel 6.16. Wir betrachten die Fourier-Reihe von $f(x) = x$, wobei $x \in [-\pi, \pi]$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$.

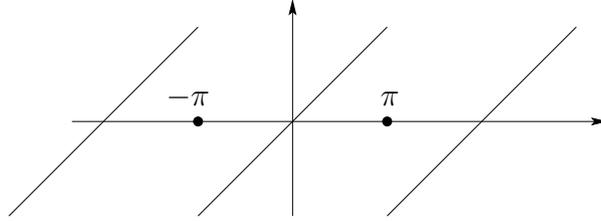


Fig. 6.4

Es ist einfach zu sehen, dass $a_k = 0$ (da f ungerade ist) und $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(kx) dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$, sodass $f(x) = 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$. In diesem Fall ist die Reihe $2 \sum_{k=1}^\infty \frac{|\sin kx|}{k}$ nicht konvergent in $(0, \pi)$ (d.h. die Fourier-Reihe von f ist nirgends absolut konvergent). Dies folgt aus

$$\frac{|\sin(kx)|}{k} \geq \frac{\sin^2 kx}{k} = \frac{1 - \cos(2kx)}{2k}.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos(2kx)}{2k}$ konvergiert, aber bekanntlich ist

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k} = +\infty!$$

In der Nähe der Sprungstelle einer Funktion tritt ein weiterer unangenehmer Effekt auf, der Gibbs Phänomen genannt wird. Sei

$$s_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

die N -te Partialsumme der Fourier-Reihe von f . Das Gibbs Phänomen tritt bei der Approximation von f durch s_N in einer Umgebung einer Sprungstelle tritt auf. Es handelt sich dabei um Überschwingungen, d.h. nahe solcher Sprungstellen ist die Approximation s_N signifikant größer als die Originalfunktion. Man kann diese Überschwingungen genauer analysieren, und stellt dabei fest: 1) Die Höhe der Überschwingungen, d.h. der Fehler $f - s_N$, beträgt etwa 18% der halben Sprunghöhe; und gravierender, 2) der Effekt verschwindet nicht (wird nicht kleiner) durch Hinzunahme weiterer Terme zur Partialsumme, er ist nur näher zur Sprungstelle konzentriert (die Überschwingungen haben eine höhere Frequenz).

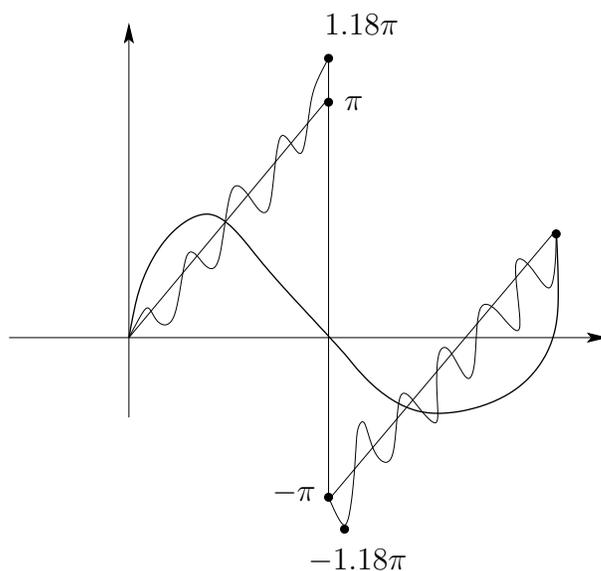


Fig. 6.5

In Übereinstimmung mit Satz 6.12 hat man daher hier in $x = \pi$ keine (punktweise) Konvergenz.

Ein anderes Konvergenzresultat trifft jedoch immer zu, nämlich

$$\|f - s_N\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |s_N(t) - f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow +\infty,$$

wobei $s_N = \sum_{k=-N}^{\infty} c_k e^{ikx}$ und $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$. Außerdem ist s_N die beste Approximation von f durch jedes trigonometrische Polynome vom Grad höchstens N , d.h. für jedes andere trigonometrische Polynom p des Grades $\leq N$ ist $\|f - p\| \geq \|f - s_N\|$.

Bevor wie zu diesen Konvergenzaussagen zurückkommen, beweisen wir einen Zusammenhang zwischen den Fourierkoeffizienten und $\|f\|^2$ (dies entspricht einem Zusammenhang zwischen der Gesamtenergie eines Signals und den Anteilen der verschiedenen Frequenzen)

Satz 6.17. (Parsevalsche Gleichung)

Sei f eine 2π -periodische Funktion mit $\|f\|^2 < \infty$ und es seien $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{b_k\}_{k > 0}$, die Fourier-Koeffizienten von f . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \end{aligned}$$

Beweis. Schritt 1: Als Vorbereitung betrachten wir zunächst ein beliebiges trigonometrisches Polynom $p(x) = \sum_{k=-N}^N \gamma_k e^{ikx}$. Aus den Orthogonalitätsrelationen erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |p(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-N}^N \gamma_k e^{ikx} \right) \left(\sum_{k=-N}^N \bar{\gamma}_k e^{-ikx} \right) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-N}^N |\gamma_k|^2 dx = 2\pi \sum_{k=-N}^N |\gamma_k|^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{p(x)} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \right) \left(\sum_{n=-N}^N \bar{\gamma}_n e^{-inx} \right) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N c_n \bar{\gamma}_n dx = 2\pi \sum_{n=-N}^N c_n \bar{\gamma}_n \\ \implies 2\pi \|f - p\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - 4\pi \operatorname{Re} \sum_{n=-N}^N c_n \bar{\gamma}_n + 2\pi \sum_{n=-N}^N |\gamma_n|^2, \end{aligned}$$

wobei wie bisher

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} 2\pi \|f - p\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f - p|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f - p)(\bar{f} - \bar{p}) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - 2 \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{p} dx + \int_{-\pi}^{\pi} |p|^2 dx. \end{aligned}$$

Schritt 2: Zur Vereinfachung nehmen wir wieder an, dass $f \in C^2(\mathbb{R})$. Nach Satz 6.12 wissen wir dann bereits, dass $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, mit Ausnahme von (für die Integration unwichtigen) Sprungstellen. Im Beweis von Satz 6.12 hatten wir außerdem gezeigt $|c_k| \leq \frac{m}{k^2}$. Mit einer Rechnung analog zu $\int_{-\pi}^{\pi} |p(x)|^2 dx$ aus Schritt 1 erhalten wir dann

$$\begin{aligned} 2\pi \|f - s_N\|^2 &= \int_0^{2\pi} |f - s_N|^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k e^{ikt} \right|^2 dt \\ &= 2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \leq 2\pi M^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^4}. \end{aligned}$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ konvergiert, folgt aber $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow +\infty$. Aus der Dreiecksungleichung schließen wir daher

$$\left| \|s_n\| - \|f\| \right| \leq \|s_n - f\| \leq (2\pi)^{\frac{1}{2}} M \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n\| = \|f\| \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n\|^2 = \|f\|^2.$$

Andererseits ist nach Schritt 1 mit $p = s_N$

$$2\pi \|s_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |s_N|^2 dx = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2.$$

Zusammen folgt schließlich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2. \quad \square$$

Nun können wir zu den schon erwähnten Konvergenzaussagen zurückkehren.

Satz 6.18. *Sei f eine 2π -periodische Funktion. Dann:*

- 1) $\|f - s_N\| \rightarrow 0$ für $N \rightarrow +\infty$.
- 2) $\|f - p\| \geq \|f - s_N\|$ für alle N und alle trigonometrischen Polynome von Grad $\leq N$.

Beweis. 1) Wie in Schritt 1 des Beweises von Satz 6.17 ist

$$2\pi \|f - p\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - 4\pi \operatorname{Re} \sum_{n=-N}^N c_n \bar{\gamma}_n + 2\pi \sum_{n=-N}^N |\gamma_n|^2.$$

Mit $p = s_N$ und daher $\gamma_k = c_k$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\pi \|f - s_N\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - 4\pi \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 + 2\pi \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - 2\pi \sum_{k=-N}^N |c_k|^2. \end{aligned}$$

Nach Satz 6.17 geht die rechte Seite dieser Gleichung aber gegen 0 für $N \rightarrow \infty$.

2) Wir zeigen dazu $\|f - p\|^2 - \|f - s_N\|^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 & 2\pi(\|f - p\|^2 - \|f - s_N\|^2) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - 4\pi \operatorname{Re} \sum_{k=-N}^N c_k \bar{\gamma}_k + 2\pi \sum_{k=-N}^N |\gamma_k|^2 \\
 &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx + 2\pi \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \\
 &= 2\pi \sum_{k=-N}^N (|\gamma_k|^2 - 2\operatorname{Re}(c_k \bar{\gamma}_k) + |c_k|^2) = 2\pi \sum_{k=-N}^N |\gamma_k - c_k|^2 \geq 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

7 Fourier-Transformation

7.1 Definition der Fourier-Transformation

Wir haben gesehen, dass jede T -periodische Funktion $f(x)$ durch eine Fourier-Reihe $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{T}}$ dargestellt werden kann.

Das bedeutet, dass jede solche Funktion als Superposition (unendliche Linearkombination) von Funktionen der Form e^{ikx} dargestellt werden kann, wobei k über die Menge $\{\dots - \frac{2\pi}{T}, 0, \frac{2\pi}{T}, \frac{4\pi}{T}, \dots\}$ läuft.

Der Abstand Δk zwischen zwei benachbarten Werten von k ist $\frac{2\pi}{T}$. Für große T liegen diese Frequenzen immer näher beieinander.

Angenommen, es stünden plötzlich alle Frequenzen zur Verfügung, ließe sich " $T \rightarrow +\infty$ " erreichen, d.h., **könnten dann auch nicht-periodische Funktionen auf ganz \mathbb{R} dargestellt werden?**

Schauen wir uns an, was in diesem Fall passieren würde.:

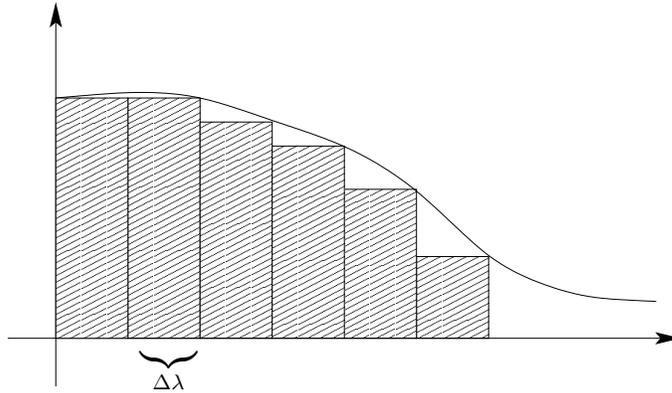
Sei also φ eine nicht-periodische Funktion auf \mathbb{R} , die wir zunächst im Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ darstellen wollen (natürlich mit dem Hintergedanken dass $T \rightarrow +\infty$). Auf $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ lässt sich φ in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x} \\ (7.1) \quad &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{ik\frac{2\pi}{T}x} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(y) e^{-ik\frac{2\pi}{T}y} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(y) \underbrace{\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{2\pi k}{T}(x-y)} dy}_{\text{Riemannsche Näherungssumme}} \end{aligned}$$

Der unterklammerte Faktor kann nun als Riemannsche Näherungssumme für das Integral

$$(7.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-y)} d\lambda$$

aufgefasst werden.



Breite eines Rechtecks $\Delta\lambda = \frac{2\pi}{T}$

Fig. 7.1

Setzen wir (7.2) in (7.1) ein und lassen T gegen Unendlich streben, so erhalten wir die Formel

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-i\lambda y} dy}_{:=\widehat{\varphi}(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Die Funktion $\widehat{\varphi}(\lambda)$ übernimmt offenbar die Aufgabe der Fourier-Koeffizienten c_x , indem sie angibt, wie stark die Schwingung $e^{i\lambda x}$ in der Funktion φ vertreten ist.

Definition 7.1. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *absolut integrierbar*, falls

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

gilt.

Definition 7.2. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion. Die *Fourier-Transformation* von f ist die Funktion

$$(7.3) \quad \mathcal{F}[f](\omega) = \widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy.$$

Die Fourier-Transformation einer Funktion wird auch **Spektralfunktion** genannt.

Wir bemerken, dass $\widehat{f}(\omega)$, für alle $\omega \in \mathbb{R}$, wohldefiniert ist, weil $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$. Darüber hinaus ist \widehat{f} von selbst stetig (auch wenn f Sprungstellen aufweist) und geht mit $\omega \rightarrow \pm\infty$ gegen 0.

Anmerkung:

Anstelle von (7.3) sind auch die folgenden Definitionen für $\widehat{f}(\omega)$ gebräuchlich:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i \omega y} dy.$$

Der zugehörige Formelapparat sieht jedoch anders aus, aber inhaltlich bleibt die Theorie selbstverständlich die gleiche.

Definition 7.3. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion. Die inverse Fourier-Transformation von f ist die Funktion

$$(7.4) \quad \mathcal{F}^{-1}[f](y) = \check{f}(y) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) e^{iwy} dw.$$

Wir möchten festhalten, unter welchen Voraussetzungen f durch ein Fourier-Integral dargestellt werden kann. Das geht unter geeigneten Voraussetzungen.

Satz 7.4. [*Fourier Integralsatz 1*] Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion mit absolut integrierbarer Fourier-Transformation ($\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(w)| dw < +\infty$). Dann ist f stetig und es gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{iwt} dw.$$

7.2 Interpretation der Fourier-Transformation

$\hat{f}(\omega)$ gibt an, mit welcher Amplitude (und Phase) die Frequenz ω in der Funktion f auftritt. Sie heißt daher auch Spektralfunktion von f .

Die ω -Werte, für die $\hat{f}(\omega) \neq 0$ ist, bilden zusammen das Spektrum der Funktion f . Eine periodische Funktion besitzt ein diskretes Spektrum, da nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz in der Fourier-Darstellung einer solchen Funktion auftreten.

Beispiel 7.5. Sei

$$f(t) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-a, a] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion des Intervalls $[-a, a]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-a}^a = \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{i\omega} = \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega}. \end{aligned}$$

Die Funktion $f(t)$ hat kompakten Träger, der Träger ihrer Fourier-Transformation ist aber die ganze ω -Achse. Außerdem, die Fourier-Transformierte \hat{f} ist nicht absolut integrierbar, und entsprechend

$$f(t) \neq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Beispiel 7.6. Wir möchten jetzt die Fourier-Transformierte der Funktion $f(t) = \frac{1}{k^2+t^2}$, mit $k > 0$ fest, berechnen. Wir haben bereits in Beispiel 5.14 das Integral $I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt$ berechnet. Das Vorgehen in diesem Fall ist vollkommen analog.

Die Funktion $g(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{k^2+z^2}$ hat in der oberen Halbebene einen einfachen Pol an der Stelle $z_0 = ik$, und in der unteren Halbebene einen einfachen Pol in $z_1 = -ik$. Deshalb folgt

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{k^2+t^2} dt = 2\pi i \frac{e^{i\alpha ik}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-\alpha k}, \text{ falls } \alpha \geq 0,$$

und

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{k^2+t^2} dt = \frac{\pi}{k} e^{\alpha k}, \text{ falls } \alpha \leq 0.$$

Daher können wir $I(\alpha) = \frac{\pi}{k} e^{-k|\alpha|}$ kürzer schreiben, und entsprechend

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{k} e^{-k|\omega|}.$$

Die Funktion \widehat{f} ist absolut integrierbar. Folglich können wir auch die Inverse Fouriertransformation explizit berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{k} e^{-k|\omega|} e^{it\omega} d\omega &= \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-k\omega} \cos(t\omega) d\omega = \frac{1}{k} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{(-k+it)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{k} \operatorname{Re} \left. \frac{e^{(-k+it)\omega}}{it-k} \right|_{\omega=0}^{\infty} = \frac{1}{k} \operatorname{Re} \frac{1}{k-it} = \frac{1}{k^2+t^2} = f(t). \end{aligned}$$

Bemerkung 7.7. Die Voraussetzung in Satz 7.4, dass \widehat{f} eine absolut integrierbare Funktion sei, ist sehr stark und in vielen Fällen nicht erfüllt.

Es gilt eine weitere Version von Satz 7.4:

Satz 7.8. [*Fourier Integralsatz 2*] Sei f absolut integrierbar und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} &= pv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

(Die Existenz von $pv(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega)$ ist eine Folge der Voraussetzungen).

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(t) = \mathbb{1}_{[-a,a]}$. Wir haben bereits gesehen, dass

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2 \sin(a\omega)}{\omega}.$$

Gemäß Satz 7.8 gilt

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = pv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin a\omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

Wir können das Integral auf der rechten Seite direkt berechnen,

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{2 \sin a\omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega &= \int_{-R}^R \left(\int_{-a}^a e^{-i\omega s} ds \right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-a}^a \left(\int_{-R}^R e^{i\omega(t-s)} d\omega \right) ds \\ &= 2 \int_{-a}^a \frac{\sin R(t-s)}{t-s} ds \\ &\stackrel{R(t-s)=\tau}{=} 2 \int_{R(t-a)}^{R(t+a)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = (*). \end{aligned}$$

In Übung 5.18 haben wir gesehen, dass $\int_0^\infty \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \frac{\pi}{2}$, und daher

$$(*) = 2 \int_{R(t-a)}^0 \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau + 2 \int_0^{R(t+a)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau.$$

Wir betrachten den Grenzwert $R \rightarrow +\infty$ und erhalten

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{R(t+a)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & t > -a \\ 0 & t = -a \\ -\frac{\pi}{2} & t < -a \end{cases}$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{R(t-a)}^0 \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & t < a \\ 0 & t = a \\ -\frac{\pi}{2} & t > a. \end{cases}$$

Deshalb:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} 2 \int_{R(t-a)}^{R(t+a)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ \frac{1}{2} & |t| = a \\ 0 & |t| > a. \end{cases}$$

Beispiel 7.9. Wir möchten die Fourier-Transformierte von $f(t) = e^{-\alpha t^2}$, $\alpha > 0$, bestimmen. Für den Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ erhalten wir dabei die Fourier-Transformierte der Normalverteilung:

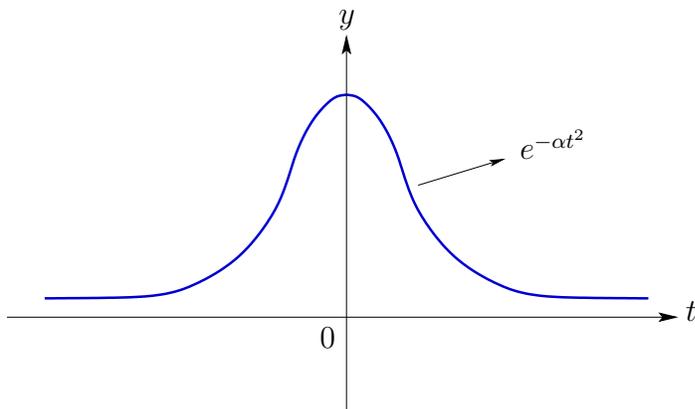


Fig. 7.2

Wir haben

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{it\omega} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2 - i\omega t} dt.$$

Nun gilt $\alpha t^2 + i\omega t = (\sqrt{\alpha} t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha}$, sodass erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2 - i\omega t} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\alpha} t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt umfasst dabei einige Details: Nach der naheliegenden Substitution $z = \sqrt{\alpha} t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}}$ haben wir zunächst KEINE reelle Variable mehr, und wir integrieren auch nicht mehr entlang der reellen Achse. Dieser Schritt bedarf daher einer entsprechenden Rechtfertigung (siehe Übung).

Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$ lässt sich jedoch sehr einfach mithilfe des folgenden

Tricks berechnen:

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\
 &= \text{Polarkoordinaten} \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\sigma \\
 &= \left(-\frac{2\pi}{2} \right) \left(+e^{-r^2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \pi \\
 \implies I &= \sqrt{\pi}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}.$$

7.3 Rechenregeln

Anstatt die Fourier-Transformierte einer Funktion mithilfe der Definition zu berechnen, ist es häufig günstiger, dies mithilfe einer der vielen Rechenregeln auf einfachere Funktionen zurückzuführen.

Seien f, h absolut integrierbare Funktionen (ebenso ggf. $f', tf, \widehat{f}, \dots$).

a) $(\alpha \widehat{f} + \beta \widehat{h}) = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{h}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (Linearität).

b) $g(t) = T_a f := f(t - a) \implies \widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega) e^{-ia\omega}$.

c) $g(t) := f\left(\frac{t}{\alpha}\right), \alpha > 0 \implies \widehat{g}(\omega) = \alpha \widehat{f}(\alpha\omega)$.

d) $g(t) := e^{i\omega_0 t} f(t), \omega_0 \in \mathbb{R} \implies \widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega - \omega_0)$.

Beweis. a) - d): Definition und Koordinaten-Wechsel. □

e)

$$g(t) := f'(t) \implies \widehat{g}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)$$

$$g(t) := f''(t) \implies \widehat{g}(\omega) = -\omega^2 \widehat{f}(\omega)$$

$$g(t) := f^{(k)}(t) \implies \widehat{g}(\omega) = (i\omega)^k \widehat{f}(\omega).$$

Beweis. Partielle Integration. □

f) $g(t) := t f(t) \implies \widehat{g}(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \widehat{f}(\omega)$.

Beweis. Die Aussage erhält man durch Ableitung nach ω unter dem Integral in $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\omega} dt$. \square

g) Sei $(f * h)(t)$ die Faltung von f und h , d.h.

$$(f * h)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) h(t - y) dy.$$

Dann ist $\widehat{(f * h)}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \widehat{h}(\omega)$.

Beweis. Der Beweis des Faltungssatzes ergibt sich durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral und die Anwendung von Eigenschaft b):

$$\begin{aligned} \widehat{(f * h)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) h(t - y) dy \right) e^{-it\omega} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - y) e^{-it\omega} dt \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iy\omega} \widehat{h}(\omega) dy \\ &= \widehat{f}(\omega) \widehat{h}(\omega). \end{aligned}$$

\square

Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften der Fourier-Transformation in der folgenden Tabelle zusammen:

Funktion	Fourier-Transformation	Anmerkung
$f(x)$	$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$	Definition
$af(x) + bg(x)$	$a\widehat{f}(\xi) + b\widehat{g}(\xi)$	Linearität
$f(x - a)$	$e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi)$	Translation im Definitionsbereich
$f(ax)$	$\frac{1}{ a } \widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$	Streckung im Definitionsbereich
$\widehat{f}(x)$	$2\pi f(-\xi)$	Dualität
$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$	$(i\xi)^n \widehat{f}(\xi)$	
$x^n f(x)$	$i^n \frac{d^n}{dx^n} \widehat{f}(\xi)$	
$f * g(x)$	$\widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$	$f * g$ ist die Faltung von f und g
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi} (\widehat{f * g})(\xi)$	

Wir werden im nächsten Abschnitt noch mehr über die Faltung und ihre Eigenschaften sprechen, möchten aber zuerst in einem Beispiel diese Rechenregeln anwenden.

Beispiel 7.10. Wir betrachten die Funktion $f(t) = te^{-t^2}$.

$$\begin{aligned}\widehat{f}(t) &= \widehat{(te^{-t^2})}(\omega) = \left(-\frac{1}{2}(e^{-t^2})' \right)(\omega) \stackrel{\text{a)}}{=} -\frac{1}{2} \widehat{((e^{-t^2})')}(\omega) \\ &\stackrel{\text{e)}}{=} -\frac{1}{2} i\omega \widehat{(e^{-t^2})}(\omega) = -\frac{1}{2} i\omega \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.\end{aligned}$$

Die Rechenregel e) liefert unmittelbar eine Methode zur Lösung **linearer** Differentialgleichungen.

Beispiel 7.11. Sei f eine Funktion, die der Differentialgleichung

$$f'(t) + f(t) = \varphi(t)$$

genügt, wobei $\varphi(t) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$.

Wir wenden die Fourier-Transformation auf beiden Seiten an. Wir erhalten:

$$\widehat{(f')} + \widehat{f} = \widehat{\varphi} \implies i\omega \widehat{f}(\omega) + \widehat{f}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega).$$

Dies ist keine Differentialgleichung mehr (sondern eine algebraische Gleichung), und wir können sofort nach $\widehat{f}(\omega)$ auflösen. Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ folgt

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\widehat{\varphi}(\omega)}{1 + i\omega}.$$

Nach Satz 7.8 haben wir

$$f(t) = pv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\omega)}{1 + i\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

Zusammen mit $\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$ bekommen wir dann

$$f(t) = pv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{(1 + i\omega)\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

Mithilfe des Residuensatzes folgt schließlich

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ [e^{1-t} - e^{-(1+t)}] & t \geq 1 \\ 1 - e^{-(1+t)} & |t| < 1. \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$g(z) = \frac{\sin(z)}{z(1+iz)} e^{izt} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz(1+iz)} e^{izt} = \frac{-e^{iz(1+t)} + e^{iz(t-1)}}{2z(z-i)}.$$

Die oben angewandte Methode liefert uns “nur” eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung. Wie immer bei linearen Differentialgleichungen erhält man die allgemeine Lösung dann durch Addition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $f'(x) + f(x) = 0$. Also:

$$f_{\text{allg}}(t) = pv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\lambda)}{1+i\lambda} e^{i\lambda t} dt + ce^{-t} \quad c \in \mathbb{R}.$$

7.4 Einige Eigenschaften der Faltung

Seien f und g zwei integrierbare Zeitsignale. Die Faltung (oder auch Faltungsprodukt) $f * g$ ist wie folgt definiert:

$$(7.5) \quad (f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt.$$

Die Funktion $f * g$ ist mindestens so regulär (stetig, differenzierbar, usw.) wie die “bessere” der beiden Funktionen f und g . Diese Operation verhält sich in der Tat wie ein Produkt, d.h. die Faltung hat ähnliche algebraische Eigenschaften wie das “gewöhnliche” Produkt $f \cdot g$:

$$f * g = g * f \quad (\text{Kommutativität})$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (\text{Assoziativität})$$

$$(\alpha f_1 + \beta f_2) * g = \alpha f_1 * g + \beta f_2 * g, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (\text{Linearität})$$

$$(T_a f) * g = T_a(f * g), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 7.12. Ist A eine beliebige Teilmenge von \mathbb{R} , so bezeichnet man die charakteristische Funktion dieser Teilmenge mit $\mathbb{1}_A$:

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in A^c = \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$$

Die Rechtecksfunktion

$$\mathbb{1}_{[0,1]}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar. Sei f ein beliebiges Zeitsignal, so ergibt sich mit (7.5) für ein gegebenes x , dass

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \mathbb{1}_{[0,1]} * f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-t) f(t) dt \\ &= \int_{x-1}^x f(t) dt; \end{aligned}$$

denn im t -Intervall $[x-1, x]$ ist $\mathbb{1}_{[0,1]}(x-t) = 1$ und für alle anderen t ist $\mathbb{1}_{[0,1]}(x-t) = 0$. Die Formel (7.6) lässt sich folgendermaßen interpretieren: Die Abbildung

$$\mathbb{1}_{[0,1]} * : f \longmapsto \mathbb{1}_{[0,1]} * f$$

ersetzt das Zeitsignal f durch den Mittelwert von f “über die letzte Sekunde”. Dieser Mittelwert ändert sich träger als die Funktion f selbst.

Wir untersuchen die **Regularisierungseigenschaft** der Faltung betrachten.

Beispiel 7.13. Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = \int_{x-1}^x \mathbb{1}_{[0,1]}(t) dt = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ 2 - x & x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

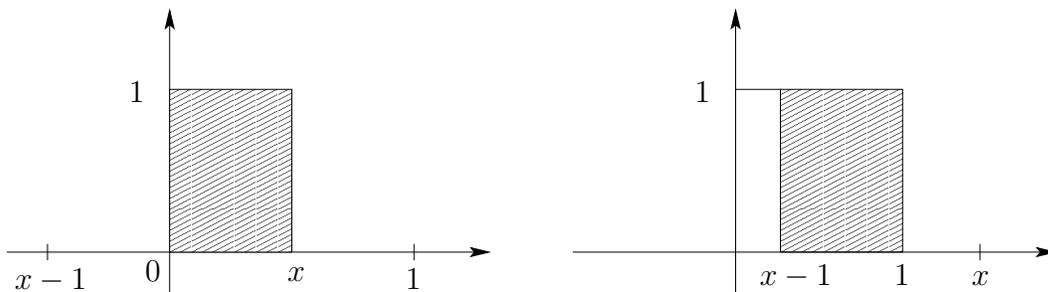
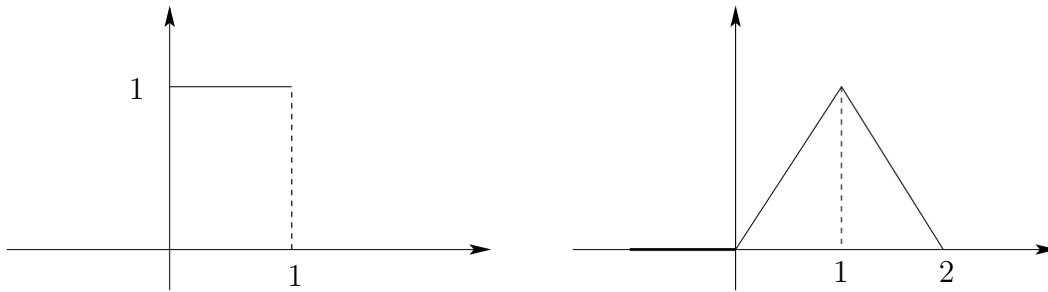


Fig. 7.3

Der Träger von $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$ ist also $[0, 2]$. Es ist einfach (aber etwas aufwändig) zu sehen, dass $\mathbb{1}_{[0,1]} * (\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]})$ “glatter” als $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$ ist mit Träger $[0, 3]$. Dies setzt sich fort bei Hinzunahme von weiteren Faktoren $\mathbb{1}_{[0,1]} *$.



$$\mathbb{1}_{(0,1)} * \mathbb{1}_{(0,1)} = (1 - |x - 1|)^+ \\ = \max(1 - |x - 1|, 0)$$

Fig. 7.4

Durch die Faltung mit $\mathbb{1}_{[0,1]}$ erhält man also Funktionen, die immer glatter sind und deren Träger immer grösser werden. Diese Funktionen sind stückweise Polynome und werden *B-Splines* genannt. Sie spielen eine große Rolle in einigen Bereichen der numerischen Mathematik.

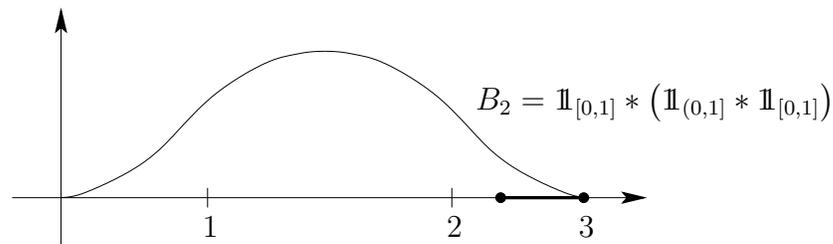


Fig. 7.5

Beispiel 7.14. Sei

$$\Phi(t) := \begin{cases} \frac{1}{c} (1 - t^2)^r & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $r \gg 1$ und $c = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^r dt$.

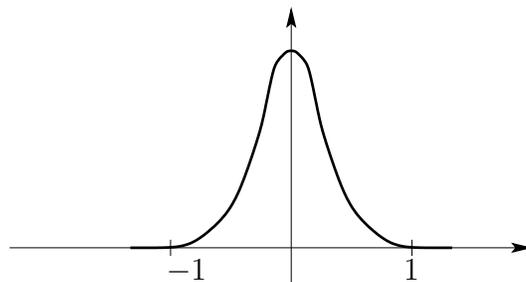


Fig. 7.6

Eigenschaften von Φ :

- 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt = 1$;
- 2) Φ ist gerade;
- 3) Φ besitzt $r - 1$ stetige Ableitungen;
- 4) Der Träger von Φ ist das Intervall $[-1, 1]$.

Mithilfe dieser Funktion Φ bilden wir nun die Funktionen

$$\Phi_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} \Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

die dieselben Eigenschaften wie die Ausgangsfunktion Φ besitzen, aber bezogen auf das Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Insbesondere gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\varepsilon(t) dt = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Sei nun f ein beliebiges Zeitsignal. Dann stellt der Faltungswert

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon * f(x) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\varepsilon(x-t) f(t) dt \\ &= \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \Phi_\varepsilon(x-t) f(t) dt \end{aligned}$$

ein gewichtetes Mittel der f -Werte über dem Intervall $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ dar.

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt, dass der Effekt der Faltung mit f daraus besteht, dass die Werte des Integrals um den Punkt x konzentriert werden, d.h.

$$(7.7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Phi_\varepsilon * f)(x) = f(x)$$

für alle Punkte x in denen f stetig ist.

Da Φ_ε eine C^r -Funktion ist, ist $\Phi_\varepsilon * f$ eine C^r -Approximation der Funktion f .

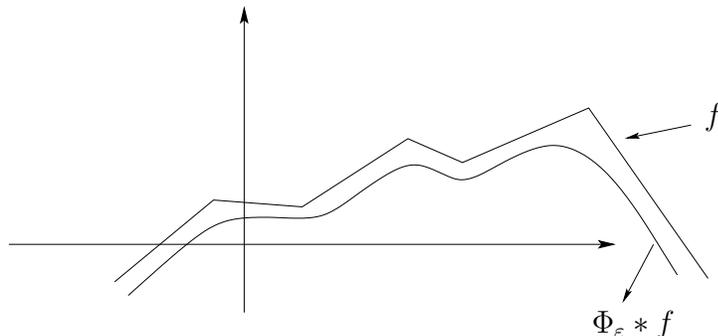


Fig. 7.7

Wir können das gleiche Argument auch mit $\psi_\varepsilon(t) := \Phi'_\varepsilon(t)$ anstelle von Φ_ε anwenden. Da der Träger von ψ_ε das Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned} (\psi_\varepsilon * f)(x) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi_\varepsilon(t) f(x-t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi'_\varepsilon(t) f(x-t) dt \\ &= \Phi_\varepsilon(t) f(x-t) \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi_\varepsilon(t) f'(x-t) dt \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi_\varepsilon(t) f'(x-t) dt = (\Phi_\varepsilon * f')(x). \end{aligned}$$

In anderen Worten: Die Faltungsoperation $\psi_\varepsilon *$ berechnet näherungsweise die Ableitung von f und im Limes gilt natürlich wegen (7.7) für stetig differenzierbare Funktionen f

$$(7.8) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\psi_\varepsilon * f)(x) = f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

8 Laplace Transformation

Im Kapitel 7 wurde die Fourier-Transformation betrachtet, die ein Spezialfall einer Integraltransformation ist.

Definition 8.1. Eine Integraltransformation ist eine Transformation der Form

$$Tf(y) = \int_X k(x, y) f(x) dx,$$

wobei f (bzw. $k(x, y)$) eine Funktion auf einer Menge X (bzw. $X \times Y$) ist. k heißt der **Kern** der Integraltransformation.

Beispiel 8.2. Für $X = Y = \mathbb{R}$ und $k(x, y) = e^{-ixy}$ erhalten wir die Fourier-Transformation.

Warum braucht man Integraltransformationen?

Die Idee ist die folgende: Wir haben ein Problem auf einer Menge X , das schwierig zu lösen ist. Wir können dann das Problem auf X mittels einer Integraltransformation in ein (hoffentlich) einfacheres Problem auf Y umwandeln, das Problem dort lösen, um schließlich mittels der inversen Integraltransformation die Lösung des ursprünglichen Problems auf X zu erhalten. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer anderen Art von Integraltransformation, die **Laplace-Transformation**.

8.1 Definition und Rechenregeln

Zunächst werden einige grundlegende Begriffe erläutern.

Definition 8.3. Eine Funktion

$$f : t \mapsto f(t)$$

einer reellen Variable t mit reellen oder komplexen Werten, heißt **Originalfunktion**, wenn sie die folgenden vier Bedingungen erfüllt.

- i) f ist auf der ganzen reellen Achse definiert;
- ii) f ist stückweise glatt;
- iii) für $t < 0$ gilt $f(t) = 0$.
- iv) f wächst für $t \rightarrow +\infty$ höchstens exponentiell, d.h. es gibt reelle Konstanten $\sigma \geq 0$ und $M \geq 0$, sodass

$$(8.9) \quad |f(t)| \leq M e^{\sigma t} \quad \forall t \geq 0.$$

Die Menge aller Originalfunktionen heißt Originalraum der **Laplace-Transformation**.

Bemerkung 8.4.

- 1) Falls $f(t) \neq 0$ für alle $t < 0$ gilt, können wir stets eine zugehörige Originalfunktion g angeben, indem wir die Bedingung $g(t) = 0$ für alle $t < 0$ erzwingen. Die Funktion

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

erfüllt dann offenbar die Bedingung iii). Wir werden die beiden Funktionen f und g meist miteinander identifizieren.

Wenn wir z.B. von der "Originalfunktion" $f(t) = \cos(\omega t)$ sprechen, meinen wir damit eigentlich die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\omega t), & t > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- 2) Falls $\sigma' > \sigma$ ist, dann ist stets $e^{\sigma t} < e^{\sigma' t}$. Das impliziert, dass wenn $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$ gilt, dann folgt auch $|f(t)| \leq M e^{\sigma' t}$. Wir definieren den **Wachstums-
koeffizient** von f wie folgt

$$\sigma_0 = \inf\{\sigma > 0 : \exists M > 0 : |f(t)| \leq M e^{\sigma t}, \forall t \geq 0\}.$$

Falls σ_0 der Wachstumskoeffizient von f ist, dann $|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$ nicht unbedingt gelten muss.

Beispiel 8.5.

- i) $t \mapsto e^{t^2}$ ist keine Originalfunktion, weil es kein σ gibt, sodass $\sigma t < t^2$ für alle $t \geq 0$.
- ii) Die Heaviside Sprungfunktion H , definiert als

$$H : t \mapsto \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

ist eine Originalfunktion. Ihr Wachstumskoeffizient ist $\sigma_0 = 0$.

- iii) Sei

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \text{wobei } n = 1, 2, \dots$$

Die Funktion f_n ist stückweise glatt. Wir wollen zeigen, dass f_n auch eine Originalfunktion ist, d.h. es gibt $M, \sigma \in \mathbb{R}^+$, sodass $t^n \leq M e^{\sigma t}$ für alle $t \geq 0$.

Tatsächlich gilt für alle $\sigma > 0$

$$e^{\sigma t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma t)^k}{k!} \geq \frac{\sigma^n t^n}{n!}, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Insbesondere folgt damit

$$t^n \leq \frac{n!}{\sigma^n} e^{\sigma t}.$$

Da diese letzte Ungleichung für jedes $\sigma > 0$ gilt, ist

$$\sigma_0 = \inf\{\sigma > 0 : \exists M > 0 : t^n \leq M e^{\sigma t}, \quad \forall t \geq 0\} = 0.$$

Es ist zu beachten, dass hier in der Tat die Abschätzung $f_n(t) \leq M e^{\sigma_0 t}$, $\forall t \geq 0$, für jedes $M > 0$ falsch ist.

iv) Sei $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Die Funktion

$$f : t \mapsto \begin{cases} e^{at} = e^{\alpha t} e^{i\beta t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

ist eine Originalfunktion mit Wachstumskoeffizient $\sigma_0 = \alpha$.

Lemma 8.6. Sei f eine Originalfunktion mit Wachstumskoeffizient σ_0 . Dann existiert für jede komplexe Zahl $s = \sigma + iw$ mit $\sigma > \sigma_0$ das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Beweis. Sei $\sigma_1 \in \mathbb{R}$, sodass $\operatorname{Re} s = \sigma > \sigma_1 > \sigma_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |f(t)| dt \\ &\leq M \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{\sigma_1 t} dt \\ &= M \left. \frac{e^{(\sigma_1 - \sigma)t}}{(\sigma_1 - \sigma)} \right|_0^{\infty} = \frac{M}{\sigma - \sigma_1} < +\infty. \quad \square \end{aligned}$$

Wir können das folgende definieren:

Definition 8.7. Sei f eine Originalfunktion mit Wachstumskoeffizient σ_0 . Die komplexe Funktion einer komplexen Variablen

$$F : s \mapsto \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \in \mathbb{C} \quad (\operatorname{Re} s > \sigma_0)$$

heißt **Laplace-Transformation** von f . Wir bezeichnen die Laplace-Transformation von f auch mit $\mathcal{L}[f]$.

Der Unterschied zwischen der Laplace-Transformation (LT) und der Fourier-Transformation (FT) ist, dass man für die LT auch wachsende Funktionen betrachten kann. Andererseits liefern die Werte von f , für negative Argumente von t , keinen Beitrag. Die Menge der Laplace-Transformationen heißt **Bildraum**. Es existieren verschiedene Konventionen: z.B. wir können die Originalfunktionen mit Kleinbuchstaben und die Bildfunktionen mit den entsprechenden Großbuchstaben anzeigen, oder umgekehrt. Für uns ist f eine Originalfunktion und F oder $\mathcal{L}[f]$ die Laplace-Transformation. Eine Ausnahme von dieser Konvention ist die Heaviside-Funktion, die eine Originalfunktion ist und trotzdem mit einem Großbuchstaben bezeichnet wird. Manchmal benutzt man das Doetsch-Symbol $f \circ - - \bullet F$, aber wir werden diese Notation hier nicht verwenden.

Beispiel 8.8.

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} H(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

2. Sei $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt = \int_0^{\infty} e^{(-s+\alpha)t} dt = \frac{1}{s - \alpha}$$

für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$.

3. Sei $f(t) = t^n$, $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^n \stackrel{\tau=st}{=} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \frac{\tau^n}{s^{n+1}} d\tau \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{mit partieller Integration}). \end{aligned}$$

8.1.1 Rechenregeln und Beispiele

Die Rechenregeln der LT und die Rechenregeln der FT sind ähnlich.

1. $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ **Linearität.**

Beispiel 8.9.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin(w_0 t)](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{iw_0 t} - e^{-iw_0 t}}{2i}\right](s) \\ &= \frac{1}{2i} \mathcal{L}[e^{iw_0 t}](s) - \frac{1}{2i} \mathcal{L}[e^{-iw_0 t}](s) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - iw_0} - \frac{1}{s + iw_0} \right) = \frac{w_0}{s^2 + w_0^2}.\end{aligned}$$

2. Ähnlichkeit

Sei $a \in \mathbb{R}^+$ und sei $g(t) = f(at)$. Dann ist

$$\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g](s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt \stackrel{\tau=at}{=} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s\tau}{a}} f(\tau) \frac{1}{a} d\tau \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right).\end{aligned}$$

□

3. Differentiationssatz

Sei f eine Originalfunktion, sodass auch f' eine Originalfunktion ist. Dann ist

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f](s) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t).$$

Falls auch die n -te Ableitung eine Originalfunktion ist, folgt weiterhin

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^n](s) &= s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \\ &\quad - s^{n-2} \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) - \dots - \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n-1)}(t).\end{aligned}$$

Bemerkung 8.10. Abkürzend schreibt man meist

$$\mathcal{L}[f^n](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) \dots - f^{(n-1)}(0)$$

was im Sinne der ausführlichen Formel vorher zu verstehen ist (Achtung dass, die Ableitung selbst muss im Nullpunkt nicht unbedingt existieren!).

Beispiel 8.11.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \sin(\omega t)\right](s) \\ &= \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \sin(\omega t)\right] \\ &= \frac{s}{\omega} \mathcal{L}[\sin(\omega t)] - \sin(\omega t)|_{t=0} \\ &= \frac{s}{\omega} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

4. Multiplikationssatz

Sei f eine Originalfunktion und $g(t) = tf(t)$. Dann ist $\mathcal{L}[g](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s)$ und

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f](s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}[f]$ analytisch auf dem Halbraum $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$, wobei σ_0 der Wachstumskoeffizient von f ist.

Beweis. Unmittelbar durch Differentiation unter dem Integral

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty (-t) e^{-st} f(t) dt \\ &= -\mathcal{L}[tf(t)](s).\end{aligned}$$

□

$$5. \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s).$$

Beweis. Es ist einfach zu sehen, dass $\int_0^t f(\tau) d\tau$ eine Originalfunktion ist, falls f eine ist. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) d\tau = f(t)$, und damit folgt aus Regel 3

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) d\tau\right] \\ &= s \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] + \int_0^0 f(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

□

6. Divisionssatz.

Für jede Originalfunktion f mit $F = \mathcal{L}[f]$ folgt

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(\tau) d\tau$$

für $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, wobei σ_0 der Wachstumskoeffizient von f ist.

Beweis. Wir setzen $g(t) = \frac{1}{t} f(t)$. Nach Regel 4 ist die Funktion $G = \mathcal{L}[g]$ analytisch auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathcal{H}_f = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$. Damit gilt $F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[tg(t)](s) = -G'(s)$, und es folgt weiterhin, dass

$$\int_s^{s_0} F(\tau) d\tau = - \int_s^{s_0} G'(\tau) d\tau = G(s) - G(s_0)$$

im Sinne von Integration längs eines beliebigen Weges in \mathcal{H}_f von s nach s_0 .

Falls $\operatorname{Re} s_0 \rightarrow \infty$, erhalten wir

$$\int_s^{+\infty} F(\tau) d\tau = G(s) = \mathcal{L}[g](s) = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s). \quad \square$$

Oben haben wir die folgende Eigenschaft benutzt: Für die Laplace-Transformation F einer Originalfunktion gilt

$$\lim_{\Re(s) \rightarrow +\infty} F(s) = 0.$$

Wir werden nun erneut zeigen, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

(Dieses Integral wurde bereits mithilfe des Residuensatzes berechnet).

Wie oben schon gesehen ist $\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{1+s^2}$. Nach Regel 6 folgt dann

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\sin t}{t} dt &= \int_s^{\infty} \mathcal{L}[\sin t](\tau) d\tau \\ &= \int_s^{\infty} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau = \frac{\pi}{2} - \arctan s. \end{aligned}$$

Insbesondere für $s \rightarrow 0$ und Integration längs der positiven reellen Achse folgt, wie behauptet $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

7. Verschiebungssatz

Für jedes $a > 0$ gilt:

$$\mathcal{L}[f(t-a)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f](s).$$

(Eine Verschiebung um a im Originalraum entspricht einer Multiplikation mit dem Dämpfungsfaktor e^{-as} im Bildraum).

Beweis. Da $a > 0$ und $f(t) = 0$ für $t < 0$, ist $f(t-a) = 0$ für $0 \leq t < a$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-a)](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt \\ &\stackrel{\tau=t-a}{=} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} e^{-sa} f(\tau) d\tau \\ &= e^{-sa} \mathcal{L}[f](s). \quad \square \end{aligned}$$

8. Dämpfungsregel

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig gilt

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - \alpha).$$

(Eine Verschiebung um α im Bildraum entspricht einer Multiplikation mit dem “Dämpfungsfaktor” $e^{\alpha t}$ im Originalraum).

Beweis.

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t) dt = \mathcal{L}[f](s - \alpha). \quad \square$$

9. Satz über periodische Funktionen

Sei f eine periodische Funktion mit Periode $T > 0$. Dann gilt

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Es ist wichtig zu beachten, dass wir die (auf ganz \mathbb{R}) periodische Funktion mit einer Originalfunktion identifizieren, wie in Bemerkung 8.4.

Beweis. Wir setzen

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann können wir f als

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - kT)$$

darstellen

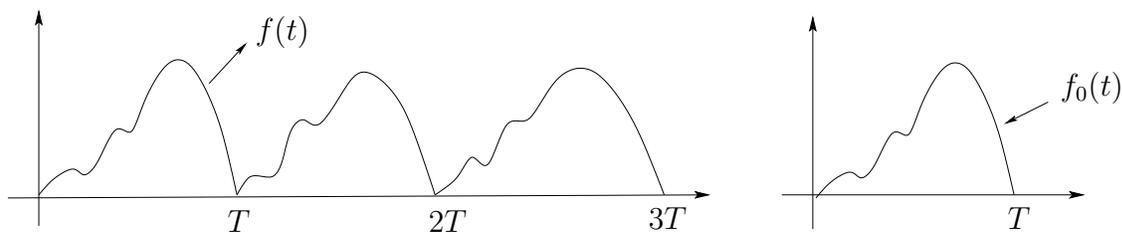


Fig. 8.1

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f](s) &\stackrel{\text{R.1}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}[f_0(t - kT)](s) \\
 &\stackrel{\text{R.7}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} \mathcal{L}[f_0](s) \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \mathcal{L}[f_0](s). \quad \square
 \end{aligned}$$

10. Faltungssatz

Seien f und g Originalfunktionen. Dann ist

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g].$$

Beweis. Wir nehmen zunächst (ohne Beweis) an, dass $f * g$ eine Originalfunktion ist. Dann folgt weiter

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g)(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} f(\tau) \left(\int_{\tau}^{+\infty} e^{-st} g(t - \tau) dt \right) d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} f(\tau) \int_0^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} g(u) du \\
 &= \left(\int_0^{\infty} e^{-st} f(\tau) d\tau \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-su} g(u) du \right) \\
 &= \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s). \quad \square
 \end{aligned}$$

Wie eingangs bereits angemerkt, wollen wir die Laplace-Transformation zur Lösung von komplizierten Problemen wie Funktionalgleichungen (gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen, Integralgleichungen) verwenden. Die Grundidee der Methode wird hier nochmals skizziert:

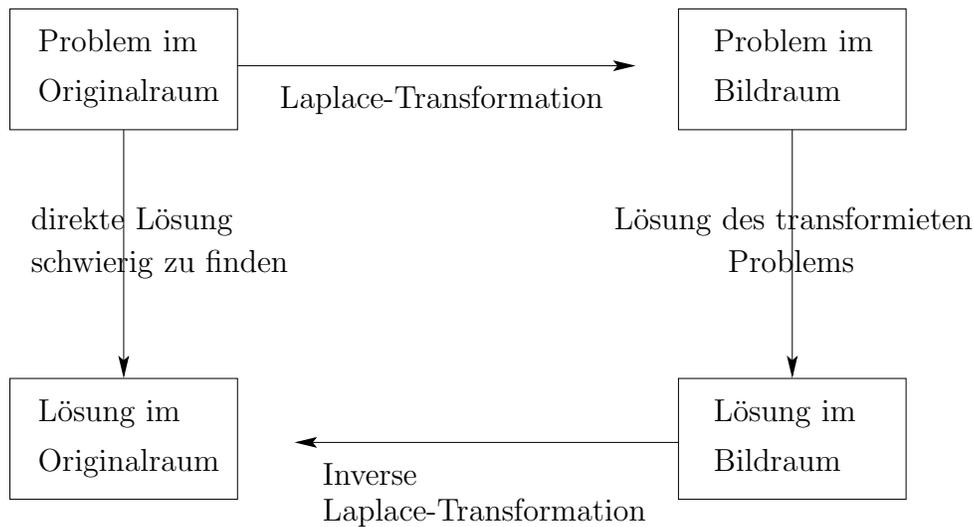


Fig. 8.2

Vorteil: Differentiation im Originalraum entspricht bei der LT der Multiplikation mit s im Bildraum.

Ferner ist die Laplace-Transformation eindeutig:

Satz 8.12. Seien f_1, f_2 zwei Originalfunktionen mit Wachstumskoeffizienten σ_1, σ_2 und sei

$$\mathcal{L}[f_1](s) = \mathcal{L}[f_2](s), \quad \forall \operatorname{Re} s > \max(\sigma_1, \sigma_2).$$

Dann ist $f_1(t) = f_2(t)$ an allen Stellen t , an denen f_1 und f_2 stetig sind.

Definition 8.13. Eine Funktion $f(t)$ heißt die inverse Laplace-Transformation einer Funktion $F(s)$, falls $F(s)$ die Laplace-Transformation von $f(t)$ ist. Wir schreiben dann $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$.

Bemerkung 8.14.

- \mathcal{L}^{-1} ist linear!
- Eine Formel für $\mathcal{L}^{-1}[F]$ unter bestimmten Annahmen über F lässt sich mithilfe der Komplexen Analysis herleiten werden. In den Fällen, in denen die Laplace-Transformation in Anwendungen auftritt, bestimmt man effizienter die inverse Laplace-Transformation einer Funktion durch Zurückführen auf einfachere Funktionen, deren Laplace-Transformierten tabelliert sind.

8.2 Eine Methode zur Bestimmung der inversen Laplace-Transformation

Partialbruchzerlegung

Jede rationale Funktion $\frac{P(t)}{Q(t)}$, wobei $P(t), Q(t)$ Polynome sind und der Grad von $P(t)$ kleiner als der Grad von $Q(t)$ ist, lässt sich als Summe von rationalen Funktionen der Form

$$\frac{1}{(at+b)^r}, \quad \frac{At+B}{(at^2+bt+c)^r},$$

(auch als Partialbrüche bezeichnet) darstellen, wobei $r = 1, 2, \dots$. Falls P und Q reelle Polynome sind, so kann man alle Koeffizienten a, b, c, A, B als reelle Zahlen wählen. Lässt man auch komplexe Koeffizienten zu (notwendig u.a. für komplexe Polynome P und Q), so benötigt man nur Partialbrüche der ersten Form $\frac{1}{(at+b)^r}$.

Durch Berechnung der inversen LT jedes Partialbruchs kann dann $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(t)}{Q(t)}\right)$ bestimmt werden.

Beispiel 8.15.

$$\frac{2t+5}{(3t-4)(2t+1)^3} = \frac{A}{3t-4} + \frac{B}{2t+1} + \frac{C}{(2t+1)^2} + \frac{D}{(2t+1)^3}$$

$$\frac{3t^2-4t+2}{(t^2+2t+4)^2(t-5)} = \frac{At+B}{(t^2+2t+4)^2} + \frac{Ct+B}{t^2+2t+4} + \frac{E}{t-5}.$$

Die Konstanten A, B, C usw. können durch Erweiterung mit dem Hauptnenner und Vergleich der Koeffizienten der entsprechenden t -Potenzen bestimmt werden.

Beispiel 8.16.

$$\boxed{1.} \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 - \alpha^2} \right]$$

$$\frac{s}{s^2 - \alpha^2} = \frac{A}{s - \alpha} + \frac{B}{s + \alpha} = \frac{A(s + \alpha) + B(s - \alpha)}{s^2 - \alpha^2}$$

$$\implies \begin{cases} A + B = 1 \\ \alpha(A - B) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = B \\ 2A = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Daraus folgt:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 - \alpha^2} \right] (t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - \alpha} \right] + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + \alpha} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) = \cosh(\alpha t).$$

$$\boxed{2.} \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 4s + 13} \right]$$

In diesem Fall hat $s^2 + 4s + 13$ keine reellen Nullstellen. Mit der Umformung $s^2 + 4s + 13 = (s + 2)^2 + 3^2$ folgt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 4s + 13} \right] (t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(s + 2)^2 + 3^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s + 2)^2 + 3^2} \right] \stackrel{\text{R.7}}{=} \frac{1}{3} e^{-2t} \sin(3t). \end{aligned}$$

Übung 8.17. Bestimmen Sie die inverse LT von

$$F(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 4}, \quad F(s) = \frac{2s - 3}{(s - 1)^2 + 5}, \quad F(s) = \frac{2s^2 + s + 13}{(s - 1)[(s + 1)^2 + 4]},$$

Wir beschäftigen uns mit einem Paar Anwendungen der Laplace-Transformation:

8.3 Einige Anwendungen der Laplace-Transformation

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel 8.18. Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} f'' + 2f' + f = t e^{-t} + e^t \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0. \end{cases}$$

Lösung:

Wir transformieren die Differentialgleichung. Zuerst die linke Seite:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'' + 2f' + f) &\stackrel{\text{R.1}}{=} \mathcal{L}(f'') + 2\mathcal{L}(f') + \mathcal{L}(f) \\ &\stackrel{\text{R.3}}{=} s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) + 2s\mathcal{L}(f) - 2f(0) + \mathcal{L}(f) \\ &= (s^2 + 2s + 1)\mathcal{L}(f) = (s + 1)^2\mathcal{L}(f). \end{aligned}$$

Dann die rechte Seite:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t e^{-t} + e^t) &\stackrel{\text{R.1}}{=} \mathcal{L}(t e^{-t}) + \mathcal{L}(e^t) \\ &\stackrel{\text{R.4}}{=} -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(e^{-t}) + \mathcal{L}(e^t) \\ &= -\frac{d}{ds} \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s - 1} = \frac{1}{(s + 1)^2} + \frac{1}{(s - 1)}. \end{aligned}$$

Die Gleichsetzung beider Seiten liefert

$$(8.10) \quad \mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{(s + 1)^4} + \frac{1}{(s - 1)(s + 1)^2}.$$

Wir müssen die Funktion f finden, sodass $\mathcal{L}(f) = (*)$. Wir erinnern uns an die Regel 4:

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}(f)(s)$$

und an die Regel 8:

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f)(s - \alpha).$$

Daraus folgt, dass

$$\mathcal{L}\left(e^{-t} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)\right) = \frac{1}{(s + 1)^4} \iff \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s + 1)^4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) e^{-t}.$$

Weiterhin ist

$$\frac{1}{s^4} = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{s}\right)''',$$

und daher

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) = -\frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{1}{s}\right)'''\right) = -\frac{1}{6} (-1)^3 t^3 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{6} t^3.$$

Somit gilt

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^4}\right) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t}.$$

Der zweite Term in (8.10) wird zuerst in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}.$$

Durch eine der zahlreichen Methoden findet man

$$A = -B = \frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{2}.$$

Somit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+1)^2}\right] &= \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2} [e^t - e^{-t}] + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{ds} \left(\frac{1}{s+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} [e^t - e^{-t}] - \frac{1}{2} t e^{-t}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung:

$$f(t) = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{-t} + \frac{1}{4} e^t.$$

Integralgleichungen

Mittels der Laplace-Transformation können wir auch Integralgleichungen lösen. Eine Integralgleichung ist eine Gleichung, in der die unbekannte Funktion unter dem Integral vorkommt.

Beispiel 8.19. Wir wollen die Funktion f finden, für die gilt

$$f(t) = t + \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

Zunächst erkennen wir, dass das Integral die Faltung von f und \sin ist, das heißt:

$$f(t) = t + f * \sin(t).$$

Wir können jetzt die Laplace-Transformation anwenden und wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(s) &= F(s) = \mathcal{L}(t)(s) + \mathcal{L}(f * \sin(t))(s) \\ &= \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}(f)(s) \mathcal{L}(\sin(t))(s) \\ &= \frac{1}{s^2} + F(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1}.\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}F(s) \left(1 - \frac{1}{s^2 + 1}\right) &= \frac{1}{s^2} \\ \implies F(s) &= \frac{s^2 + 1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{6} \frac{d^3}{ds^3} \left(\frac{1}{s}\right) \\ &\stackrel{\text{R.4}}{=} \mathcal{L}[t] + \frac{1}{6} \mathcal{L}[t^3] = \mathcal{L}\left(t + \frac{1}{6} t^3\right) \\ \implies f(t) &= t + \frac{1}{6} t^3. \square\end{aligned}$$

Systeme von Differentialgleichungen

Beispiel 8.20. (Gekoppelte Pendel)

Wir betrachten zwei identische Pendel der Länge ℓ und mit Masse m . Wir nehmen an, dass die Pendel durch eine Feder mit Federkonstante k gekoppelt sind. Unter der Annahme, dass die Winkel σ_1 und σ_2 klein sind, suchen wir die Auslenkungen α_1 und α_2

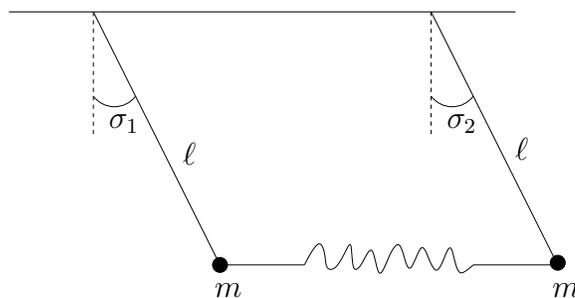


Fig. 8.3

Die Bewegungsgleichungen sind

$$\begin{aligned}m(\ell \sin \sigma_1)'' &= -mg \sin \sigma_1 + k\ell(\sin \sigma_2 - \sin \sigma_1) \\ m(\ell \sin \sigma_2)'' &= -mg \sin \sigma_2 + k\ell(\sin \sigma_1 - \sin \sigma_2),\end{aligned}$$

wobei “ ma ” die Kraft nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist, und $-mg \sin \sigma$ ist die rücktreibende Kraft (der Anteil der Schwerkraft tangential zur Bahn der

Pendelmassen) und der dritte Term $\pm k\ell(\sin \sigma_2 - \sin \sigma_1)$ beschreibt die Kopplung der Pendel (die Federkraft nach dem Hook'schen Gesetz).

Falls σ_1 und σ_2 klein sind, können wir $\sin \sigma_1$ näherungsweise durch σ_1 und $\sin \sigma_2$ durch σ_2 ersetzen, und wir erhalten dadurch das lineare System

$$\begin{aligned} m\ell \ddot{\sigma}_1 &= -mg \sigma_1 + k\ell(\sigma_2 - \sigma_1) \\ m\ell \ddot{\sigma}_2 &= -mg \sigma_2 + k\ell(\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{cases} \ddot{\sigma}_1 = -\frac{g}{\ell} \sigma_1 + \frac{k}{m} (\sigma_2 - \sigma_1) \\ \ddot{\sigma}_2 = -\frac{g}{\ell} \sigma_2 + \frac{k}{m} (\sigma_1 - \sigma_2). \end{cases}$$

Die Abkürzungen $\frac{g}{\ell} = \omega^2$ und $\frac{k}{m} = \alpha^2$ liefern

$$\begin{cases} \ddot{\sigma}_1 = -\omega^2 \sigma_1 + \alpha^2 (\sigma_2 - \sigma_1) \\ \ddot{\sigma}_2 = -\omega^2 \sigma_2 + \alpha^2 (\sigma_1 - \sigma_2). \end{cases}$$

Jetzt wenden wir die Laplace-Transformation an, um das System von zwei Differentialgleichungen auf ein System von algebraischen Gleichungen zu transformieren. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} s^2 \theta_1(s) - s \sigma_1(0) - \sigma_1'(0) &= \omega^2 \theta_1(s) + \alpha^2 (\theta_2 - \theta_1) \\ s^2 \theta_2(s) - s \sigma_2(0) - \sigma_2'(0) &= \omega^2 \theta_2(s) + \alpha^2 (\theta_1 - \theta_2), \end{aligned}$$

wobei $\theta_i = \mathcal{L}(\sigma_i)$.

Für $t = 0$ wählen wir die Anfangsbedingungen $\sigma_1(0) = A$, $\sigma_1'(0) = \sigma_2(0) = \sigma_2'(0) = 0$ (d.h. das erste Pendel ist ausgelenkt, das zweite nicht, und beide bekommen keinen Anfangsimpuls). Wir werden weiterhin erhalten

$$\begin{cases} (s^2 + \alpha^2 - \omega^2) \theta_1 - \alpha^2 \theta_2 = sA \\ (s^2 + \alpha^2 - \omega^2) \theta_2 - \alpha^2 \theta_1 = 0. \end{cases}$$

Wir lösen dieses System nach θ_1 und θ_2 auf. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{s(s^2 + \omega^2 + \alpha^2)A}{(s^2 + \omega^2 + \alpha^2)^2 - \alpha^4} = \frac{s(s^2 + \omega^2 + \alpha^2)A}{(s^2 + \omega^2 + \alpha^2 - \alpha^2)(s^2 + \omega^2 + 2\alpha^2)} \\ &= \frac{s}{2} \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{s^2 + \omega^2 + 2\alpha^2} \right) A \end{aligned}$$

$$\theta_2 = \frac{s \alpha^2 A}{(s^2 + \omega^2 + \alpha^2)^2 - \alpha^4} = \frac{s}{2} \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} - \frac{1}{s^2 + \omega^2 + 2\alpha^2} \right) A.$$

Für die Rücktransformation zu σ_1 und σ_2 stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{A}{2} \left[\mathcal{L}(\cos(\omega t)) + \mathcal{L}(\cos(\sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2} t)) \right] \\ \theta_2 &= \frac{A}{2} \left[\mathcal{L}(\cos(\omega t)) - \mathcal{L}(\cos(\sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2} t)) \right],\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{A}{2} \left(\cos(\omega t) + \cos(\sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2} t) \right) \\ \sigma_2 &= \frac{A}{2} \left(\cos(\omega t) - \cos(\sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2} t) \right).\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung können wir nun noch die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} [-\cos(x + y) + \cos(x - y)]\end{aligned}$$

anwenden, und wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= A \cos\left(\frac{\alpha^2}{2\lambda} t\right) \cos(\lambda t) \\ \sigma_2(t) &= A \sin\left(\frac{\alpha^2}{2\lambda} t\right) \sin(\lambda t),\end{aligned}$$

wobei wir $\lambda = \frac{1}{2}(\omega + \sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2})$ gesetzt haben.

Es ist offensichtlich, dass ein Energieaustausch zwischen den Pendeln stattfindet: wenn das erste Pendel maximal ausschlägt, ist der Ausschlag des zweiten minimal und umgekehrt. \square

Die Grundlegenden Eigenschaften und einige Beispiele der Laplace-Transformation werden in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad s > a$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \quad s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$\underbrace{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau}_{\text{Faltung}}$	$F(s)G(s)$

A Prüfungen

A.1 Prüfung Winter 2014

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)

Ermitteln Sie mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, in welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ die Funktionen

$$g(z) = g(x + iy) = y^3 - ix^3 + 3(x^2y - icy^2)$$

und

$$f(z) = \sin(z^2)$$

komplex differenzierbar sind.

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie Lage und Typ aller isolierten Singularitäten von

$$f(z) = \frac{1}{(z-1) \cot\left(\frac{\pi}{z}\right)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\tan^2(z)}{z^3} dz,$$

wobei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ der Rand des Einheitskreises ist.

Aufgabe 3 (ca. 10 Punkte)

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(t) = \frac{1}{(t^2 + i)}.$$

Aufgabe 4 (2+5+2 Punkte)

Sei f_p die ungerade periodische Fortsetzung der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 2], \\ -2t + 6, & t \in [2, 3]. \end{cases}$$

- Skizzieren Sie f_p und bestimmen Sie die Fundamentalperiode.
- Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f_p .
- Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{2}{3}\pi n\right).$$

Aufgabe 5 (ca. 10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems

$$\ddot{x}(t) + 9x(t) = t^2, \quad t > 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

mittels der Laplacetransformation.

A.2 Lösung Prüfung Winter 2014

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)

Ermitteln Sie mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, in welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ die Funktionen

$$g(z) = g(x + iy) = y^3 - ix^3 + 3(x^2y - ixy^2)$$

und

$$f(z) = \sin(z^2)$$

komplex differenzierbar sind.

Lösung 1

- $g(z) = g(x + iy) = y^3 - ix^3 + 3(x^2y - ixy^2)$:

$$g(z) = \underbrace{y^3 + 3x^2y}_{u(x,y)} + i \underbrace{(-x^3 - 3xy^2)}_{v(x,y)}$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} u_x &= 6xy & v_x &= -3x^2 - 3y^2 \\ u_y &= 3y^2 + 3x^2 & v_y &= -6xy \end{aligned}$$

CR-DGL:

$$\begin{aligned} u_x = v_y &\Rightarrow 6xy = -6xy \Rightarrow \text{holds for } xy = 0 \\ u_y = -v_x &\Rightarrow \text{holds for all } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Die Funktion $g(z)$ ist also auf der **reellen Achse und der komplexen Achse** komplex differenzierbar.

- $f(z) = f(x + iy) = \sin((x + iy)^2)$:

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= \sin(x^2 - y^2 + 2ixy) \stackrel{!}{=} u(x, y) + iv(x, y) \\ &= \frac{1}{2i} [\exp(i(x^2 - y^2) - 2xy) - \exp(-i(x^2 - y^2) + 2xy)] \\ &= \frac{1}{2i} [e^{-2xy} (\cos(x^2 - y^2) + i \sin(x^2 - y^2)) - e^{2xy} (\cos(x^2 - y^2) - i \sin(x^2 - y^2))] \\ &= \frac{1}{2i} [\cos(x^2 - y^2) (e^{-2xy} - e^{2xy}) + i \sin(x^2 - y^2) (e^{-2xy} + e^{2xy})] \\ &= \left[i \cos(x^2 - y^2) \frac{e^{2xy} - e^{-2xy}}{2} + \sin(x^2 - y^2) \frac{e^{-2xy} + e^{2xy}}{2} \right] \\ &= \underbrace{\sin(x^2 - y^2) \cosh(2xy)}_{u(x,y)} + i \underbrace{\cos(x^2 - y^2) \sinh(2xy)}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} u_x &= 2x \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy) + 2y \sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy) \\ u_y &= -2y \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy) + 2x \sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy) \\ v_x &= -2x \sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy) + 2y \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy) \\ v_y &= 2y \sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy) + 2x \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy) \end{aligned}$$

CR-DGL:

$$\begin{aligned} u_x = v_y &\Rightarrow \text{holds for all } z \in \mathbb{C} \\ u_y = -v_x &\Rightarrow \text{holds for all } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Da die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten, ist $f(z)$ **auf ganz \mathbb{C} komplex differenzierbar** ist.

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie Lage und Typ aller isolierten Singularitäten von

$$f(z) = \frac{1}{(z-1) \cot\left(\frac{\pi}{z}\right)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{\Gamma} \frac{\tan^2(z)}{z^3} dz,$$

wobei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ der Rand des Einheitskreises ist.

Lösung 2

a) $f(z) = \frac{1}{(z-1) \cot\left(\frac{\pi}{z}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{z}\right)}{z-1}$

Mögliche Problemstellen: $z = 1$, $z = 0$, Singularitäten von $\tan\left(\frac{\pi}{z}\right)$

i) Für $z_0 = 1$ gilt $\tan\left(\frac{\pi}{z}\right) = -\pi(z-1) + \mathcal{O}((z-1)^3)$.

$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = -\pi$ und die Singularität ist **hebbar**.

ii) Für $z_1 = 0$ ist die Singularität nicht isoliert! (Die Bezeichnung wesentliche Singularität wird für isolierte Singularitäten gebraucht; hier sollte sie nicht verwendet werden.)

iii) Weitere Singularitäten von $\tan(z)$ treten bei $z'_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, 1, \dots$ auf.

Sie sind **Pole**, da $\lim_{z \rightarrow z'_k} \tan(z) = \infty$.

Die **Ordnung ist 1**, da $\tan(z) = \frac{-1}{z-z'_k} + \mathcal{O}((z-z'_k)^1)$,

Also sind $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{z} = \frac{\pi}{2} + k\pi\} = \left\{\frac{2}{1+2k} : k = 0, 1, \dots, k < \infty\right\}$ einfache Pole von $f(z)$.

b) Wir betrachten alle Singularitäten des Integranden innerhalb des Einheitskreises. Die Singularitäten vom Tangens liegen bei $\frac{\pi}{2} + k\pi$, welche $\forall k$ ausserhalb des Einheitskreises liegen. Es bleibt also noch $z_0 = 0$. Hier besitzt der Tangens die Darstellung $\tan(z) = z + \mathcal{O}(z^3)$, also $\tan^2(z) = z^2 + \mathcal{O}(z^4)$ um z_0 . Im Nenner bleibt also noch ein z ; wir haben einen **Pol der Ordnung 1**.

Wir berechnen nun das Residuum:

$$\operatorname{res} \left(\frac{\tan^2(z)}{z^3} \Big|_0 \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\tan^2(z)}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot (z^2 + \mathcal{O}(z^4))}{z^3} = 1$$

Gemäss dem Residuensatz ist das Integral also

$$I = 2\pi i.$$

Aufgabe 3 (ca. 10 Punkte)

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + i}.$$

Lösung 3 Wir verwenden Residuenkalkül um dieses Integral zu berechnen:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + i)} e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - i^{\frac{3}{2}})(t + i^{\frac{3}{2}})} e^{-iwt} dt.$$

Wir betrachten den komplexen Integrand $\frac{1}{(z^2+i)}e^{-iwz}$ und unterscheiden zwei Fälle: $w \leq 0$ und $w \geq 0$:

(i) $w \leq 0$:

$|e^{-iwz}| = |e^{-iw(x+iy)}| = e^{wy} \leq 1 \Leftrightarrow y \geq 0$, wir beschränken uns auf die obere Halbebene $\mathbb{H}_O = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$ und integrieren über den Rand des Halbkreises $B_0(r) \cap \mathbb{H}_O$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_0(r) \cap \mathbb{H}_O} \frac{1}{(z^2 + i)} e^{-iwz} dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + i)} e^{-iwt} dt = \hat{f}(w) \\ &= 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}_O} \text{res} \left(\frac{e^{-iwz}}{(z - i^{\frac{3}{2}})(z + i^{\frac{3}{2}})} \Big| a \right) \end{aligned}$$

wobei das Integral über den Kreisbogen für $r \rightarrow \infty$ verschwindet. $a = i^{\frac{3}{2}}$ ist die einzige Singularität in der oberen Halbebene, also bekommen wir für $w \leq 0$:

$$\hat{f}(w) = \frac{2\pi i}{2i^{\frac{3}{2}}} e^{-iwi^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{i}} e^{\sqrt{i}w}, \quad (w \leq 0)$$

(ii) $w \geq 0$:

$|e^{-iwz}| = |e^{-iw(x+iy)}| = e^{wy} \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 0$, wir beschränken uns auf die untere Halbebene $\mathbb{H}_U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \leq 0\}$ und integrieren über den Rand des Halbkreises $B_0(r) \cap \mathbb{H}_U$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_0(r) \cap \mathbb{H}_U} \frac{1}{(z^2 + i)} e^{-iwz} dz = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{(t^2 + i)} e^{-iwt} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + i)} e^{-iwt} dt = -\hat{f}(w)$$

wobei das Integral über den Kreisbogen für $r \rightarrow \infty$ verschwindet und aufgrund der Integrationsrichtung die Grenzen noch getauscht werden müssen. Es folgt

$$\hat{f}(w) = -2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}_U} \text{res} \left(\frac{e^{-iwz}}{(z - i^{\frac{3}{2}})(z + i^{\frac{3}{2}})} \Big| a \right)$$

und mit $a = -i^{\frac{3}{2}}$ als einzige Singularität in der unteren Halbebene:

$$\text{res} \left(\cdot \Big| -i^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{e^{-iw(-i^{\frac{3}{2}})}}{-2i^{\frac{3}{2}}}$$

und deshalb:

$$\hat{f}(w) = \frac{-2\pi i}{-2i^{\frac{3}{2}}} e^{i^{\frac{5}{2}}w} = \frac{\pi}{\sqrt{i}} e^{-\sqrt{i}w}, \quad (w \geq 0)$$

Nun können wir beide Fälle zusammensetzen und bekommen für $w \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(w) = \frac{\pi}{\sqrt{i}} e^{-\sqrt{i}|w|}$$

Aufgabe 4 (2+5+2 Punkte)

Sei f_p die ungerade periodische Fortsetzung der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 2], \\ -2t + 6, & t \in [2, 3]. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie f_p und bestimmen Sie die Fundamentalperiode.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f_p .

c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{2}{3}\pi n\right).$$

Lösung 4

a) Die Fundamentalperiode ist $T = 6$.

b) Die Funktion ist ungerade, also sind alle Kosinusterme $a_k \equiv 0$. Es bleiben die b_k zu bestimmen:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f_p(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \frac{4}{6} \int_0^3 f_p(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \\ &= \frac{2}{3} \left[\underbrace{\int_0^2 t \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt}_I + \underbrace{\int_2^3 (6-2t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt}_II \right] \end{aligned}$$

$$I = \frac{-6}{\pi k} \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + \frac{9}{(\pi k)^2} \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$$

$$II = \frac{6}{\pi k} \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + \frac{18}{(\pi k)^2} \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$$

woraus folgt

$$b_k = \frac{18}{(\pi k)^2} \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right),$$

also ist die Fourierreihe

$$f_p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{18}{(\pi k)^2} \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi kt}{6}\right).$$

c) mit $t = 2$ in der Fourierreihe ergibt sich $f_p(2) = 2 = \frac{18}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin^2\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$,
also ist der Wert der Reihe $\frac{\pi^2}{9}$.

Aufgabe 5 (ca. 10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems

$$\ddot{x}(t) + 9x(t) = t^2, \quad t > 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

mittels der Laplacetransformation.

Lösung 5 Die Laplacetransformierte von $x(t)$ sei $X(s)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} s^2 X(s) - sx(0^+) - \dot{x}(0^+) + 9X(s) &= \frac{2}{s^3} \\ \Leftrightarrow X(s)(s^2 + 9) &= \frac{2 + s^4}{s^3} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{2 + s^4}{s^3(s^2 + 9)} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung!

$$X(s) = \frac{-2}{81s} + \frac{2}{9s^3} + \frac{83s}{81(s^2 + 9)}$$

Inverse Transformation ergibt

$$x(t) = \frac{-2}{81} + \frac{2}{9}t^2 + \frac{83}{81} \cos(3t).$$

A.3 Prüfung Sommer 2014

Aufgabe 1 (10 Punkte) Sei die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch

$$f_1(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 16)^2}.$$

Berechnen Sie die Fourier-Transformation $\widehat{f}_1(\omega)$ von $f_1(x)$ mit Techniken der Vorlesung.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Sei $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ die gerade 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

$$\tilde{f}_2(x) = x - \pi/2, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

- Skizzieren Sie eine Periode der Funktion $f_2(x)$.
- Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f_2 .
- Berechnen Sie die folgende Summe

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

indem Sie die Parsevalsche Gleichung benutzen:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2^2(x) dx.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Seien die Funktionen g und h wie folgt gegeben:

$$g(z) = \frac{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)}{(z-1)} \qquad h(z) = \frac{(z-1)}{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)}.$$

Bestimmen Sie Lage und Typ aller isolierten Singularitäten von g und h . Berechnen Sie, wenn es möglich ist, die Residuen von g und h an den isolierten Singularitäten.

b) Sei $m \in \mathbb{Z}$ und

$$f_m(z) = \frac{\sin(z)}{(z-\pi)^m}.$$

i) Bestimmen Sie Lage und Typ aller isolierten Singularitäten von f_m , in Abhängigkeit des Parameters m .

Hinweis: Es gilt $\sin(z-\pi) = -\sin(z)$.

ii) Berechnen Sie

$$\int_{\partial B(0,3\pi)} f_m(z) \, dz$$

mit $m \in \mathbb{Z}$, wobei $\partial B(0,3\pi) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\pi\}$ mit mathematisch positiver Orientierung.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung $y : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 9e^{2t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

mittels der Laplacetransformation.

A.4 Lösung Prüfung Sommer 2014

Aufgabe 1 (10 Punkte) Sei die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch

$$f_1(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 16)^2}.$$

Berechnen Sie die Fourier-Transformation $\widehat{f}_1(\omega)$ von $f_1(x)$ mit Techniken der Vorlesung.

Lösung Die Fourier-Transformation ist definiert durch

$$\widehat{f}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 16)^2} e^{-i\omega x} dx.$$

In der Vorlesung wurde folgendes gezeigt: für eine Funktion $f(x)$ für die das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{i\alpha x} dx$$

existiert, gilt

$$(A.11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{i\alpha x} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{\text{Im} z_i > 0} \text{res}(f(z) e^{i\alpha z} | z_i) & \alpha \geq 0 \\ -2\pi i \sum_{\text{Im} z_i < 0} \text{res}(f(z) e^{i\alpha z} | z_i) & \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

Wir bestimmen also als erstes die Singularitäten von f_1 :

$$f_1(z) = \frac{z^2}{((z - 4i)(z + 4i))^2} = \frac{z^2}{(z - 4i)^2(z + 4i)^2}.$$

$z_1 = 4i$ und $z_2 = -4i$ sind also beides Pole zweiter Ordnung. Für die Residuen verwenden wir die Formel für ein Pol der Ordnung n :

$$\text{res}(f(z) | z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)],$$

woraus folgt

$$z_1 = 4i:$$

$$\begin{aligned} \text{res}(f(z) e^{-i\omega z} | z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2 e^{-i\omega z}}{(z + 4i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{2z - i\omega z^2}{(z + 4i)^2} + \frac{-2z^2}{(z + 4i)^3} \right) e^{-i\omega z} \\ &= \left(\frac{8i - i\omega(4i)^2}{(8i)^2} - \frac{2(4i)^2}{(8i)^3} \right) e^{4\omega} = \underline{\underline{\frac{-i}{16}(4\omega + 1)e^{4\omega}}} \end{aligned}$$

$$z_2 = -4i:$$

$$\begin{aligned} \text{res}(f(z) e^{-i\omega z} | z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2 e^{-i\omega z}}{(z - 4i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow z_2} \left(\frac{2z - i\omega z^2}{(z - 4i)^2} + \frac{-2z^2}{(z - 4i)^3} \right) e^{-i\omega z} \\ &= \left(\frac{-8i - i\omega(-4i)^2}{(-8i)^2} - \frac{2(-4i)^2}{(-8i)^3} \right) e^{-4\omega} = \underline{\underline{\frac{-i}{16}(4\omega - 1)e^{-4\omega}}} \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch die Fallunterscheidung in (A.11) beachten: für $\omega > 0$ haben wir $\alpha < 0$, also nehmen wir die Singularität z_2 , für $\omega < 0$ also z_1 . Daraus folgt

$$\widehat{f}_1(\omega) = \frac{2\pi}{16} \begin{cases} (1 + 4\omega)e^{4\omega} & \omega \leq 0 \\ (1 - 4\omega)e^{-4\omega} & \omega \geq 0 \end{cases} = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}(1 - 4|\omega|)e^{-4|\omega|}}}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte) Sei $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ die gerade 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

$$\tilde{f}_2(x) = x - \pi/2, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

- Skizzieren Sie eine Periode der Funktion $f_2(x)$.
- Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f_2 .
- Berechnen Sie die folgende Summe

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

indem Sie die Parsevalsche Gleichung benutzen:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2^2(x) dx.$$

Lösungen

- Siehe Abbildung 1 für eine Möglichkeit.

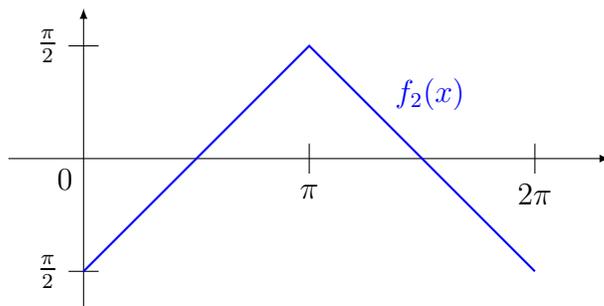


Abbildung 1: Eine Periode der Funktion $f_2(x)$.

- Mit der Definition von der Vorlesung haben wir:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x) \cos(kx) dx, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x) \sin(kx) dx, \quad k > 0,$$

wobei die Integrale natürlich über ein beliebiges Intervall der Länge 2π gehen können.

Die Funktion hat Mittelwert 0, also haben wir $a_0 = 0$. Die Funktion ist gerade (gemäss Konstruktion in der Aufgabenstellung), also gilt $b_k = 0$ für $k = 1, \dots$. Es bleibt noch, a_k für $k > 0$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x) \cos(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi f_2(x) \cos(kx) \, dx + \int_\pi^{2\pi} f_2(x) \cos(kx) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi (x - \pi/2) \cos(kx) \, dx + \int_\pi^{2\pi} (3\pi/2 - x) \cos(kx) \, dx \right). \end{aligned}$$

Wir berechnen zur Hilfe

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(kx) \, dx &= \frac{1}{k} (\sin(bk) - \sin(ak)) \\ \int_a^b x \cos(kx) \, dx &= \frac{b}{k} \sin(kb) - \frac{a}{k} \sin(ka) + \frac{1}{k^2} (\cos(kb) - \cos(ka)), \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k^2} (\cos(k\pi) - 1) - \frac{1}{k^2} (\cos(2k\pi) - \cos(k\pi)) \right) \\ &= \frac{1}{\pi k^2} (2 \cos(k\pi) - \cos(2k\pi)) = \frac{2(-1)^k - 2}{\pi k^2} \\ &= \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{-4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade} \end{cases}. \end{aligned}$$

Die reelle Fourierreihe ist demnach

$$\underline{\underline{f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k - 2}{\pi k^2} \cos(kx).}}$$

c) In diesem Fall ist die Parsevalsche Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{2n+1}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{-4}{\pi(2n+1)^2} \right|^2 \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2^2(x) \, dx. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_2^2(x) \, dx &= \int_0^\pi (x - \pi/2)^2 \, dx + \int_\pi^{2\pi} (3\pi/2 - x)^2 \, dx \\ &= \int_0^\pi x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} \, dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{9\pi^2}{4} - 3\pi x + x^2 \, dx \\ &= \frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi^3}{12} = \frac{\pi^3}{6}, \end{aligned}$$

folgt für die gesuchte Summe den Wert

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Seien die Funktionen g und h wie folgt gegeben:

$$g(z) = \frac{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)}{(z-1)} \qquad h(z) = \frac{(z-1)}{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)}.$$

Bestimmen Sie Lage und Typ aller isolierten Singularitäten von g und h . Berechnen Sie, wenn es möglich ist, die Residuen von g und h an den isolierten Singularitäten.

b) Sei $m \in \mathbb{Z}$ und

$$f_m(z) = \frac{\sin(z)}{(z-\pi)^m}.$$

i) Bestimmen Sie Lage und Typ aller isolierten Singularitäten von f_m , in Abhängigkeit des Parameters m .

Hinweis: Es gilt $\sin(z-\pi) = -\sin(z)$.

ii) Berechnen Sie

$$\int_{\partial B(0,3\pi)} f_m(z) dz$$

mit $m \in \mathbb{Z}$, wobei $\partial B(0,3\pi) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\pi\}$ mit mathematisch positiver Orientierung.

Lösungen

a) Für $g(z)$: In Frage kommen Singularitäten von Zähler und Nenner sowie Nullstellen des Nenners. Es ist also $z = 1$ die einzige mögliche Singularität. Mit

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

folgt

$$\begin{aligned} \sin((z-1)^{-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-1)^{-(2k+1)}}{(2k+1)!}, \\ \text{(A.12)} \quad g(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-1)^{-(2k+2)}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

$z = 1$ ist also eine *wesentliche* Singularität. Da es keinen nichttrivialen Term mit Exponent -1 in der Summe (A.12) gibt, ist das Residuum 0.

Für $h(z)$: In Frage kommen Singularitäten von Zähler und Nenner sowie Nullstellen des Nenners. Die sind also $z = 1$ und $\{z \in \mathbb{C} : \sin(1/(z-1)) = 0\}$. $z = 1$ ist keine isolierte Singularität, da es in jeder beliebig kleiner Umgebung

\mathcal{U} um 1 unendlich viele $z \in \mathcal{U}$ gibt, für die $\sin(\frac{1}{z-1}) = 0$ gilt. Für die anderen gilt:

$$\frac{1}{z_k - 1} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad z_k = \frac{1}{k\pi} + 1.$$

Zur Charakterisierung erinnern wir uns an die folgende Aussage von der Vorlesung:

Spezialfall von Pole 1. Ordnung. Sei $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$ und z_0 eine Singularität von f mit $b(z) = 0$, $b'(z_0) \neq 0$ und $a(z_0) \neq 0$. Dann ist z_0 ein *einfacher Pol* von f und das Residuum ist

$$\text{res}(f|z_0) = \frac{a(z_0)}{b'(z_0)}.$$

Wir überprüfen die Bedingungen:

- Zähler: $z_k - 1 = \frac{1}{k\pi} \neq 0$ ($k \neq 0$)
- Nenner: $\sin(1/(z_k - 1)) = 0$
- Ableitung vom Nenner (für $k \neq 0$):

$$\left. \frac{d}{dz} \sin(1/(z - 1)) \right|_{z=z_k} = \frac{-1}{(z_k - 1)^2} \cos(1/(z_k - 1)) = \frac{(-1)^{k+1}}{(z_k - 1)^2} = (-1)^{k+1} (k\pi)^2 \neq 0.$$

Es sind alle Bedingungen erfüllt, also sind alle $z_k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ Pole erster Ordnung. Für die Residuen erhalten wir

$$\text{res}(h|z_k) = \frac{z_k - 1}{\left. \frac{d}{dz} \sin(1/(z - 1)) \right|_{z=z_k}} = \frac{\frac{1}{k\pi}}{(-1)^{k+1} (k\pi)^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k\pi)^3}.$$

- b) i) In Frage kommen wiederum Singularitäten von Zähler und Nenner sowie Nullstellen des Nenners. Da $\sin(z)$ und $(z - \pi)^m$ analytisch sind, bleibt nur noch die m -fache Nullstelle $z_0 = \pi$.

In diesem Fall bietet es sich an, die Potenzreihendarstellung von $\sin(z)$ um $z_0 = \pi$ anzuschauen. Für $\sin(z)$ um 0 haben wir die bekannte Reihe

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Da $\sin(z - \pi) = -\sin(z)$ erhalten wir um $z_0 = \pi$:

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (z - \pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Nun haben wir für f_m die auf $\mathbb{C} \setminus \{\pi\}$ konvergente Laurentreihe

$$f_m(z) = \frac{\sin(z)}{(z - \pi)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (z - \pi)^{2k+1-m}}{(2k+1)!}.$$

Die Funktion f_m ist offensichtlich analytisch für $m \leq 1$, da dann für alle k alle Exponenten von $(z - \pi)$ nichtnegativ sind. Demnach ist $z_0 = \pi$ in diesem Fall eine **hebbare Singularität**.

Sobald $m \geq 2$ kann es negative Exponenten geben; der negativste (für $k = 0$) ist $1 - m$, also haben wir für $m \geq 2$ **Pole der Ordnung** $m - 1$.

- ii) Da die Singularität $z_0 = \pi$ im Integrationsgebiet liegt, verwenden wir den Residuensatz um das Integral zu berechnen. Das Residuum ist definiert als der Koeffizient vom $(z - z_0)^{-1}$ -Term der Laurent-Reihe; in diesem Fall bekommen wir mit $2k + 1 - m = -1$ nur für gerade m einen Koeffizienten der nicht 0 ist. Für gerade m haben wir mit $k^* = -1 + m/2$ dann

$$\operatorname{res}(f_m|z_0) = \begin{cases} \frac{(-1)^{m/2}}{(m-1)!} & m \text{ gerade} \\ 0 & m \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Das Integral lässt sich jetzt für alle $m \in \mathbb{Z}$ leicht berechnen:

$$\int_{\partial B(0,3\pi)} f_m(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}(f_m|z_0) = \begin{cases} \frac{2\pi i (-1)^{m/2}}{(m-1)!} & m \geq 2 \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung $y : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 9e^{2t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

mittels der Laplacetransformation.

Lösungen Wir beginnen mit den Vorwärtstransformationen der einzelnen Terme:

$$\begin{aligned} y''(t) &\rightarrow s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \\ y'(t) &\rightarrow sY(s) - y(0) \\ y(t) &\rightarrow Y(s) \\ 9e^{2t} &\rightarrow \frac{9}{s-2}. \end{aligned}$$

Dies ergibt dann die Gleichung

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) &= \frac{9}{s-2} \\ Y(s)(s^2 + 2s + 1) - \underbrace{y(0)}_0 (s+2) - \underbrace{y'(0)}_1 &= \frac{9}{s-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(s)(s+1)^2 &= \frac{9}{s-2} + 1 \\ Y(s) &= \frac{9}{(s-2)(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2} \\ &= \frac{s+7}{(s-2)(s+1)^2}. \end{aligned}$$

Erster Lösungsvorschlag: Wir machen eine Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{s+7}{(s-2)(s+1)^2} &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} \\ &= \frac{A(s+1)^2 + B(s-2)(s+1) + C(s-2)}{(s-2)(s+1)^2} \\ &= \frac{s^2(A+B) + s(2A-B+C) + (A-2B-2C)}{(s-2)(s+1)^2} \end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} A + B + 0 &= 0 \\ 2A - B + C &= 1 \\ A - 2B - 2C &= 7 \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} A + B + 0 &= 0 \\ 5A - 4B + 0 &= 9 \\ A - 2B - 2C &= 7 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 9A + 0 + 0 &= 9 \\ 5A - 4B + 0 &= 9 \\ A - 2B - 2C &= 7 \end{aligned}$$

Es folgt also $A = 1$, $B = -1$, $C = -2$, und wir bekommen

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}.$$

Rücktransformation der drei Terme ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-2} &\rightarrow e^{2t}H(t) \\ \frac{1}{s+1} &\rightarrow e^{-t}H(t) \\ \frac{1}{(s+1)^2} &\rightarrow te^{-t}H(t), \end{aligned}$$

wobei $H(t) = \chi(t \geq 0)$ die Heaviside Funktion ist. Es folgt also

$$y(t) = e^{2t} - e^{-t} - 2te^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Zweiter Lösungsvorschlag: Wir betrachten

$$Y(s) = \frac{9}{(s-2)(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

und bemerken, dass der erste Term ein Produkt enthält – dies führt zu einer Faltung; der zweite lässt sich leicht rücktransformieren. Wir haben $Y(s) = 9A(s)B(s) + B(s)$ mit:

$$\begin{aligned} A(s) &:= \frac{1}{s-2} \rightarrow a(t) := e^{2t}H(t) \\ B(s) &:= \frac{1}{(s+1)^2} \rightarrow b(t) := te^{-t}H(t) \\ A(s)B(s) &\rightarrow (a \star b)(t), \end{aligned}$$

wobei $H(t) = \chi(t \geq 0)$ die Heaviside Funktion ist. Für die Faltung haben wir dann

$$\begin{aligned}
 (a \star b)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t - \tau) \, d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\tau} H(\tau)(t - \tau)e^{-(t-\tau)} H(t - \tau) \, d\tau \\
 &= e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{3\tau}(t - \tau)\chi(0 \leq \tau \leq t) \, d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{3\tau}(t - \tau) \, d\tau \\
 &= e^{-t} \left(\frac{1}{3} \left[e^{3\tau}(t - \tau) \right]_0^t + \frac{1}{3} \int_0^t e^{3\tau} \, d\tau \right) = e^{-t} \left(-\frac{1}{3}t + \left[\frac{1}{9}e^{3\tau} \right]_0^t \right) \\
 &= e^{-t} \left(-\frac{1}{3}t + \frac{1}{9}(e^{3t} - 1) \right).
 \end{aligned}$$

Alles zusammen erhalten wir für die Lösung dann

$$y(t) = -2te^{-t} + e^{2t} - e^{-t} \quad (t \geq 0).$$

Literatur

- [B] Ch. Blatter, Skript : *Komplexe Analysis, Fourier- und Laplace-Transformation und Analysis*.
- [D] F . Da Lio, Skript : *Mathematik III* ;
<http://www.math.ethz.ch/u/fdalio/teaching> .
- [F] G. Felder, Skript : *Analysis III*
<http://www.math.ethz.ch/u/felder/Teaching/PDG> .
- [H] N. Hungerbühler, *Einführung in partielle Differentialgleichungen (für Ingenieure, Chemiker und Naturwissenschaftler)*, vdf Hochschulverlag, 1997.
- [K] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Analysis*, Wiley 1999 .
- [P] L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 2, Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium .
- [S] D. Salamon, Skript: *Funktionentheorie* ,
<http://www.math.ethz.ch/salamond/PREPRINTS/cxana.pdf> .