Inhaltsverzeichnis

Kapitel 5

Partielle Differentialgleichungen

Eine **partielle Differentialgleichung** (Abkürzung PDGL, beziehungsweise **PDE** für englisch: *partial differential equation*) ist eine Differentialgleichung, die partielle Ableitungen enthält. Solche Gleichungen dienen der mathematischen Modellierung vieler physikalischer Vorgänge. Die Lösungstheorie von PDEs ist für lineare Gleichungen weitgehend erforscht, bei nichtlinearen Gleichungen enthält die mathematische Theorie noch viele Lücken. Zur praktischen Berechnung von Lösungen werden in der Regel numerische Verfahren herangezogen.

5.1 Fourier-Reihen (FR)

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen spielen Fourier-Reihen eine wichtige Rolle. Mit ihrer Hilfe können wir Lösungen bestimmter Differentialgleichungen finden.

Als Fourier-Reihe (nach Joseph Fourier) bezeichnet man die Reihenentwicklung einer periodischen abschnittsweise stetigen Funktion in eine Funktionenreihe aus Cosinus- und Sinusfunktionen.

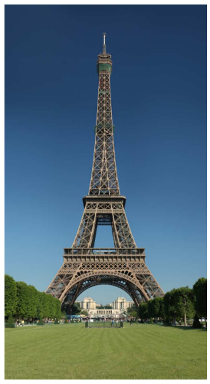
Bereits im 18. Jahrhundert gelang es Euler, Lagrange und den Bernoullis, diese Reihen für einige Funktionen anzugeben. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts behauptete nun Fourier, dass es für alle Funktionen solche Reihenentwicklungen gäbe.

Jean Baptiste Joseph Fourier
(1768-1830)

Französischer Mathematiker und Physiker

Fourier war der Sohn eines Schneiders und wurde im Alter von 10 Jahren zum Vollwaisen. 1822 behauptete Fourier in seinem Werk *Théorie Analytique de la Chaleur*, dass es für alle* Funktionen eine *(Fourier-)Reihen-Entwicklung* gäbe.

* nicht wirklich; siehe unten



Fourier ist namentlich auf dem Eiffelturm verewigt.

Motivation: Funktionen in Basisfunktionen zerlegen

In der linearen Algebra ist eine **Basis** eine Teilmenge eines Vektorraumes, mit deren Hilfe sich jeder Vektor des Raumes eindeutig als endliche Linearkombination darstellen lässt. Die Koeffizienten dieser Linearkombination heissen die Koordinaten des Vektors bezüglich dieser Basis. Ein Element der Basis heisst Basisvektor.

Ist der Vektorraum mit einem Skalarprodukt ausgestattet, so können wir Basen betrachten, in denen alle Basisvektoren auf die Länge 1 normiert und zueinander orthogonal sind – eine solche Basis heisst **Orthonormalbasis**.

Muster: Mit einem **Skalarprodukt** (z.B. das übliche/euklidische Skalarprodukt $\cdot$) lassen sich Vektoren in $\mathbb{R}^3$ als Linearkombinationen von **orthonormierten**⋆ Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ darstellen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \, \vec{e}_1 + v_2 \, \vec{e}_2 + v_3 \, \vec{e}_3 \,,$$

wobei die folgenden **Formeln** für die Koordinaten v_1, v_2, v_3 des Vektors gelten:

$$v_1 = \vec{v} \cdot \vec{e}_1, \qquad v_2 = \vec{v} \cdot \vec{e}_2, \qquad v_3 = \vec{v} \cdot \vec{e}_3 \,.$$

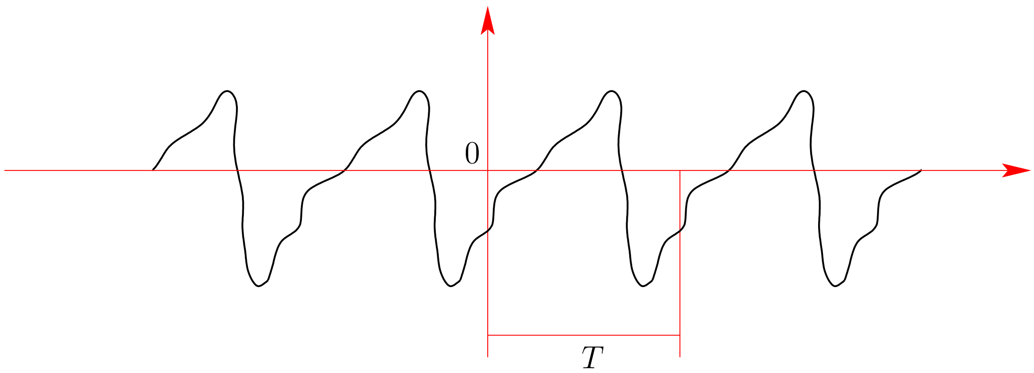
⋆ *Orthonormierte Vektoren* erfüllen $\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$ $\Rightarrow$ **Norm** 1, $\Rightarrow$ **Ortho**gonal

Periodische Funktionen

Statt $\mathbb{R}^3$ betrachten wir jetzt den Vektorraum $\mathcal{R}$ aller (abschnittsweise stetigen) T-*periodischen* reellen Funktionen $f(x)$:

$$f(x+T) = f(x) \text{ für alle reellen } x.$$

T ist eine feste positive Zahl und heisst eine **Periode** von f; die kleinste positive Periode heisst **Hauptperiode** oder **Fundamentalperiode**.

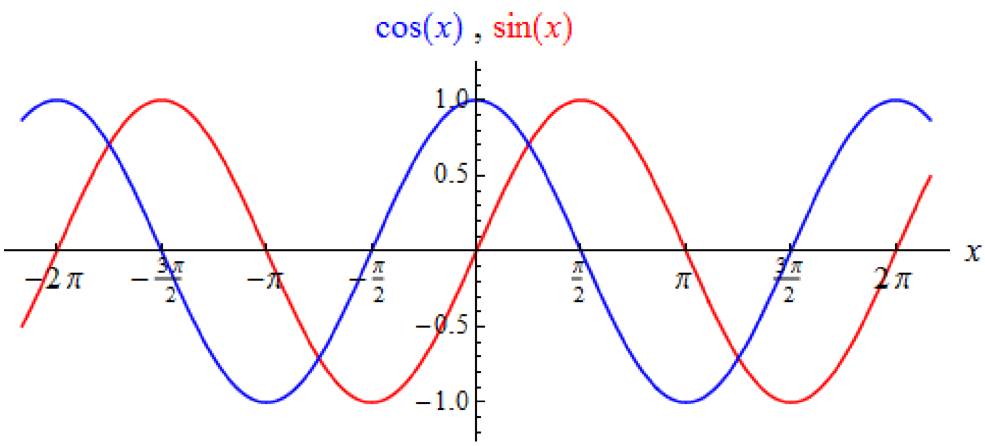


Solche Funktionen lassen sich als Funktionen betrachten, die nur auf einem begrenzten Intervall $[a,b]$ von der Länge $T = b - a$ definiert sind (und ausserhalb von $[a,b]$ als T-periodische Funktionen erweitert sind).

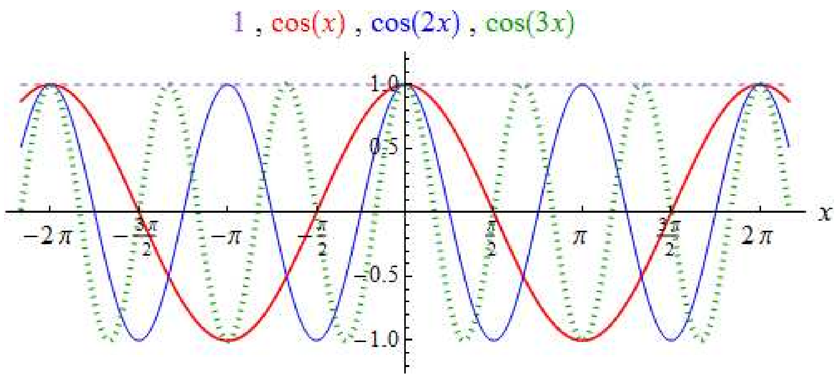
Cos und Sin als prototypische periodische Funktionen

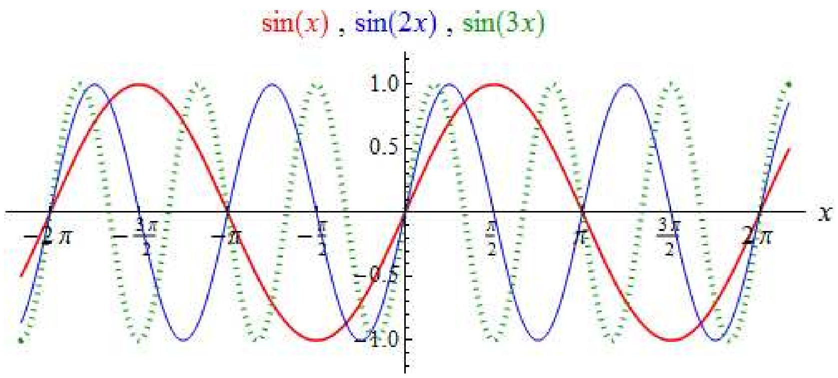
Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ sind 2π-periodisch und auch 4π-, 6π, $\ldots$-periodisch.

2π ist ihre **Hauptperiode**, d.h. die kleinste positive Periode.



Die Funktionen $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$ sind nun $\frac{2\pi}{n}$-periodisch.





Wir sagen, dass die ganze Reihe von Funktionen $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $\cos(3x)$, $\sin(3x), \ldots$ **2π-periodisch** ist, da 2π eine gemeinsame Periode ist.

Sei T eine positive reelle Zahl.

Die Funktionen $\cos\frac{2\pi x}{T}$ und $\sin\frac{2\pi x}{T}$ sind **T-periodisch**.

Die Funktionen $\cos\frac{2n\pi x}{T}$ und $\sin\frac{2n\pi x}{T}$ sind **$\frac{T}{n}$-periodisch**.

> Wir sagen, dass die ganze Reihe von Funktionen $\cos\frac{2n\pi x}{T}$, $\sin\frac{2n\pi x}{T}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ **T-periodisch** ist, da T eine gemeine Periode ist.

Eine Linearkombination von diesen Funktionen ist auch **T-periodisch**. Z.B.:

$$\underbrace{3 - 2\cos\frac{4\pi x}{T} + 5\sin\frac{2\pi x}{T} - \sin\frac{12\pi x}{T}}_{\text{heisst } \textit{trigonometrisches Polynom}} .$$

Ein Skalarprodukt für T-periodische Funktionen durch Integration

Der Funktionsraum der T-periodischen reellen Funktionen, $\mathcal{R}$ wird mit dem folgenden **Skalarprodukt** ausgestattet:

$$\underset{\uparrow}{e} \cdot \underset{\uparrow}{f} = \frac{2}{T}\int_a^b e(x)\, f(x)\, dx\,.$$

zwei T-periodische Funktionen ($T = b - a$)

☞ Dann sind die Funktionen

$$\boxed{\begin{array}{ll} e_n(x) = \cos\dfrac{2n\pi x}{T} & e_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ f_n(x) = \sin\dfrac{2n\pi x}{T} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}}$$

orthonormal bezüglich des obigen Skalarproduktes, d.h. (als Intervall von der Länge T wählen wir $[a, b] = [0, T]$):

$$e_m \cdot e_n \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{T}\int_0^T \cos\frac{2m\pi x}{T}\, \cos\frac{2n\pi x}{T}\, dx = \ldots = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

Definition des Skalarproduktes

$$e_m \cdot f_n \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{T}\int_0^T \cos\frac{2m\pi x}{T}\, \sin\frac{2n\pi x}{T}\, dx = \ldots = 0 \quad \text{für alle } m \text{ und } n$$

Definition des Skalarproduktes

und

$$f_m \cdot f_n \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{T}\int_0^T \sin\frac{2m\pi x}{T}\, \sin\frac{2n\pi x}{T}\, dx = \ldots = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n\,. \end{cases}$$

Definition des Skalarproduktes

Wieso sind diese Funktionen orthonormal?

Diese unendlich vielen Gleichungen überprüfen wir mit Hilfe einer Reihe von Integrationen. Wir geben ein Beispiel unten.

Hinweis:

Die Stammfunktionen werden mittels der folgenden trigonometrischen Formeln bestimmt (siehe Mathematik I).

$$\cos(Ax)\cos(Bx) = \frac{1}{2}\Big(\cos\big((A+B)x\big) + \cos\big((A-B)x\big)\Big)$$

$$\sin(Ax)\sin(Bx) = \frac{1}{2}\Big(\cos\big((A-B)x\big) - \cos\big((A+B)x\big)\Big)$$

$$\cos(Ax)\sin(Bx) = \frac{1}{2}\Big(\sin\big((A+B)x\big) - \sin\big((A-B)x\big)\Big)$$

Beispiel:

Es gilt:

$$e_m \cdot e_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\frac{2m\pi x}{T}\ \cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx$$

$\uparrow$

Definition des Skalarproduktes

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T} + \frac{2n\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{2m\pi x}{T} - \frac{2n\pi x}{T}\right) dx$$

$\uparrow$

trigonometrische Formel

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2(m+n)\pi}\ \sin\left(\frac{2m\pi x}{T} + \frac{2n\pi x}{T}\right) + \frac{T}{2(m-n)\pi}\ \sin\left(\frac{2m\pi x}{T} + \frac{2n\pi x}{T}\right)\right]_{x=0}^{x=T}$$

$\uparrow$

falls $m \neq n$

$$= 0 \qquad \text{falls } m \neq n$$

$\uparrow$

$\sin(2k\pi x) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

☞ Fourier behauptet, dass die Funktionen

$$\boxed{\begin{array}{ll} e_n(x) = \cos\dfrac{2n\pi x}{T} & e_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ f_n(x) = \sin\dfrac{2n\pi x}{T} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}}$$

sogar eine orthonormierte **Basis** von $\mathcal{R}$ bezüglich des obigen Skalarproduktes bilden. Der folgende Satz FR erklärt in welchem Sinn sich eine T-periodische Funktion als *Linearkombination* von diesen *Basis*-Funktionen darstellen lässt.

Fourier-Reihen

Eine T-periodische stückweise stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ besitzt die **Fourier-Reihe**

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right),}$$

wobei die folgenden **Formeln** – die sogenannten *Euler-Formeln* – für die *Koordinaten* a_n und b_n gelten:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}\, dx \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}\, dx \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots\,. \end{aligned}}$$

Diese Formeln für die Fourier-Koeffizienten entsprechen den Formeln für die Koordinaten eines Vektors bzgl. einer orthonormierten Basis:

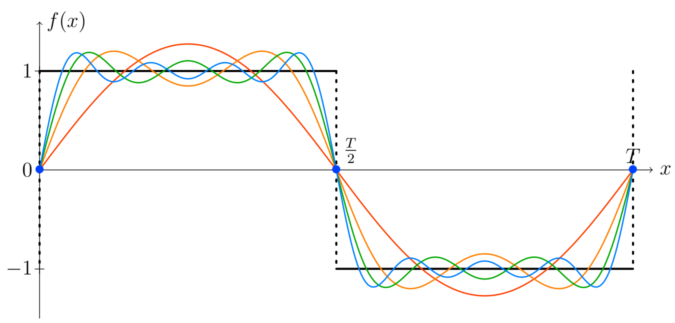
$$a_n = f \cdot e_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition des Skalarproduktes}}}{=} \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\, e_n(x)\, dx \;=\; \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}\, dx$$

$$b_n = f \cdot f_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition des Skalarproduktes}}}{=} \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\, f_n(x)\, dx \;=\; \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}\, dx\,.$$

Satz FR. *Die Fourier-Reihe einer periodischen stückweise stetig differenzierbaren Funktion f konvergiert*

- *in allen Stetigkeitspunkten x gegen $f(x)$ und*
- *in den Sprungstellen x gegen das arithmetische Mittel der beiden einseitigen Grenzwerte:*

$$\frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right).$$



Sonderfall $T = 2\pi$:

Eine 2π-periodische stückweise stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ besitzt die **Fourier-Reihe**

$$f(x) \sim \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)} \; ,$$

wobei

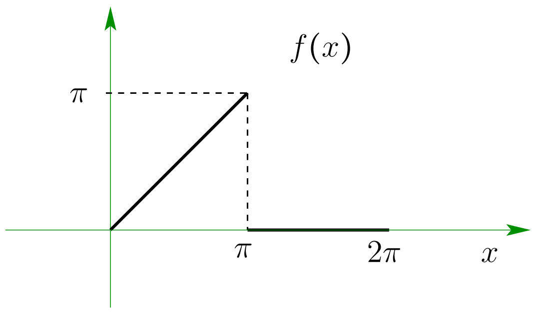
$$\boxed{\begin{array}{ll} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx & \text{für } n = 0,1,2,3,\dots \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx & \text{für } n = 1,2,3,\dots\,. \end{array}}$$

Beispiel:

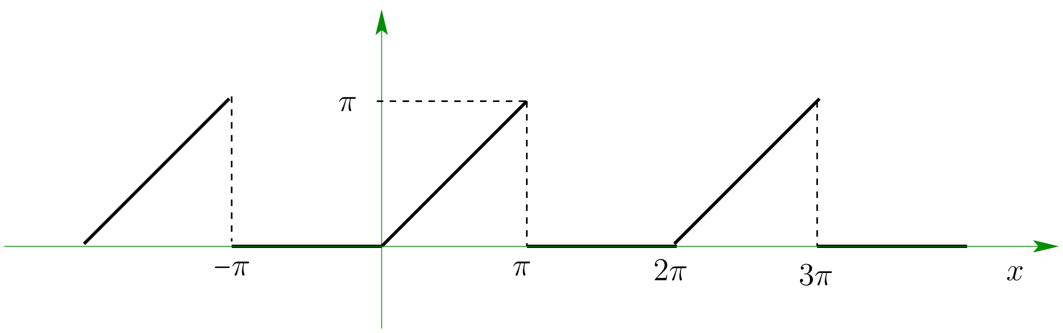
Wir bestimmen die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{für} \quad \pi < x < 2\pi\ . \end{cases}$$

Der Graph dieser Funktion ist



und der Graph ihrer periodisch Fortsetzung (die Periode ist $T = 2\pi$) ist



Die Fourier-Reihe von $f(x)$

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)}$$

hat die folgenden Koeffizienten:

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot 1 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) \, dx$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{partielle Integration}}}{=} \frac{1}{\pi} \Big[x \tfrac{1}{n} \sin(nx) + \tfrac{1}{n^2} \cos(nx) \Big]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2 \pi} \Big(\cos(n\pi) - 1 \Big) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -\frac{2}{n^2\pi}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) \, dx$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{partielle Integration}}}{=} \frac{1}{\pi} \Big[-x \tfrac{1}{n} \cos(nx) + \tfrac{1}{n^2} \sin(nx) \Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{n} \cos(n\pi) = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die ersten Koeffizienten sind dann:

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\ldots$
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2}{\pi}$	0	$-\frac{2}{9\pi}$	0	$-\frac{2}{25\pi}$	$\ldots$

und

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\ldots$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\ldots$

Also ist die Fourier-Reihe:

$$\boxed{f(x) \sim \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{2}{\pi} \cos x + \sin x - \tfrac{1}{2} \sin(2x) - \tfrac{2}{9\pi} \cos(3x) + \tfrac{1}{3} \sin(3x) - \tfrac{1}{4} \sin(4x) - \tfrac{2}{25\pi} \cos(5x) + \tfrac{1}{5} \sin(5x) + \ldots}$$

Bemerkung: An der Sprungstelle $x = \pi$ ergibt sich gemäss dem Satz FR die folgende interessante Formel:

$$\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{2}{\pi} \Big(-1 - \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{25} - \tfrac{1}{36} - \ldots \Big) = \underbrace{\frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2}}_{\frac{\pi+0}{2}} \quad \text{d.h.} \quad \sum_{n=1,\, n \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Bemerkungen zu Fourier-Reihen

1. In der praktischen Anwendung wird die Fourier-Reihe häufig nach endlich vielen Reihengliedern abgebrochen. Wir erhalten eine Näherung von f in Form eines *trigonometrischen Polynoms*, das wir **Fourier-Polynom** nennen:

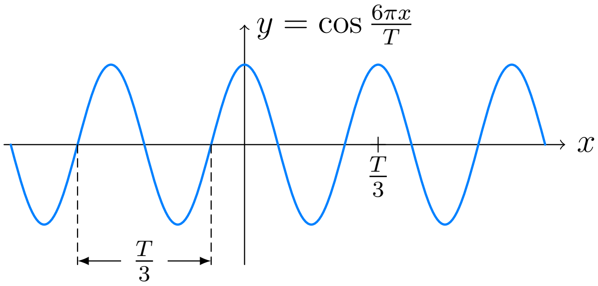
$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{K} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right).}$$

Diese Näherung ist eine Teilsumme der Fourier-Reihe.

2. Während Taylor-Polynome eine Funktion *lokal* in einer Umgebung eines Punktes approximieren, approximieren Fourier-Polynome eine periodische Funktion *global* in der ganzen reellen Gerade.

3. Der Faktor $\frac{2n\pi}{T}$ in $\cos \frac{2n\pi x}{T}$ und $\sin \frac{2n\pi x}{T}$ skaliert die Fundamentalperiode 2π der üblichen Cosinus- und Sinusfunktionen auf die Fundamentalperiode $\frac{T}{n}$.

Z.B. hat die Funktion $\cos \frac{6\pi x}{T}$ die Fundamentalperiode $\frac{T}{3}$.



4. Oft wird die Fourier-Reihe einer T-periodischen Funktion in Gestalt von

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \Big)}$$

geschrieben, wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die **Grundfrequenz** heisst.

Die Frequenz jeder Sinus- oder Cosinusfunktion in der Fourier-Reihe ist ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz, $n\omega$.

Z.B. hat die Funktion $\cos(3\omega x)$ die Frequenz 3ω.

5 Mittels der Euler'schen Formel

$$\boxed{e^{\pm iu} = \cos u \pm i \sin u} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \cos u &= \dfrac{e^{iu} + e^{iu}}{2} \\[2ex] \sin u &= \dfrac{e^{iu} - e^{iu}}{2i} \end{cases}$$

lässt sich die Fourier-Reihe in komplexer Form darstellen:

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{\frac{2n\pi x}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\omega x}},$$

wobei die Koeffizienten sind:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, e^{\frac{-2n\pi x}{T}} dx \, .$$

Die folgenden Zusammenhänge gelten:

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

oder

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad (n > 0) \, .$$

6 Für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten dürfen wir, dank der T-Periodizität, irgendein Intervall $[a, b]$ von der Länge T benutzen.

Falls $f(x)$ **gerade**, bzw. **ungerade** ist, hilft es, ein symmetrisches Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ zu berücksichtigen, um die Koeffizienten-Berechnung zu vereinfachen. Dies werden wir im nächsten Abschnitt ausnutzen.

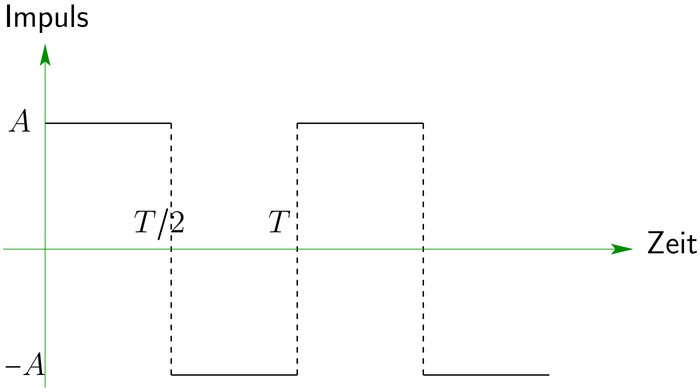
Diese Vereinfachung ist jedoch nur bei der reellen Fourier-Reihe (und nicht bei der komplexen Fourier-Reihe) möglich.

Beispiel:

Sei $f(x)$ eine *square wave* Funktion (*Rechteck-Welle*) mit *Amplitude* A:

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{für} \quad 0 \le x < \frac{T}{2} \\ -A & \text{für} \quad \frac{T}{2} \le x < T \end{cases}$$

und periodisch fortgesetzt (die Periode ist T, eine positive Konstante).



Die Fourier-Reihe von $f(x)$

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right)}$$

hat die folgenden Koeffizienten:

- $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}\, dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}}_{\text{ungerade Funktion}} \, dx = 0$, für $n = 0, 1, 2, \ldots$

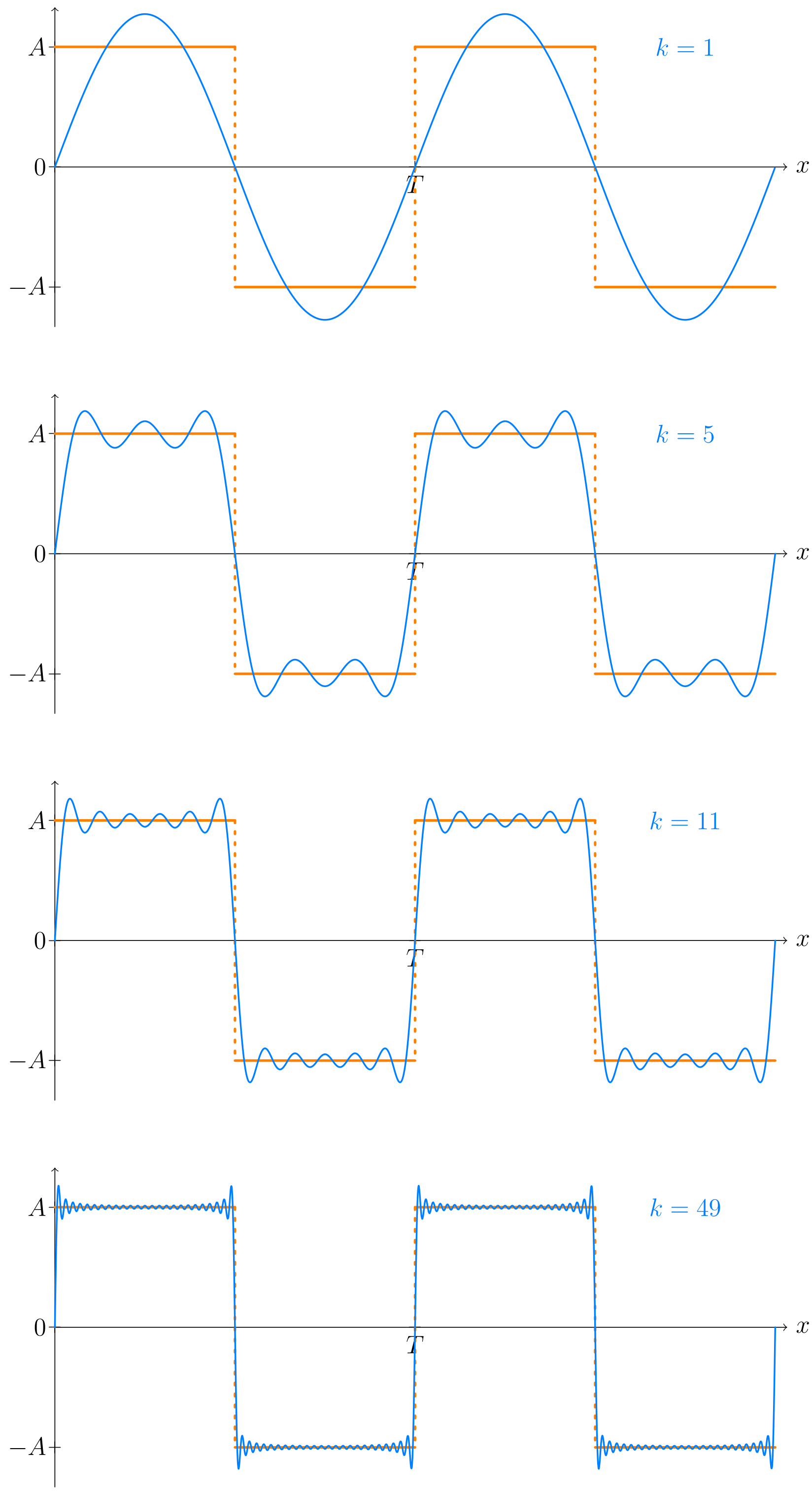
- $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}\, dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}}_{\text{gerade Funktion}} \, dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} A \sin \frac{2n\pi x}{T}\, dx$

$$= \frac{4A}{T} \left[-\frac{T}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi x}{T} \right]_0^{T/2} = \frac{2A}{n\pi} \left(1 - \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \right) = \begin{cases} \frac{4A}{n\pi} & \text{falls } n = 1, 3, 5, \ldots \ (n \text{ ungerade}) \\ 0 & \text{falls } n = 2, 4, 6, \ldots \ (n \text{ gerade}) \end{cases}$$

Also ist die Fourier-Reihe:

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1,\, n\,\text{ungerade}}^{\infty} \frac{4A}{n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{T}} \underset{\substack{\uparrow \\ n = 2k+1}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4A}{(2k+1)\pi} \sin \frac{2(2k+1)\pi x}{T} \quad .$$

Graphen einiger *trigonometrischer Polynome* von f (Summen der ersten k Terme der Fourier-Reihe für $k = 1, 5, 11, 49$):

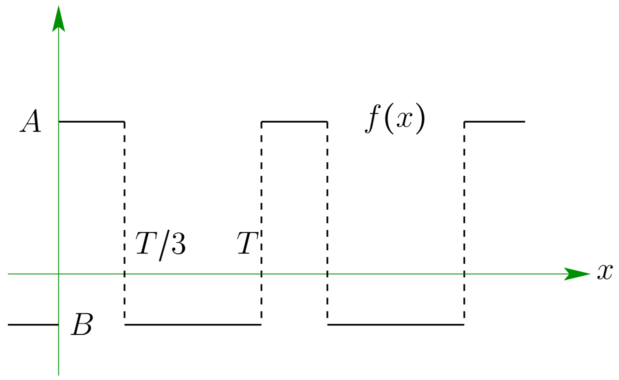


Beispiel:

Sei $f(x)$ die Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{für} \quad 0 \le x < \dfrac{T}{3} \\[2ex] B & \text{für} \quad \dfrac{T}{3} \le x < T \end{cases}$$

und periodisch fortgesetzt (A und B sind beliebige Konstanten).



Die Fourier-Reihe von $f(x)$

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right)}$$

hat die folgenden Koeffizienten:
(Die Details dieser Berechnungen sind eine Übungsaufgabe.)

- $$a_n = \begin{cases} \dfrac{A-B}{n\pi} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{falls} \quad n = 3k+1 \\[2ex] \dfrac{B-A}{n\pi} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{falls} \quad n = 3k+2 \\[2ex] 0 & \text{falls} \quad n = 3k+3, \; k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

  $$a_0 = \frac{2}{3}(A + 2B)$$

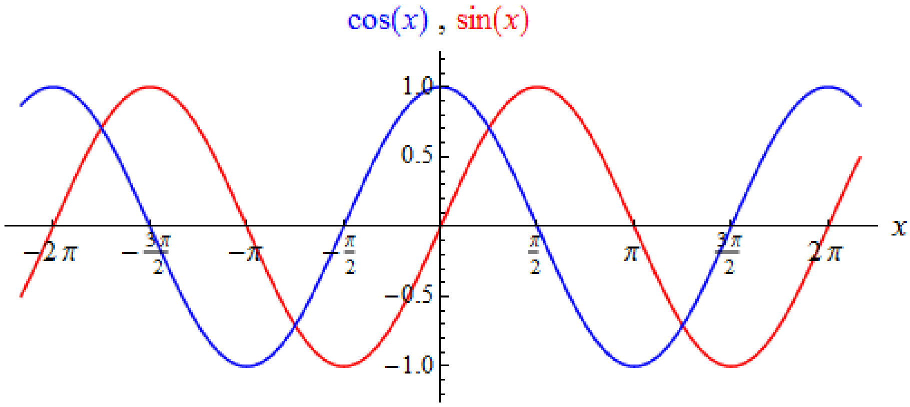
- $$b_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ein Vielfaches von } 3 \text{ ist} \\[2ex] \dfrac{3}{2n\pi}(A-B) \text{ sonst}. \end{cases}$$

5.2 Cosinus- bzw. Sinus-Reihen

Cos und Sin - prototypische symmetrische Funktion

Die Funktion $\cos x$ ist **gerade**, da $\cos(-x) = \cos(x)$. Ihr Funktionsgraph ist daher achsensymmetrisch zur y-Achse.

Die Funktion $\sin x$ ist **ungerade**, da $\sin(-x) = -\sin(x)$. Ihr Funktionsgraph ist daher punktsymmetrisch zum Ursprung.



Ebenso sind die Funktionen

$$\cos(nx),\ \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

alle **gerade** Funktionen.

Andererseits sind die Funktionen

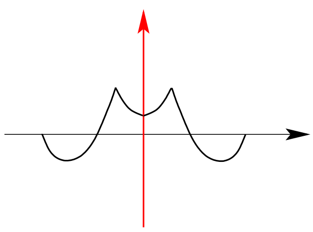
$$\sin(nx),\ \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

alle **ungerade** Funktionen.

Zur Erinnerung: gerade und ungerade Funktionen

gerade

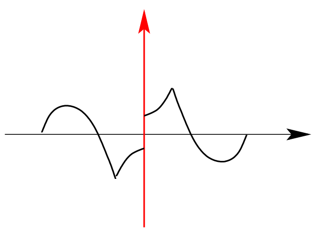
$$f(x) = f(-x)$$



Prototypen:
x^2 und $\cos x$

ungerade

$$f(x) = -f(-x)$$



Prototypen:
x^3 und $\sin x$

Produkte zweier geraden/ungeraden Funktionen:

(gerade Funktion)	$\times$	(gerade Funktion)	ist gerade.
(ungerade Funktion)	$\times$	(ungerade Funktion)	ist gerade.
(gerade Funktion)	$\times$	(ungerade Funktion)	ist ungerade.

Integration (un)gerader Funktionen über symmetrische Intervalle:

$$\int_{-L}^{L} (\text{gerade Funktion})\, dx = 2 \int_{0}^{L} (\text{gerade Funktion})\, dx\,.$$

$$\int_{-L}^{L} (\text{ungerade Funktion})\, dx = 0\,.$$

Fourier-Reihen von geraden/ungeraden Funktionen

Sei $f(x)$ eine T-periodische Funktion.

☞ Ist f **gerade**, so sind alle $b_n = 0$.

Die Fourier-Reihe einer geraden Funktion ist

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{T}}$$ **eine Cosinus-Reihe**,

wobei $\boxed{a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}\, dx\ .}$

☞ Ist f **ungerade**, so sind alle $a_n = 0$.

Die Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion ist

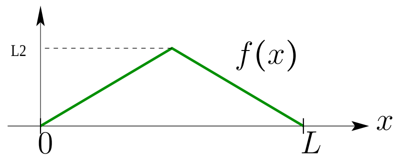
$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi x}{T}}$$ **eine Sinus-Reihe**,

wobei $\boxed{b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}\, dx\ .}$

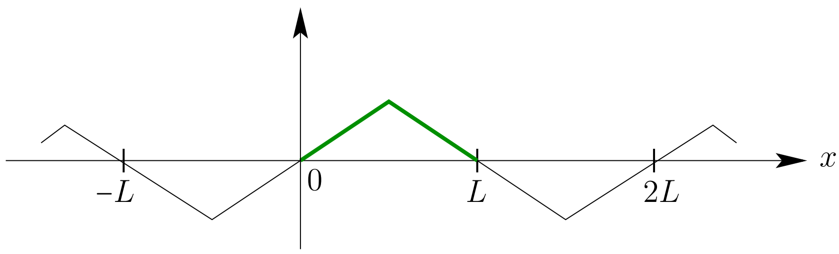
Beispiel:

Bestimme die **Sinus-Entwicklung** (oder **Sinus-Reihe**) der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn} \quad 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\[2ex] L - x & \text{wenn} \quad \dfrac{L}{2} < x \le L\,. \end{cases}$$



Die Sinus-Reihe von $f(x)$ ist die Fourier-Reihe ihrer *ungeraden* und $2L$-periodischen Fortsetzung.



Die Sinus-Reihe von $f(x)$ ist also

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\,,$$

wobei die Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{2L} \int_0^L f(x)\, \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \\ &= \frac{2}{L} \left(\int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx + \int_{L/2}^{L} (L - x)\, \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \right) \\ &= \ldots\,. \\ &= \frac{4L}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad n = 2k, \\[1ex] \dfrac{4L}{n^2\pi^2} & \text{falls} \quad n = 2k+1 \text{ und } k \text{ gerade ist,} \\[2ex] \dfrac{-4L}{n^2\pi^2} & \text{falls} \quad n = 2k+1 \text{ und } k \text{ ungerade ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

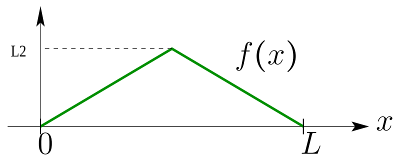
Es folgt, dass

$$f(x) \sim \frac{4L}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{L} - \ldots \right).$$

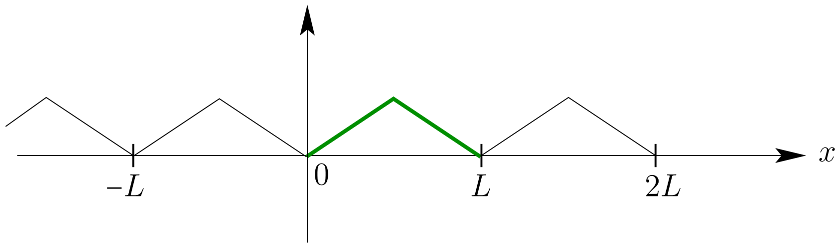
Beispiel:

Bestimme die **Cosinus-Entwicklung** (oder **Cosinus-Reihe**) der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn} \quad 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ L - x & \text{wenn} \quad \dfrac{L}{2} < x \le L\,. \end{cases}$$



Die Cosinus-Reihe von $f(x)$ ist die Fourier-Reihe ihrer *geraden* und $2L$-periodischen Fortsetzung:



Die Cosinus-Reihe von $f(x)$ ist

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\,,$$

wobei die Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{2L} \int_0^L f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \\ &= \frac{2}{L} \Big(\int_0^{L/2} x \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx + \int_{L/2}^{L} (L-x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \Big) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

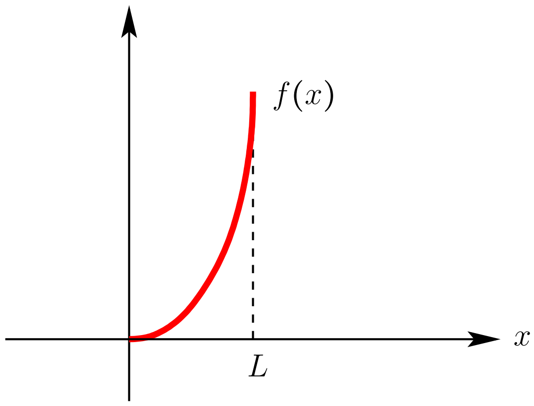
Es ergibt sich

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{L}{2} \\ a_{4m+2} &= -\frac{8L}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(4m+2)^2}, \quad m = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

und alle anderen a_n verschwinden.

Fourier- vs. Cosinus- vs. Sinus-Reihen

Eine beliebige (stückweise stetig differenzierbare) Funktion $f(x)$ für x im Intervall $[0, L]$ definiert



besitzt:

a) eine Fourier-Reihe,

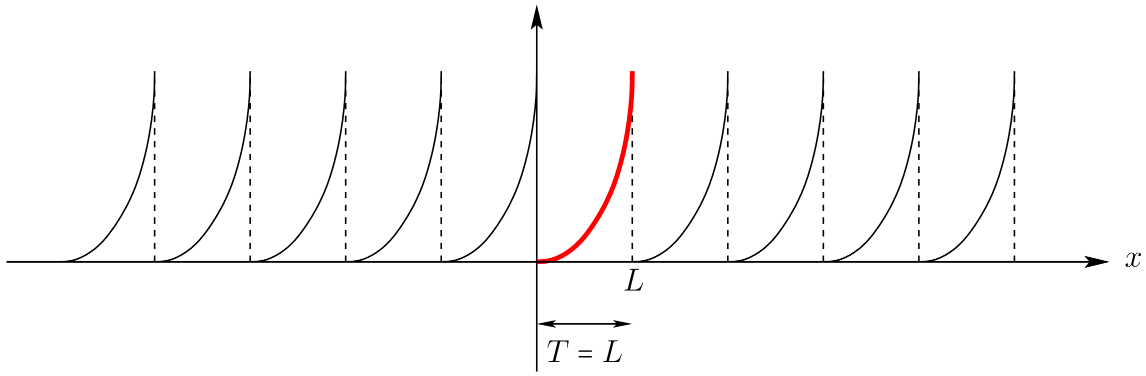
b) eine Cosinus-Reihe und

c) eine Sinus-Reihe.

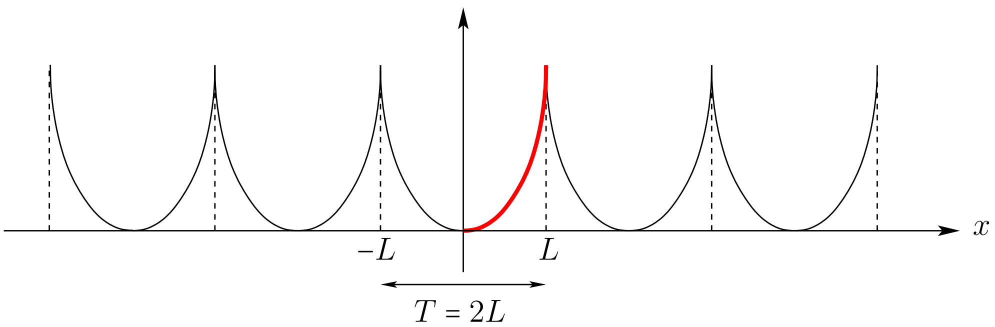
Diese Reihen sind die Fourier-Entwicklungen von verschiedenen geeigneten periodischen Fortsetzungen von f, wie in der nächsten Seite zusammengefasset.

Es kann sein, dass die Fourier-Reihe von $f(x)$ gleich ihrer Cosinus- oder ihrer Sinus-Reihe ist. Das passiert für besondere (symmetrische) Funktionen.

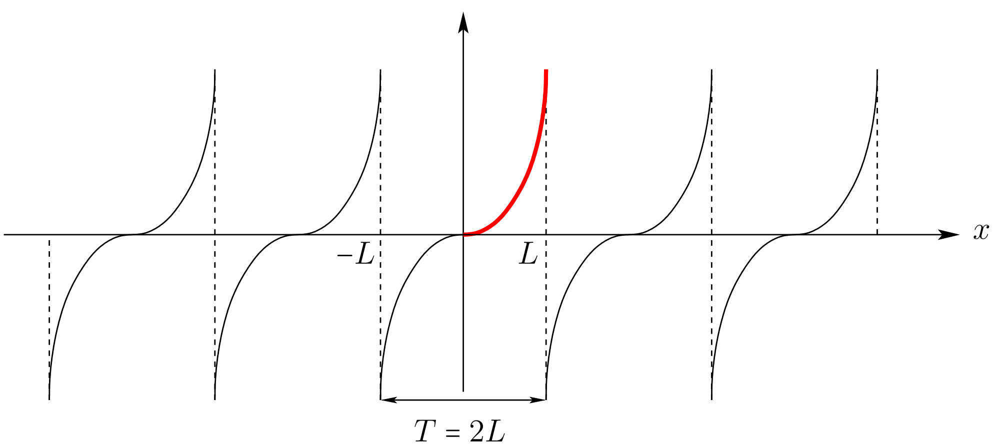
a) Die **Fourier-Reihe** stellt die L-periodische Fortsetzung von f dar.



b) Die **Cosinus-Reihe** stellt die $2L$-periodische *gerade* Fortsetzung von f dar.



c) Die **Sinus-Reihe** stellt die $2L$-periodische *ungerade* Fortsetzung von f dar.



a) Die **Fourier-Reihe** von $f(x)$, $0 < x < L$ ist

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right)},$$

wobei die Koeffizienten a_n und b_n die folgenden Formeln besitzen:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2n\pi x}{L}\, dx \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2n\pi x}{L}\, dx \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}}$$

b) Die **Cosinus-Reihe** von $f(x)$ ist

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}},$$

wobei die Koeffizienten a_n sind

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ .}$$

c) Die **Sinus-Reihe** von $f(x)$ ist

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}},$$

wobei die Koeffizienten b_n sind

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots\ .}$$

5.3 Klassifizierung von partiellen Differentialgleichungen (PDEs) und wichtigste homogene lineare PDEs zweiter Ordnung

Definition. *Eine* **PDE** *ist eine Gleichung für eine gesuchte Funktion von mehreren Variablen, in der partielle Ableitungen dieser Funktion vorkommen.*

Die **Ordnung** *einer PDE ist der Grad der höchsten auftretenden partiellen Ableitung.*

In diesem Text sind normalerweise x und t oder x und y die Variablen und $u = u(x,t)$ oder $u = u(x,y)$ unbekannte Funktionen.

Die partiellen Ableitungen bezeichnen wir

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \qquad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad \text{etc.}$$

Beispiele von PDEs

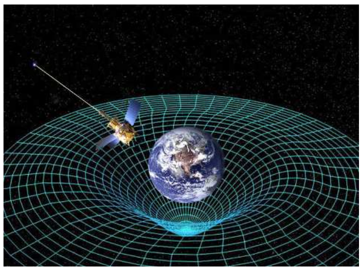
Unsere **Hauptbeispiele** von PDEs sind:

Wellengleichung

$\boxed{u_{tt} = c^2\, u_{xx}}$

Wärmeleitungsgleichung

$\boxed{u_t = c^2\, u_{xx}}$



Potentialgleichung

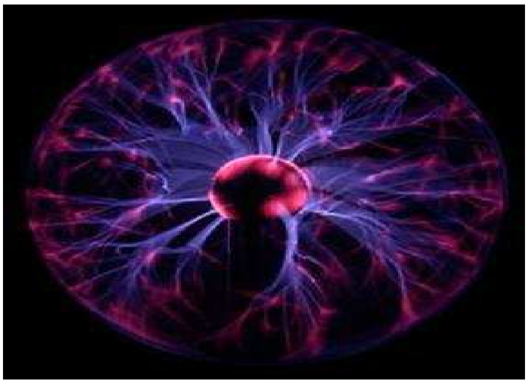
$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$

Andere Beispiele von PDEs:

- **Navier-Stokes-Gleichungen**
  für die Strömung von Flüssigkeiten

- **Korteweg-de-Vries-Gleichung**
  für Wellen in Kanälen

  $\boxed{u_t + 6u\, u_x + u_{xxx} = 0}$



- **Maxwell-Gleichungen**
  für Phänomene des Elektromagnetismus

- **Schrödinger-Gleichung**
  für den quantenmechanischen Zustand eines Systems

  $$\boxed{i\hbar\, u_t = \frac{-\hbar^2}{2m}\, u_{xx} + V u}$$

  Hier ist $u(x,t)$ eine komplexwertige Funktion und i die imaginäre Einheit ($i^2 = -1$).

Lineare PDEs zweiter Ordnung

Definition. *Eine* **lineare** *PDE 2. Ordnung mit 2 Variablen* (x,t) *ist eine PDE von der Form*

$$\boxed{Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G}\ ,$$

wobei A, B, C, D, E, F *und* G *Funktionen von* x *und* t *sind* $(A = A(x,t)$, *etc.) und* A, B *und* C *nicht gleichzeitig null sind.*

Diese Gleichung heisst **homogen**, *falls*

$$G(x,t) = 0,$$

sonst **inhomogen**.

Beispiel:

Die sogenannte **Poisson Gleichung**

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)\ ,$$

wobei f eine gegebene (nicht-triviale) Funktion ist, ist eine *inhomogene* PDE.

Eine lineare **homogene** PDE 2. Ordnung mit 2 Variablen (x,t) ist also eine PDE von der Form

$$\boxed{Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = 0}\ ,$$

wobei A, B, C, D, E und F Funktionen von x und t sind (A, B, C nicht gleichzeitig null). Eine solche Gleichung heisst:

$$\begin{cases} \textbf{elliptisch} & \text{falls} \quad AC - B^2 > 0\,, \\ \textbf{hyperbolisch} & \text{falls} \quad AC - B^2 < 0 \quad \text{und} \\ \textbf{parabolisch} & \text{falls} \quad AC - B^2 = 0\,. \end{cases}$$

Unsere Hauptbeispiele stellen die 3 Typen homogener linearer PDEs 2. Ordnung dar.

1. Die Wellengleichung $\boxed{u_{tt} = c^2\, u_{xx}}$ ist eine **hyperbolische PDE**.

2. Die Wärmeleitungsgleichung $\boxed{u_t = c^2\, u_{xx}}$ ist eine **pararbolische PDE**.

3. Die Potentialgleichung $\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$ ist eine **elliptische PDE**.

PDE Probleme

Eine **Lösung** einer PDE über einem Gebiet R ist eine Funktion, die die PDE im Inneren von R erfüllt (und auf dem Rand eventuell nicht differenzierbar ist).

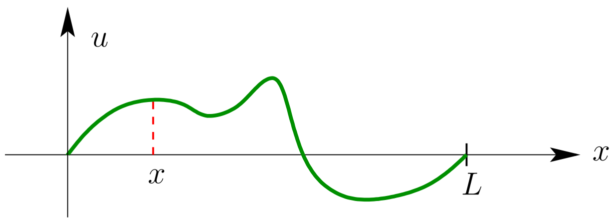
Eine PDE zu lösen heisst alle ihre Lösungen zu bestimmen.

Oft suchen wir *die* Lösung der PDE, die noch *weitere Bedingungen* erfüllt, die wir **Nebenbedingungen** nennen. Ein **PDE Problem** ist eine PDE zusammen mit Nebenbedingungen.

In der Praxis sind Probleme wie die folgenden Beispiele wichtig, wo **Rand- und Anfangsbedingungen** gestellt werden, d.h., die Werte der Lösung oder ihrer Ableitungen werden auf den Rand des Gebietes R und/oder zur Zeit $t = 0$ festgelegt.

Beispiele:

1 Grundbeispiel **Schwingungen einer Saite**



$u(x,t)$ = Auslenkung des Saitenpunktes mit Koordinate x zur Zeit t

$\boxed{u_{tt} = c^2\, u_{xx}}$

Diese partielle Differentialgleichung ist die 1-dimensionale Wellengleichung.

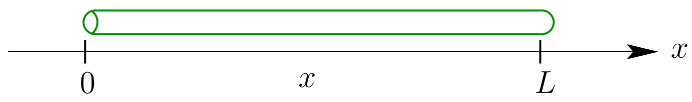
$u(0,t) = u(L,t) = 0$ für alle t

Diese Randbedingungen bedeuten, dass die zwei Enden der Saite festgemacht sind.

$u(x,0) = u_0(x)$
$u_t(x,0) = v_0(x)$

Diese Anfangsbedingungen zeigen die Anfangsform und -geschwindigkeit der Saite.

2 Grundbeispiel **Wärmeleitung in einem Stab**



$u(x, t)$ = Temperatur des Stabpunktes mit Koordinate x zur Zeit t

$\boxed{u_t = c^2\, u_{xx}}$

Diese partielle Differentialgleichung ist die 1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung.

$u(0, t) = u(L, t) = 0$ für alle t

Diese Randbedingungen bedeuten, dass die Temperatur an den zwei Enden konstant (gleich Null) bleibt.

$u(x, 0) = f(x)$

Diese Anfangsbedingung zeigt die Anfangstemperaturverteilung (diese ist durch die gegebene Funktion $f(x)$ bestimmt).

Die wichtigsten Typen von Randbedingungen (RB oder BC = *boundary conditions*), die in unseren Problemen erscheinen, sind:

- **Dirichlet-Randbedingungen**

  Hier werden die Werte vorgegeben, die auf dem jeweiligen Rand von der Funktion angenommen werden sollen.

- **Neumann-Randbedingungen**

  Hier werden die Werte für die Normalableitung der Lösung auf dem Rand vorgegeben.

- **Gemischte Randbedingungen**

  Diese stellen eine Kombination der Dirichlet- und der Neumann-Randbedingungen dar.

Laplace-Operator

Aus physikalischen Gründen kommt in PDE's mit zwei oder mehr räumlichen Variablen $(x, y, \dots)$ die folgende Summe von partiellen Ableitungen zweiter Ordnung bzgl. der *räumlichen Variablen* vor: $u_{xx} + u_{yy} + \dots$.

Ist die Funktion $u(x, y)$ oder $u(x, y, t)$, so gilt

$$\boxed{\underbrace{\Delta u}_{} \;:=\; u_{xx} + u_{yy}\;.}$$

sprich: "Laplace u"

Ist die Funktion $u(x, y, z)$ oder $u(x, y, z, t)$, so gilt

$$\boxed{\underbrace{\Delta u}_{} \;:=\; u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\;.}$$

Das Delta-Symbol Δ bezeichnet den **Laplace-Operator**, der mit dem Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ verwandt ist:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

> Zur Erinnerung: Der Gradient eines Skalarfeldes, $\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u$, ist ein Vektorfeld und die Divergenz eines Vektorfeldes, $\operatorname{div} \vec{G} = \vec{\Delta} \cdot \vec{G}$ ist ein Skalarfeld.

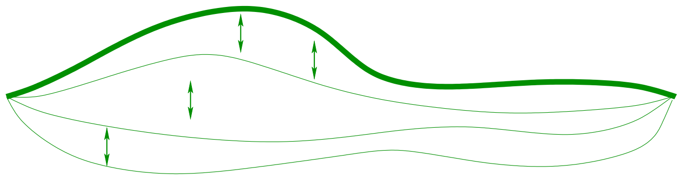
$$\begin{aligned} \Delta u &= \vec{\nabla}^2 u = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad = \quad u_{xx} + u_{yy}\;. \end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt ähnlich mit drei Variablen, x, y, z.

5.4 Schwingungen einer Saite – Problemstellung

Dieser Abschnitt ist nicht Gegenstand der Prüfung.

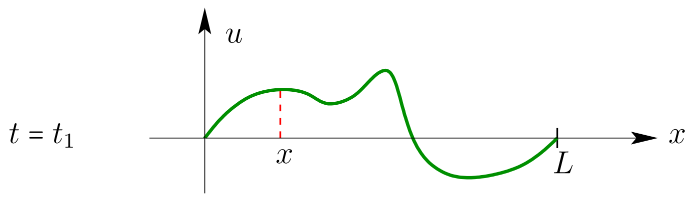
Wir betrachten eine gespannte Saite mit konstanter Massendichte ρ (Masse pro Längeneinheit) und Länge L. Diese Saite ist an beiden Enden eingespannt und sie kann nur transversal in eine feste Richtung ausgelenkt werden.

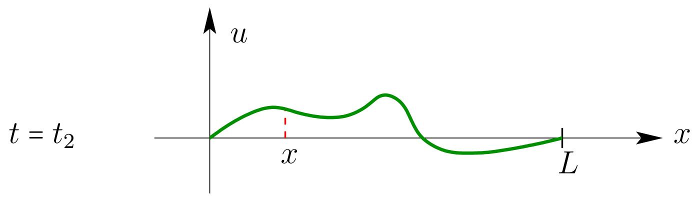


Wir benötigen ein mathematisches Modell, um die schwingende Saite quantitativ zu beschreiben. Dafür benutzen wir Gesetze der Physik und leiten so die Wellengleichung her.

Die Auslenkung der Saite zur Zeit t und am Ort x bezeichnen wir

$$u(x,t)\,.$$



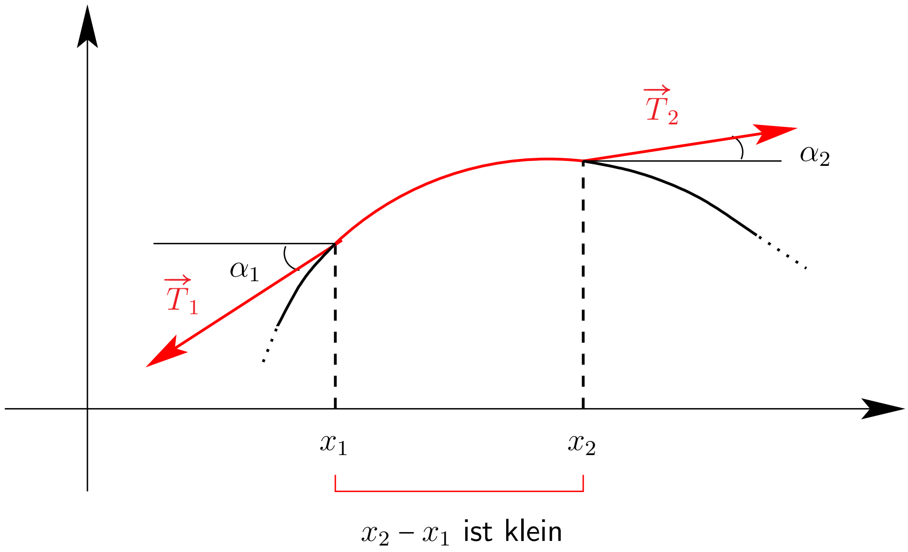


Die Saite ist an beiden Enden eingespannt, also müssen die Randbedingungen

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

für alle Zeiten $t > 0$ erfüllt werden.

Wir denken uns einen kleinen Abschnitt herausgenommen und vergrössert. Dieses Segment befinde sich im Koordinatensystem zwischen x_1 und x_2.



Sei $\overrightarrow{T}_1$, bzw. $\overrightarrow{T}_2$, die Spannkraft am Punkt x_1, bzw. x_2 und sei α_1, bzw. α_2, der Winkel zwischen $\overrightarrow{T}_1$, bzw. $\overrightarrow{T}_2$, und der horizontalen Achse.

Wir machen die folgenden Annahmen:

- die Auslenkung $u(x,t)$ ist an jedem Punkt x und für alle Zeiten t klein;
- die einzige Kraft, die auf jedem Querschnittselement der Saite ausgeübt wird, ist die Spannkraft $\overrightarrow{T}$;
- jeder Punkt bewegt sich nur vertikal, und die horizontalen Komponenten der Spannkraft sind konstant:

$$T_1 \cos\alpha_1 = T_2 \cos\alpha_2 = T \qquad (T_k \text{ bezeichnet den Betrag von } \overrightarrow{T}_k).$$

Laut dem zweiten Newton'schen Gesetz ist die vertikale Kraft, die auf ein Saitenelement einwirkt, gleich dem Produkt der Masse mit der Beschleunigung des Elementes:

$$\text{vertikale Kraft} = \boxed{T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 = m\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}\,,$$

wobei $m = \rho(x_2 - x_1)$ die Masse des Elementes ist.

Da es keine horizontale Bewegung gibt, gilt

$$\boxed{T_1 \cos\alpha_1 = T_2 \cos\alpha_2 = T\,.}$$

Wir dividieren diese eingerahmten Gleichungen:

$$\underbrace{\frac{T_2 \sin\alpha_2}{T_2 \cos\alpha_2}}_{\substack{\tan\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x_2} \\ \text{(Steigung in } x_2\text{)}}} - \underbrace{\frac{T_1 \sin\alpha_1}{T_1 \cos\alpha_1}}_{\substack{\tan\alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x_1} \\ \text{(Steigung in } x_1\text{)}}} = \frac{\rho\,(x_2 - x_1)}{T}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,.$$

Wir dividieren nun durch $x_2 - x_1$:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{\rho}{T}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

und lassen $x_1, x_2 \to x$, also $x_2 - x_1 \to 0$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,.}$$

Diese Gleichung heisst die **eindimensionale Wellengleichung**.

Die Konstante $\frac{T}{\rho}$ ist positiv und wird c^2 bezeichnet (c bedeutet eine Geschwindigkeit).

Es gibt ähnliche **Wellengleichungen in höheren Dimensionen**:

$$\boxed{u_{tt} = c^2 \nabla u\,.}$$

Um ein wohlgestelltes Problem zu erhalten (d.h. ein Problem mit genau einer Lösung), müssen wir noch die Position und die vertikale Geschwindigkeit der Saite zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ angeben. Diese sind die Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = v_0(x),$$

wobei $u_o(x)$ und $v_0(x)$ gegeben sind.

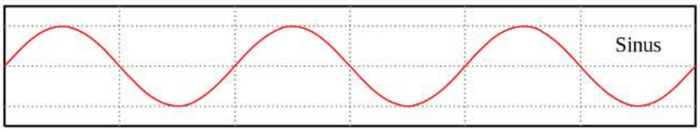
Die eindimensionale Wellengleichung wurde 1747 zum ersten Mal von Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1782) hergeleitet und gelöst. Diese PDE modelliert nicht nur eine schwingende Saite (wie eine Saite einer Geige), sondern auch Schall-, Licht-, Wasserwellen, usw.

Wellen

Die Lösungen der Wellengleichung heissen im Allgemeinen **Wellen**. Physikalisch ist eine Welle eine sich räumlich ausbreitende Veränderung (Störung) oder Schwingung einer orts- und zeitabhängigen physikalischen Grösse. Eine Welle transportiert Energie, jedoch keine Materie.

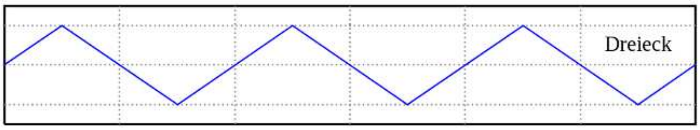
Elementare Wellenformen (oder Schwingungsformen oder Impulsformen) sind

- eine harmonische Welle (wie eine Sinus-Welle);

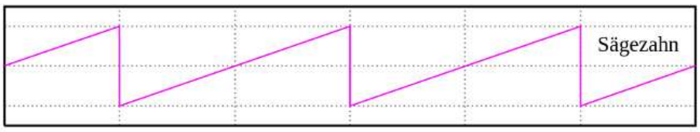


- eine Rechteck-Welle oder Stufen-Welle (englisch: *square wave*);

- eine Dreieck-Welle;

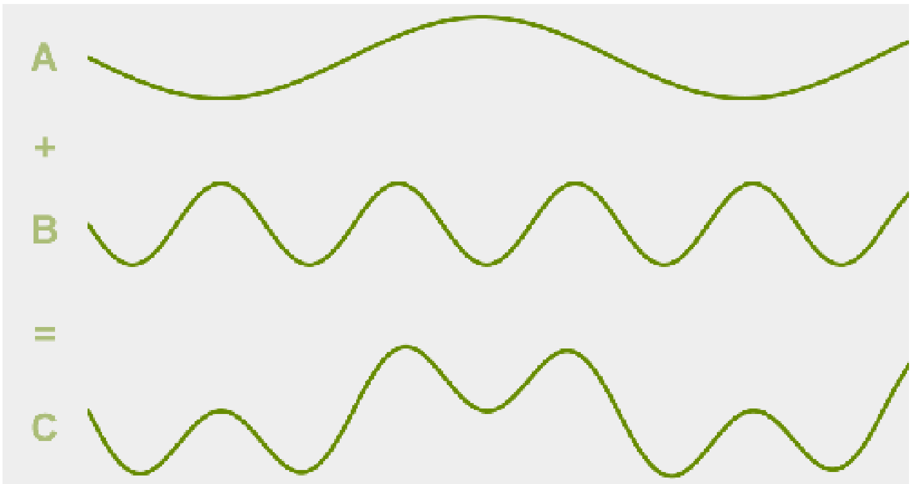


- eine Sägezahn-Welle (oder Kippschwingung oder Sägezahnimpuls).



Wir nennen **Wellen Addition** eine Summe von zwei (oder mehr) Funktionen wie

$$\underbrace{\sin\frac{2m\pi x}{T}}_{A},\qquad \underbrace{\sin\frac{2n\pi x}{T}}_{B},\qquad \underbrace{\sin\frac{2m\pi x}{T}+\sin\frac{2n\pi x}{T}}_{C}.$$



Wellen-Nomenklatur

Eine **harmonische Welle** ist eine Funktion der Form

$$u(x,t) = A\cos(kx - \omega t + v) \ ,$$

wobei

- A die **Amplitude** heisst (englisch: *amplitude*);
- k die **Wellenzahl** heisst (englisch: *wavenumber*);
- $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ die **Wellenlänge** heisst (englisch: *wavelength*);
- ω **Kreisfrequenz** heisst (englisch: *angular frequency*);
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ die **Periode** heisst (englisch: *period*);
- v **Phasenverschiebung** heisst (englisch: *phase shift*);
- $kx - \omega t + v$ **Phase** heisst (englisch: *phase*)
- und ω/k **Phasengeschwindigkeit** heisst (englisch: *phase velocity*).

Eine **stehende Welle** oder **Stehwelle** (englisch: *standing wave*) ist eine Welle, deren Auslenkung an bestimmten Stellen (die sogenannten **Knoten**) immer Null verbleibt.

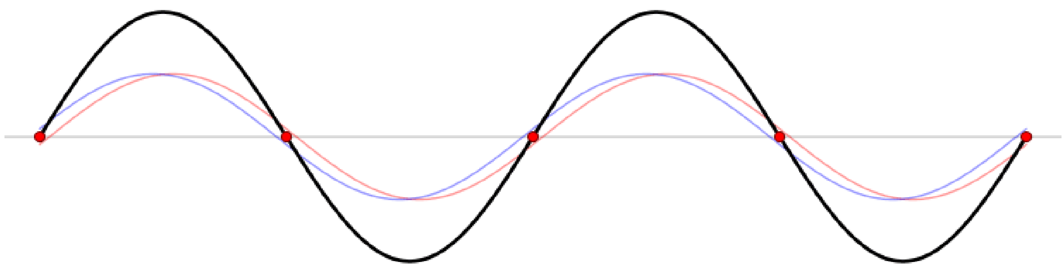
Zum Beispiel bleibt

$$u(x,t) = A\sin(kx)\sin(\omega t)$$

an den Stellen $x = \frac{n}{k}\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ immer Null und ist somit eine stehende Welle.

Die folgende trigonometrische Formel zeigt, dass eine harmonische Welle eine Superposition von zwei stehenden Wellen ist:

$$\cos(kx - \omega t + v) \ = \ \cos(kx)\cos(\omega t - v) + \sin(kx)\sin(\omega t - v) \ .$$



5.5 Superpositionsprinzip und Trennung der Variablen

Ähnlich wie für homogene lineare ODEs sind Linearkombinationen von Lösungen einer homogenen linearen PDE auch Lösungen der PDE:

Superpositionsprinzip

Seien u_1 und u_2 Lösungen einer **homogenen linearen** PDE in einem Gebiet R und seien c_1 und c_2 reelle Konstanten.

Dann ist $u = c_1\, u_1 + c_2\, u_2$ auch eine Lösung in R.

Folgerung:

Seien $u_0, u_1, u_2, \ldots$ Lösungen einer **homogenen linearen** PDE.

Dann ist die Reihe

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\, u_i \qquad (c_i \in \mathbb{R})$$

auch eine Lösung, sofern sie konvergiert.

Das Superpositionsprinzip gilt ähnlich für homogene Nebenbedingungen wie $u(L,t) = 0$ oder $u_t(x,0) = 0$.

Hauptlösungsstrategie für ein PDE-Problem

- Finde zunächst einen grossen Vorrat an Lösungen des **homogenen** Teils der Aufgabe, die sogenannten Basislösungen.
- Versuche danach durch geeignete Superposition der Basislösungen, die **inhomogenen** Nebenbedingungen zu erfüllen.

Hauptstrategie, um Basislösungen zu bestimmen:

Trennung der Variablen.

Trennung der Variablen

Die Methode *Trennung der Variablen*, auch **Separations- oder Produktansatz** genannt, dient der Lösung partieller Differentialgleichungen und ähnelt der Trennung der Variablen für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Wir machen einen *Produktansatz*, d.h., wir nehmen an, dass sich die Lösung einer PDE durch ein Produkt der Form

$$\boxed{u(x,t) = X(x)T(t)}$$

darstellen lässt.

Durch Ableiten und Einsetzen der separierten Funktionen $X(x)$ und $T(t)$ in die PDE erhält man eine Gleichung, die sich in zwei gewöhnliche DGL überführen lässt, die mit Hilfe von Randbedingungen lösbar sind.

Die gefundenen Lösungen von der Form $X(x)T(t)$ müssen nicht die einzigen Lösungen der PDE sein. Nach dem Superpositionsprinzip kombinieren wir aber diese Lösungen linear, um weitere Lösungen zu erhalten.

Ein Separationsansatz gilt auch mit weiteren Variablen:

$$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t) \qquad \text{oder} \qquad u(\rho,\theta,t) = R(\rho)W(\theta)T(t) \qquad \text{etc.}$$

Prototypische Probleme, die wir mit dieser Strategie lösen können

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{partielle Differentialgleichung} & \text{PDE} \\ \text{Randbedingungen} & \text{BC} \\ \text{Anfangsbedingungen} & \text{IC} \end{array}\right.$$

mit einer homogenen PDE

und homogenen/inhomogenen BC

und mit inhomogenen IC.

Zusammenfassung der Methode *Trennung der Variablen*

Schritt 1: Separationsansatz

Berücksichtige nur unbekannte Funktionen $u(x,t)$ der Form

$$\boxed{u(x,t) = X(x)T(t).}$$

Eine homogene lineare PDE zerfällt dann in ein System von linearen **ODEs** für die Funktionen $X(x)$ und $T(t)$. In den nächsten Abschnitten sind konkrete Beispiele aufgeführt.

Schritt 2: Basislösungen

Bestimme alle Lösungen $X(x)$ und $T(t)$ der ODEs von vorhin, deren Produkt $X(x)T(t)$ die homogenen Nebenbedingungen erfüllt. Diese nennen wir **Basislösungen**:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

In diesem Schritt müssen wir oft eine **Fallunterscheidung** vornehmen.

Schritt 3: Superpositionsprinzip

Versuche durch geeignete **Superposition** der Basislösungen die inhomogenen Nebenbedingungen zu erfüllen – mit Hilfe von **Fourier-Reihen**.

Das Lösen von **linearen homogenen ODEs mit konstanten Koeffizienten** (siehe Mathematik I) zusammen mit Rand- oder Anfangsbedingungen ist dann für die Lösungen von PDE-Probleme relevant.

Zur Erinnerung: $T' - kT = 0$

Die Lösungen der linearen ODE erster Ordnung mit dem konstanten Koeffizient k für die unbekannte Funktion $T(t)$ der Form

$$\boxed{T' - kT = 0}$$

sind die Exponentialfunktionen der Form

$$T(t) = ce^{kt}\ , \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}\ .$$

Daher ist die Lösung des Problems

$$\boxed{\begin{aligned} T' - kT &= 0 \\ T(0) &= T_0 \end{aligned}}$$

mit dem gegebenen Anfangswert $T(0) = T_0$ die Funktion $T(t) = T_0 e^{kt}$.

Zur Erinnerung: $X'' - k\,X = 0$

Die Lösungen der linearen ODE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die unbekannte Funktion $X(x)$ der Form

$$\boxed{X'' - k\,X = 0}$$

sind die folgenden Funktionen in Abhängigkeit von k:

$$\begin{cases} \text{Falls} \quad \underline{k = w^2 > 0}: & X(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx}\,, \qquad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}\,. \\ \text{Falls} \quad \underline{k = 0}: & X(x) = Ax + B\,, \qquad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}\,. \\ \text{Falls} \quad \underline{k = -p^2 < 0}: & X(x) = A\cos px + B\sin px\,, \qquad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Diese Fallunterscheidung müssen wir bei den Problemen mit Nebenbedingungen weiterführen. Hier sind drei typische Probleme dieser Art (L bezeichnete eine positive Konstante).

Folgerung 1:

Das Problem

$$\boxed{\begin{aligned} X'' - k\,X &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ X(L) &= 0 \end{aligned}}$$

hat die folgenden Lösungen:

$$\begin{cases} \text{Falls} \quad \underline{k = w^2 > 0}: & X(x) = 0 \qquad \text{(triviale Lösung)} \\ \text{Falls} \quad \underline{k = 0}: & X(x) = 0 \qquad \text{(triviale Lösung)} \\ \text{Falls} \quad \underline{k = -p^2 < 0}: & \text{ist } \textbf{interessant} \text{ (d.h., lässt } \textit{nicht}\text{-triviale Lösungen zu),} \\ & \text{wenn } pL = n\pi\,, \quad \text{d.h.} \quad \boxed{k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots).} \end{cases}$$

In diesem Fall sind die Lösungen die Funktionen der Form

$$X(x) = B\sin\frac{n\pi x}{L}$$

wobei B beliebig reell ist und $n = 1, 2, 3, \dots$

Folgerung 2:

Das Problem

$$\boxed{\begin{aligned} X'' - k\,X &= 0 \\ X(x+L) &= X(x) \\ \text{für alle } x \end{aligned}}$$

hat die folgenden Lösungen:

$$\begin{cases} \text{Falls} \quad \underline{k = w^2 > 0}: & X(x) = 0 \qquad \text{(triviale Lösung)} \\ \text{Falls} \quad \underline{k = 0}: & X(x) = \text{Konst.} \\ \text{Falls} \quad \underline{k = -p^2 < 0}: & \text{ist } \textbf{interessant} \text{ (d.h., lässt } \textit{nicht}\text{-triviale Lösungen zu),} \end{cases}$$

$$\text{wenn } \; pL = 2n\pi \;, \quad \text{d.h.} \quad \boxed{k = -\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots).}$$

In diesem Fall sind die Lösungen die Funktionen der Form

$$X(x) = A\cos\frac{2n\pi x}{L} + B\sin\frac{2n\pi x}{L}$$

wobei A und B beliebig reell sind und $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Folgerung 3:

Das Problem

$$\boxed{\begin{aligned} X'' - k\,X &= 0 \\ X'(0) &= 0 \\ X'(L) &= 0 \end{aligned}}$$

hat die folgenden Lösungen:

$$\begin{cases} \text{Falls} \quad \underline{k = w^2 > 0}: & X(x) = 0 \qquad \text{(triviale Lösung)} \\ \text{Falls} \quad \underline{k = 0}: & X(x) = \text{Konst.} \\ \text{Falls} \quad \underline{k = -p^2 < 0}: & \text{ist } \textbf{interessant} \text{ (d.h., lässt } \textit{nicht}\text{-triviale Lösungen zu),} \end{cases}$$

$$\text{wenn } \; pL = n\pi \;, \quad \text{d.h.} \quad \boxed{k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots).}$$

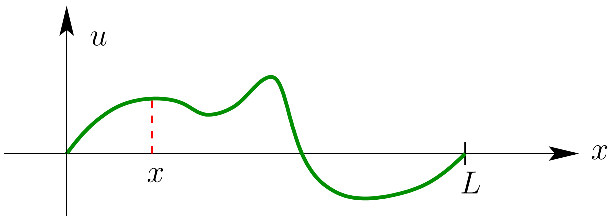
In diesem Fall sind die Lösungen die Funktionen der Form

$$X(x) = A\cos\frac{n\pi x}{L}$$

wobei A beliebig reell ist und $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

5.6 Schwingungen einer Saite – Lösung mittels FR

Problem: Schwingungen einer Saite



$u(x,t)$ = Auslenkung des Saitenpunktes mit Koordinate x zur Zeit t

$$\left\{\begin{array}{lll} \boxed{u_{tt} = c^2\, u_{xx}} & \text{für alle } 0 < x < L \text{ und } t > 0 & \text{PDE} \\[2em] u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{für alle } t \geq 0 & \text{BC} \\[1em] u(x,0) = u_0(x) & \text{für alle } 0 \leq x \leq L & \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für alle } 0 \leq x \leq L & \text{IC} \end{array}\right.$$

Lösen: Schwingungen einer Saite

Das Lösen dieses Problems erfolgt durch Trennung der Variablen.

Schritt 1

Wir berücksichtigen nur unbekannte Funktionen $u(x,t)$ der Form

$$\boxed{u(x,t) = X(x)\,T(t)\,.}$$

Für eine solche Funktion gilt

$$u_{tt} = X(x)\,T''(t) \qquad \text{und} \qquad u_{xx} = X''(x)\,T(t)\ .$$

Das Einsetzen einer solchen Funktion in die PDE (Wellengleichung) liefert dann

$$u_{tt} = c^2\, u_{xx} \quad \Longleftrightarrow \quad X(x)\,T''(t) = c^2\, X''(x)\,T(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\;.$$

dividiere durch $c^2X(x)T(t)$, wenn $X(x)T(t) \neq 0$

Wir betrachten die letzte Gleichung und bemerken, dass die linke Seite unabhängig von x ist, während die rechte Seite unabhängig von t ist. Somit müssen beide Seiten unabhängig von x *und* von t sein, also einfach konstant! Dies ist die Schlüsselbetrachtung im ersten Schritt. Die Konstante nennen wir hier k.

$$\underbrace{\frac{T''(t)}{c^2T(t)}}_{\text{unabhängig von } x} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{unabhängig von } t} = k \qquad \Rightarrow \quad \text{muss konstant sein}$$

Es folgt, dass die PDE für solche Produktfunktionen in ein System von ODEs für $X(x)$ und $T(t)$ zerfällt:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k \qquad \text{und} \qquad \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = k\,,$$

also

$$\boxed{X'' - kX = 0} \qquad \text{und} \qquad \boxed{T'' - kc^2T = 0\,.}$$

Die Lösungen solcher ODEs kennen wir schon (siehe Ende vom Abschnitt 5.5).

Schritt 2

Wir bestimmen alle Lösungen $X(x)$ und $T(t)$ der ODEs von vorhin, deren Produkt $X(x)T(t)$ die (homogenen) Randbedingungen erfüllt:

$$X(0)\,T(t) = X(L)\,T(t) = 0\;,$$

also

$$X(0) = X(L) = 0 \qquad \text{oder} \qquad T(t) = 0 \text{ für alle } t\;.$$

Die zweite Möglichkeit, nämlich $T(t) \equiv 0$, ist nicht interessant, da dann die ganze Funktion $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ stets verschwindet. Die Nullfunktion löst ja die PDE und die Randbedingungen, aber hilft nicht beim Erfüllen der Anfangsbedingungen.

Dann suchen wir nach nicht-trivialen Lösungen des Problems

$$\begin{cases} \boxed{X'' - kX = 0} \\ X(0) = X(L) = 0\;. \quad \text{BC} \end{cases}$$

Diese kommen genau dann vor, wenn $\boxed{k = -(\frac{n\pi}{L})^2 < 0,}$ und sind

$$X(x) = B \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \ \text{ und } \ B \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten nun die ODE für die Teilfunktion $T(t)$ mit $k = -(\frac{n\pi}{L})^2$. Wir definieren die Zahlen $\boxed{\lambda_n = \frac{n\pi c}{L}}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, welche *Eigenwerte* genannt werden, um diese zweite ODE kürzer schreiben zu dürfen:

$$\boxed{T'' - kc^2 T = 0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad T'' + \underbrace{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)}_{\lambda_n}{}^2 T = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T'' + \lambda_n^2 T \ = \ 0\ .$$

und diese ODE hat die folgenden Lösungen:

$$T(t) = C \cos(\lambda_n t) + D \sin(\lambda_n t), \qquad n = 1, 2, \ldots \ \text{ und } \ C, D \in \mathbb{R}.$$

Deshalb sind die folgenden Produktfunktionen Lösungen von der PDE und BC :

$$\begin{aligned} X(x) \cdot T(t) &= B \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \Big(C \cos(\lambda_n t) + D \sin(\lambda_n t) \Big) \\ &= \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \Big(C^* \cos(\lambda_n t) + D^* \sin(\lambda_n t) \Big)\ , \end{aligned}$$

wobei B, C, D, C^* und D^* reelle Konstanten sind. Wir nennen die Funktionen

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \cos(\lambda_n t) \quad \text{und} \quad \sin \frac{n\pi x}{L} \sin(\lambda_n t) \quad \textbf{Basislösungen}.$$

☞ Die **Basislösungen** eines Problems der Form

$$\begin{cases} \boxed{u_{tt} = c^2\, u_{xx}} & \boxed{\text{1D-Wellengleichung}} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \boxed{\text{homogene Dirichlet BC}} \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

sind

$$\boxed{\sin \frac{n\pi x}{L} \cos(\lambda_n t) \ \text{ und } \ \sin \frac{n\pi x}{L} \sin(\lambda_n t),\ n = 1, 2, 3, \ldots} \ \text{wobei } \lambda_n = \tfrac{n\pi c}{L}.$$

Schritt 3

Nach dem Superpositionsprinzip ist die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\,\big(C_n\cos(\lambda_n t) + D_n\sin(\lambda_n t)\big)$$

auch eine Lösung von der PDE und BC , sofern sie konvergiert.

Wir wählen die Koeffizienten C_n und D_n, so dass die Reihe auch die Anfangsbedingungen IC erfüllt:

$$\begin{cases} u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\,(C_n + 0) = \underbrace{u_0(x)}_{\text{vorgegeben}} \\[2ex] u_t(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\,(0 + \lambda_n D_n) = \underbrace{v_0(x)}_{\text{vorgegeben}} \end{cases}$$

Wir sehen, dass die geeignete Wahl ist

$$\boxed{\begin{aligned} C_n &= \text{Koeffizienten der Sinus-Reihe der gegebenen } u_0(x), \\ D_n &= \frac{1}{\lambda_n}\cdot \text{Koeffizienten der Sinus-Reihe der gegebenen } v_0(x)\,. \end{aligned}}$$

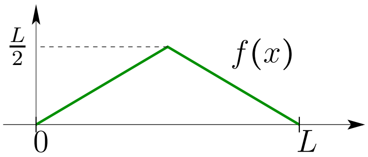
Gemäss dem Satz FR werden mit dieser Wahl sowohl die Anfangsbedingungen erfüllt, als auch die Konvergenz der Reihe.

Beispiel:

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} \boxed{u_{tt} = c^2\,u_{xx}} & \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L \quad \text{PDE} \\[2ex] u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{für alle } t \geq 0 \quad \text{BC} \\[2ex] u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } \; 0 \leq x \leq \dfrac{L}{2} \\ L - x & \text{wenn } \; \dfrac{L}{2} < x \leq L \end{cases} & \quad \text{IC} \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für alle } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Dann ist die Anfangsgestalt der Saite durch die Funktion im Beispiel vom Abschnitt 5.2 gegeben:



Die Koeffizienten b_n der Sinus-Entwicklung dieser Funktion

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} ,$$

wurden im Abschnitt 5.2 bestimmt:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad n = 2k, \\ \dfrac{4L}{n^2\pi^2} & \text{falls} \quad n = 2k+1 \text{ und } k \text{ gerade ist,} \\ \dfrac{-4L}{n^2\pi^2} & \text{falls} \quad n = 2k+1 \text{ und } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

$$= \underbrace{\tfrac{4L}{\pi^2}}_{n=1}, \underbrace{0}_{n=2}, \underbrace{-\tfrac{4L}{9\pi^2}}_{n=3}, \underbrace{0}_{n=4}, \underbrace{\tfrac{4L}{25\pi^2}}_{n=5}, \underbrace{0}_{n=6}, \underbrace{-\tfrac{4L}{49\pi^2}}_{n=7}, \ldots$$

Die Koeffizienten der Sinus-Entwicklung der Nullfunktion sind alle Null.

Es folgt, dass die Lösung des Problems durch die folgende Reihe gegeben wird

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \big(b_n \cdot \cos(\lambda_n t) + 0 \cdot \sin(\lambda_n t) \big) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos(\lambda_n t) ,$$

wobei die Koeffizienten b_n wie oben sind.

Als Annäherung dieser Lösung können wir das folgende trigonometrische Polynom (nur mit den Termen $1 \le n \le 5$) nehmen:

$$u(x,t) \sim \frac{4L}{\pi^2} \Big(\sin \frac{\pi x}{L} \cos(\lambda_1 t) - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{L} \cos(\lambda_3 t) + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{L} \cos(\lambda_5 t) \Big) ,$$

wobei $\lambda_n = \frac{n\pi c}{L}$.

Eigenschwingungen

Die Basislösungen umfassen besondere Lösungen, die wir **Eigenschwingungen** (oder **Schwingungsmoden** oder **Eigenformen**) nennen. Diese sind alle **stehende Welle**, weil die Auslenkung an bestimmten Stellen – die sogenannten **Knoten** – immer Null verbleibt.

Der Zeit-Faktor ist eine periodische Funktion,

$$\sin(\lambda_n t) \qquad \text{oder} \qquad \cos(\lambda_n t),$$

die die schwingende Eigenschaft mit der Kreisfrequenz $\lambda_n = \frac{n\pi c}{L}$ erteilt. Je grösser n ist, desto schneller diese schwingt.

Der Raumfaktor,

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \ ,$$

stellt eine sinusförmige Welle mit der Kreisfrequenz $\frac{n\pi}{L}$ und mit Knoten an die Stellen mit $\frac{n\pi x}{L} = k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, also die $n+1$ Stellen

$$\underbrace{x = 0,}_{k=0} \quad \underbrace{x = \tfrac{L}{n},}_{k=1} \quad \underbrace{x = \tfrac{2L}{n},}_{k=2} \quad \ldots \ , \quad \underbrace{x = L}_{k=n} \ .$$

Die Funktion $\sin \frac{\pi x}{L}$ (wenn $n = 1$) stellt die **Grundschwingung** der Saite und die anderen $\sin \dfrac{n\pi x}{L}$ (mit $n = 2, 3, \ldots$) die **Obertöne**. Da die Sinus und Cosinus Funktionen dadurch mit der Harmonie der Tönen (z.B. einer Gitarre) zu tun haben, nennen wir diese Funktionen *harmonische* Funktionen.

Die ersten sieben (Grundschwingung und sechs Obertöne) sind in der nächsten Figur dargestellt. Die entsprechenden Knoten sind farbig hervorgehoben.

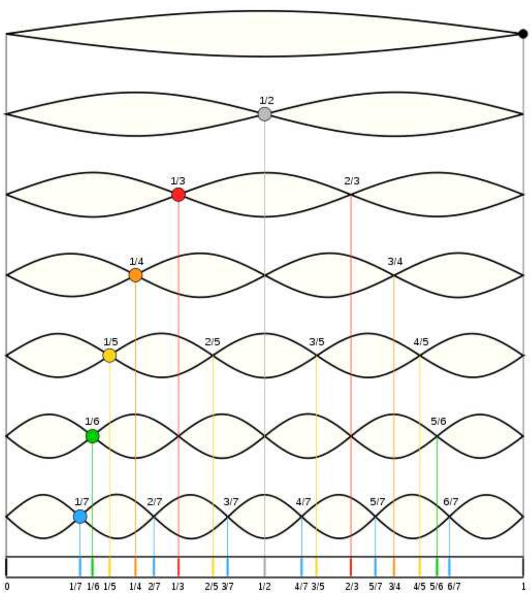


Bild von *Landmanderivative* via *Wikipedia*.

5.7 Wärmeleitung – Problemstellung

Dieser Abschnitt ist nicht Gegenstand der Prüfung.

Unter **Wärmeleitung** – auch **Wärmediffusion** oder **Konduktion** genannt – wird in der Physik der Wärmefluss in einem Feststoff oder einem ruhenden Fluid infolge eines Temperaturunterschiedes verstanden.

Wärme fliesst dabei – gemäss dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik – immer nur in Richtung geringerer Temperatur. Ferner gilt der Energieerhaltungssatz: keine Wärmeenergie geht verloren.

Wärmeleitung ist ein Mechanismus zum Transport von thermischer Energie, ohne dass dazu ein makroskopischer Materialstrom benötigt wird wie beim alternativen Mechanismus der Konvektion.

Die **Wärmeleitungsgleichung** – auch **Diffusionsgleichung** genannt – beschreibt auch andere Diffusionsprozesse. Man erhält sogar Anwendungen zur Finanzmathematik, wenn man Random-Walks durch die Wärmeleitungsgleichung beschreibt.

Diffusion ist ein natürlich ablaufender, physikalischer Prozess, der, mit der Zeit zur vollständigen Durchmischung zweier oder mehrerer Stoffe durch die gleichmässige Verteilung der beteiligten Teilchen führt.

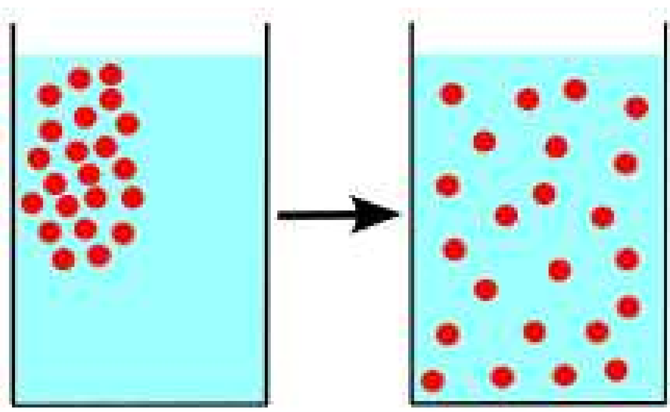
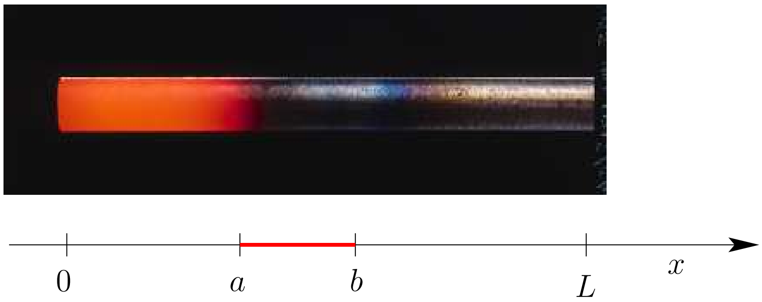


Bild von *JrPol* via *Wikipedia*.

Herleitung der 1-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten einen Metallstab der Länge $L > 0$ mit kleinem Querschnitt verglichen mit der Länge.



Wir suchen die Temperatur $u(x,t)$ zur Zeit $t \geq 0$ im Punkt $x \in [0,L]$.

Wir machen folgende Annahmen:

- keine Wärme wird von aussen hinzugefügt oder nach aussen abgegeben (Wärmeisolation);
- die Massendichte ρ (Masse pro Längeneinheit) ist konstant;
- die materialspezifische Wärmekapazität $C > 0$ (Quotient aus der Wärme, die man dem Körper zuführt, und der dadurch bewirkten Temperaturerhöhung) ist konstant.

Für jedes beliebige Teilintervall $[a,b] \subset [0,L]$ ist die Energie im entsprechenden Stabteil

$$\int_a^b \rho C\, u(x,t)\, dx.$$

Sei $j(x,t)$ der **Energiefluss** im Punkt x zur Zeit t. Ist $j(x,t) > 0$, so fliesst die Energie an der Stelle x von links nach rechts.

Nach dem **Fourier'schen Gesetz** [Fourier 1807] ist der Energiefluss proportional zum negativen Temperaturgradient:

$$j(x,t) = -k\, u_x(x,t)\,.$$

Das bedeutet, dass dort, wo grosse Temperaturunterschiede sind, auch viel Energie fliesst. Wir nehmen an, dass der Proportionalitätsfaktor $k > 0$ konstant ist.

Für eine kleine Zeitschrittweite $h > 0$ gilt die Energieerhaltungsgleichung:

$$\underbrace{\int_a^b \rho C\, u(x,t+h)\, dx}_{(1)} = \underbrace{\int_a^b \rho C\, u(x,t)\, dx}_{(2)} \ \underbrace{-h\, k\, u_x(a,t)}_{(3)_a} \ \underbrace{+h\, k\, u_x(b,t)}_{(3)_b} + \underbrace{O(h^2)}_{(4)} .$$

Dabei ist:

(1) die Energie im Intervall $[a,b]$ zur Zeit $t+h$;

(2) die Energie im Intervall $[a,b]$ zur Zeit t;

$(3)_a$ eine lineare Näherung für den Energiefluss durch die untere Grenze $x = a$ ins Intervall hinein;

$(3)_b$ eine lineare Näherung für den Energiefluss durch die Grenze $x = b$ ins Intervall hinaus;

(4) Fehlerterme der Ordnung h^2 (gemäss Taylor/Linearisierung).

Mit dem **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** erhalten wir:

$$\underbrace{\int_a^b \rho C\, u(x,t+h)\, dx}_{(1)} = \underbrace{\int_a^b \rho C\, u(x,t)\, dx}_{(2)} + \underbrace{h\, k \int_a^b u_{xx}(x,t)\, dx}_{(3)_a + (3)_b} + \underbrace{O(h^2)}_{(4)} ,$$

beziehungsweise (geteilt durch h):

$$\frac{1}{h}\Big(\int_a^b \rho C\, u(x,t+h)\, dx - \int_a^b \rho C\, u(x,t)\ dx \Big) = k \int_a^b u_{xx}(x,t)\, dx + O(h) .$$

Im Limes $h \to 0$ erhalten wir damit:

$$\rho C \int_a^b u_t(x,t)\ dx = k \int_a^b u_{xx}(x,t)\, dx .$$

Da diese Gleichung für *jedes* beliebige Intervall $[a,b]$ gelten muss, können wir daraus folgern, dass

$$\rho C\, u_t(x,t)\ dx = k u_{xx}(x,t) .$$

Setzen wir $c^2 = k/(\rho C)$, so erhalten wir die 1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung:

$$\boxed{u_t = c^2\, u_{xx} .}$$

Nebenbedingungen

Um die Temperatur im Stab zu einer beliebigen Zeit eindeutig zu bestimmen, benötigen wir sowohl die anfängliche Temperaturverteilung

$$u(x,0) = f(x), \qquad \text{IC}$$

als auch die Randbedingungen am Stabende, zum Beispiel:

- Werden die Enden auf konstanter Temperatur gehalten, so ist

$$\underbrace{u(0,t) = U_0 \ \text{ und } \ u(L,t) = U_L \ .}_{\text{(homogene/inhomogene) Dirichlet-Randbedingung}} \qquad \text{BC}$$

- Sind die Enden isoliert, findet zu keinem Zeitpunkt ein Wärmetransport durch die Ränder statt, d.h.

$$\underbrace{u_x(0,t) = 0 \ \text{ und } \ u_x(L,t) = 0 \ .}_{\text{homogene Neumann-Randbedingung}} \qquad \text{BC}$$

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung in höheren Dimensionen

Wir suchen die Temperatur $u(x,y,z,t)$ zur Zeit $t > 0$ im Punkt (x,y,z) eines Körpers im Raum mit Dichte ρ (Masse per Volumeneinheit). Wir analysieren nun ein beliebiges Teilrechteck V.

Statt eine skalare Funktion $j(x,t)$ ist der **Energiefluss** nun ein zeitabhängiges Vektorfeld $\vec{J}(x,y,z,t)$, in dessen Richtung die Energie fliesst. Nach dem **Fourier'schen Gesetz** ist der Energiefluss proportional zum negativen Temperaturgradient:

$$\vec{J}(x,y,z,t) = -k\,\vec{\nabla}\,u(x,y,z,t)\,.$$

Mit ähnlichen Annahmen wie vorhin gilt die folgende Erhaltungsgleichung für eine kleine Zeitschrittweite $h > 0$:

$$\underbrace{\iiint\limits_V \rho\, C\, u(x,y,z,t+h)\, dV}_{(1)} \;=\; \underbrace{\iiint\limits_V \rho\, C\, u(x,y,z,t)\, dV}_{(2)} \;+\; \underbrace{\iint\limits_S h\, k\, \vec{\nabla}\, u \cdot \vec{n}\, dS}_{(3)} \;+\; \underbrace{O(h^2)}_{(4)}.$$

Dabei sind:

(1) die Energie im Rechteck V zur Zeit $t + h$,

(2) die Energie im Rechteck V zur Zeit t,

(3) eine lineare Näherung für den Energiefluss durch die Oberfläche S vom Rechteck V nach aussen ($\vec{n}$ ist der nach aussen zeigende Normaleneinheitsvektor), und

(4) Fehlerterme der Ordnung h^2 (gemäss Taylor/Linearisierung).

Mit dem **Satz von Gauss** erhalten wir:

$$\rho C \iiint\limits_V \big(u(x,y,z,t+h) - u(x,y,z,t)\big)\, dV = h\, k \iiint\limits_V \operatorname{div}(\vec{\nabla}\, u)\, dV + O(h^2),$$

beziehungsweise (geteilt durch h):

$$\frac{\rho C}{h} \iiint\limits_V \big(u(x,y,z,t+h) - u(x,y,z,t)\big)\, dV = k \iiint\limits_V \operatorname{div}(\vec{\nabla}\, u)\, dV + O(h).$$

Im Limes $h \to 0$ erhalten wir damit

$$\rho C \iiint\limits_V u_t\, dV \;=\; k \iiint\limits_V \operatorname{div}(\vec{\nabla}\, u)\, dV.$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige Rechteck V gelten muss, können wir daraus folgern, dass

$$\rho\, C\, u_t \;=\; k \operatorname{div}(\vec{\nabla}\, u).$$

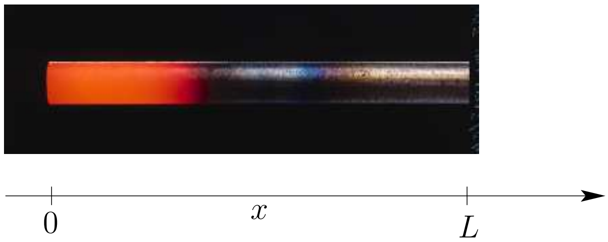
Wir erkennen den **Laplace-Operator** auf der linken Seite: $\Delta u = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

Setzen wir $c^2 = k/(\rho C)$, so erhalten wir die 3-dimensionale Wärmeleitungsgleichung:

$$\boxed{u_t = c^2\, \Delta u\,.}$$

5.8 Wärmeleitung in einem Stab – Lösung mittels FR

Problem: Wärmeleitung in einem Stab



$u(x,t) =$ Temperatur des Stabpunktes mit Koordinate x zur Zeit t $(0 \le x \le L,\ t \ge 0)$

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} & \text{für alle } 0 < x < L \text{ und } t > 0 \quad \text{PDE} \\[2ex] u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{für alle } t \ge 0 \quad \text{BC} \\[2ex] u(x,0) = f(x) & \text{für alle } 0 \le x \le L. \quad \text{IC} \end{cases}$$

Lösen: Wärmeleitung in einem Stab

Die Lösung dieses Problems erfolgt durch Trennung der Variablen.

Schritt 1

Wir berücksichtigen nur unbekannte Funktionen $u(x,t)$ der Form

$$\boxed{u(x,t) = X(x)\,T(t)\,.}$$

Für eine solche Funktion gilt

$$u_t = X(x)\,T'(t) \qquad \text{und} \qquad u_{xx} = X''(x)\,T(t)\ .$$

Das Einsetzen einer solchen Funktion in die PDE (Wärmeleitungsgleichung) liefert dann

$$u_t = c^2\,u_{xx} \iff X(x)\,T'(t) = c^2\,X''(x)\,T(t) \iff \frac{T'(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}\ .$$

dividiere durch $X(x)T(t)$, wenn $X(x)T(t) \neq 0$

Wir betrachten die letzte Gleichung und bemerken, dass die linke Seite unabhängig von x ist, während die rechte Seite unabhängig von t ist. Somit müssen beide Seiten unabhängig von x *und* von t sein, also einfach konstant! Dies ist die Schlüsselbetrachtung im ersten Schritt. Die Konstante nennen wir hier k.

$$\underbrace{\frac{T'(t)}{c^2T(t)}}_{\text{unabhängig von } x} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{unabhängig von } t} = k \quad \Rightarrow \quad \text{muss konstant sein}$$

Es folgt, dass die PDE für solche Produktfunktionen in ein System von ODEs für $X(x)$ und $T(t)$ zerfällt:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k \qquad \text{und} \qquad \frac{T'(t)}{c^2T(t)} = k\,,$$

also

$$\boxed{X'' - kX = 0} \qquad \text{und} \qquad \boxed{T' - kc^2T = 0\,.}$$

Die Lösungen solcher ODEs kennen wir schon (siehe Ende vom Abschnitt 5.5).

Schritt 2

Wie für die Wellengleichung (siehe Abschnitt 5.6) bestimmen wir alle Lösungen $X(x)$ und $T(t)$ der ODEs von vorhin, deren Produkt $X(x)T(t)$ die (homogenen) Randbedingungen erfüllt:

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0\,,$$

also

$$X(0) = X(L) = 0 \qquad \text{oder} \qquad T(t) = 0 \text{ für alle } t\,.$$

Die zweite Möglichkeit, nämlich $T(t) \equiv 0$, ist nicht interessant, da dann die ganze Funktion $u(x,t) = X(x)T(t)$ stets verschwindet. Die Nullfunktion löst ja die PDE und die Randbedingungen, aber hilft nicht beim Erfüllen der Anfangsbedingungen.

Dann suchen wir nach nicht-trivialen Lösungen des Problems

$$\begin{cases} \boxed{X'' - kX = 0} \\ X(0) = X(L) = 0\,. \quad \text{BC} \end{cases}$$

Déjà-vu... Diese kommen genau dann vor, wenn $\boxed{k = -(\frac{n\pi}{L})^2 < 0,}$ und sind dann

$$X(x) = B\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1,2,3,\dots \text{ und } B \in \mathbb{R}\,.$$

Wir betrachten nun die ODE für die Teilfunktion $T(t)$ mit $k = -(\frac{n\pi}{L})^2$. Wir definieren die Zahlen $\boxed{\lambda_n = \frac{n\pi c}{L}}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, welche *Eigenwerte* genannt werden, um diese zweite ODE kürzer schreiben zu dürfen:

$$\boxed{T' - kc^2 T = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad T' = -\underbrace{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)}_{\lambda_n}{}^2 T \quad \Longleftrightarrow \quad T' = -\lambda_n^2 T\ .$$

Diese Gleichung besitzt die folgenden Lösungen:

$$T(t) = C\, e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad n = 1, 2, \ldots \ \text{ und } \ C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshalb sind die folgenden Produktfunktionen Lösungen von der PDE und BC :

$$\begin{aligned} X(x) \cdot T(t) &= B \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot C\, e^{-\lambda_n^2 t} \\ &= B^* e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}\ , \end{aligned}$$

wobei B, C und B^* reelle Konstanten sind. Wir nennen die Funktionen

$$u_n(x,t) \ = \ e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad \textbf{Basislösungen}.$$

☞ Die **Basislösungen** eines Problems der Form

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} & \boxed{\text{1D-Wärmeleitungsgleichung}} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \boxed{\text{homogene Dirichlet BC}} \\ u(x,0) = f(x) & \end{cases}$$

sind

$$\boxed{e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}\ , \ n = 1, 2, 3, \ldots} \ \text{wobei } \lambda_n = \tfrac{n\pi c}{L}.$$

Schritt 3

Nach dem Superpositionsprinzip ist die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-\lambda_n^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

auch eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung und der BC, sofern sie konvergiert.

Wir wählen die Koeffizienten B_n, sodass die Reihe auch die Anfangsbedingung IC erfüllt. Das heisst, dass der Wert der Reihe zur Zeit $t = 0$, gleich der gegebenen Anfangstemperaturverteilung sein soll (sofern die Reihe konvergiert):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \underbrace{f(x)}_{\text{vorgegeben}} \quad .$$

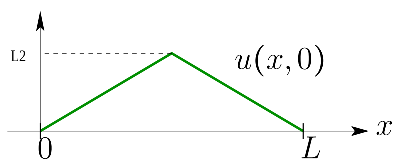
Deshalb sollen die B_n als **Koeffizienten der Sinus-Reihe** (d.h. die Fourier-Reihe der ungeraden und $2L$-periodischen Fortsetzung) der Anfangsfunktion $f(x)$ gewählt werden.

Beispiel:

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} & \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L \quad \text{PDE} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{für alle } t \geq 0 \quad \text{BC} \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ L - x & \text{wenn } \frac{L}{2} \leq x \leq L\,. \end{cases} & \text{IC} \end{cases}$$

Dann ist die Anfangstemperaturverteilung auf dem Stab durch die Funktion im Beispiel vom Abschnitt 5.2 gegeben:



Die Koeffizienten b_n der Sinus-Entwicklung dieser Funktion

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} ,$$

wurden im Abschnitt 5.2 bestimmt:

$$\begin{aligned} b_n &= \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad n = 2k, \\ \dfrac{4L}{n^2\pi^2} & \text{falls} \quad n = 2k+1 \text{ und } k \text{ gerade ist,} \\ \dfrac{-4L}{n^2\pi^2} & \text{falls} \quad n = 2k+1 \text{ und } k \text{ ungerade ist.} \end{cases} \\ &= \underbrace{\tfrac{4L}{\pi^2}}_{n=1}, \underbrace{0}_{n=2}, \underbrace{-\tfrac{4L}{9\pi^2}}_{n=3}, \underbrace{0}_{n=4}, \underbrace{\tfrac{4L}{25\pi^2}}_{n=5}, \underbrace{0}_{n=6}, \underbrace{-\tfrac{4L}{49\pi^2}}_{n=7}, \ldots \end{aligned}$$

Deshalb ist die Lösung dieses Problems durch die folgende Reihe gegeben:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L} ,$$

wobei $\lambda_n = \frac{n\pi c}{L}$ und die Koeffizienten b_n wie oben sind.

Bemerkung: Diese Lösung lässt sich alternativ in Bezug auf einen Parameter k (mit $n = 2k+1$) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k 4L}{(2k+1)^2\pi^2}}_{B_{2k+1}} e^{-\lambda_{2k+1}^2 t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{L} \\ &= \frac{4L}{\pi^2} \Big(\underbrace{e^{-\lambda_1^2 t} \sin \frac{\pi x}{L}}_{k=0} \underbrace{- \frac{1}{9} \, e^{-\lambda_3^2 t} \sin \frac{3\pi x}{L}}_{k=1} \underbrace{+ \frac{1}{25} \, e^{-\lambda_5^2 t} \sin \frac{5\pi x}{L}}_{k=2} - \ldots \Big) \end{aligned}$$

wobei $\lambda_{2k+1} = \frac{(2k+1)\pi c}{L}$.

Als Annäherung dieser Lösung können wir die folgende Summe (nur mit den Termen $1 \le n \le 5$) nehmen:

$$u(x,t) \sim \frac{4L}{\pi^2} \Big(e^{-\lambda_1^2 t} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{9} \, e^{-\lambda_3^2 t} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{25} \, e^{-\lambda_5^2 t} \sin \frac{5\pi x}{L} \Big) ,$$

wobei $\lambda_n = \frac{n\pi c}{L}$.

5.9 Variationen zum Thema Trennung der Variablen illustriert durch Wärmeleitung

a) Homogene Dirichlet-Randbedingungen

Ein Beispiel von Wärmeleitung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen haben wir gerade im Abschnitt 5.8 gelöst. Wir werden hier einen elementaren Spezialfall angehen.

Spezialfall: wenn der Anfangszustand durch ein geeignetes trigonometrisches Polynom beschrieben ist

Beispiel:

Wir betrachten nun den folgenden Fall der **Wärmeleitung in einem Stab**:

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} & \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L \quad \text{PDE} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{für alle } t \geq 0 \quad \text{BC} \\ u(x,0) = 2\sin\frac{3\pi x}{L} - \frac{1}{5}\sin\frac{8\pi x}{L} & \text{für alle } 0 \leq x \leq L \quad \text{IC} \end{cases}$$

Dann ist die Anfangstemperaturverteilung durch ein trigonometrisches Polynom gegeben. Die Bestimmung der Fourier-Reihe eines trigonometrischen Polynoms mit geeigneten Frequenzen ist unmittelbar: In diesem Fall besitzt die Sinus-Entwicklung der Funktion

$$u(x,0) \;=\; \mathbf{2}\sin\frac{3\pi x}{L} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\sin\frac{8\pi x}{L} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

unübersehbar die Koeffizienten

$$B_3 = 2, \qquad B_8 = -\frac{1}{5} \qquad \text{und alle anderen } B_n = 0.$$

Deshalb ist die Lösung dieses Problems wie folgt:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-\lambda_1^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L} = \underbrace{2}_{B_3}\; e^{-\lambda_3^2 t}\sin\frac{3\pi x}{L} \underbrace{-\frac{1}{5}}_{B_8}\; e^{-\lambda_8^2 t}\sin\frac{8\pi x}{L}$$

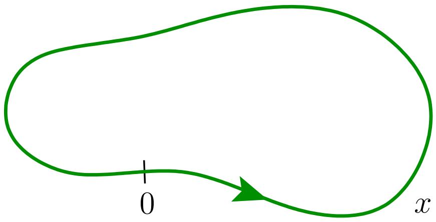
$$= 2\, e^{-(\frac{3\pi c}{L})^2 t}\sin\frac{3\pi x}{L} - \frac{1}{5}\, e^{-(\frac{8\pi c}{L})^2 t}\sin\frac{8\pi x}{L}\,.$$

Übung: Überprüfe diese Lösung durch Einsetzen ins gegebene Problem.

b) Periodizitätsbedingung

Wärmeleitung im geschlossenen Draht

Draht der
Länge L



$u(x,t)$ = Temperatur des Drahtpunktes mit Koordinate x zur Zeit t

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} & \text{PDE} \\[2ex] u(x+L,t) = u(x,t) \;\; \text{für alle } (x,t) & \text{BC} \\ \text{(Periode } L \text{ für die Variable } x\text{)} & \\[2ex] u(x,0) = f(x) & \text{IC} \end{cases}$$

Die Lösung dieses Problems erfolgt durch Trennung der Variablen.

Schritt 1

Für Funktionen $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ zerfällt die Wärmeleitungsgleichung in das System von ODEs von vorhin:

$$\boxed{X'' - kX = 0} \qquad \text{und} \qquad \boxed{T'' - kc^2 T = 0\ ,}$$

wobei k eine beliebige reelle Zahl ist.

Schritt 2

Wir bestimmen alle Lösungen dieser ODEs, deren Produkt $X(x)\,T(t)$ die L-Periodizitätsbedingung erfüllt.

$$\begin{aligned} & X(x+L)\,T(t) = X(x)\,T(t) \\ \iff\; & \big(X(x+L) - X(x)\big)\,T(t) = 0 \\ \iff\; & \boxed{X(x+L) = X(x) \text{ für alle } x} \quad \text{oder} \quad \underbrace{T(t) = 0 \text{ für alle } t\,.}_{\text{die Nulllösung ist nicht interessant}} \end{aligned}$$

Das Problem

$$\begin{cases} \boxed{X'' - kX = 0} \\ X(x+L) = X(x) \text{ für alle } x \qquad \text{BC} \end{cases}$$

besitzt nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn (cf. Ende vom Abschnitt 5.5) $\boxed{k = -(\frac{2n\pi}{L})^2}$ und die sind dann von der Form

$$X(x) = A\cos\frac{2n\pi x}{L} + B\sin\frac{2n\pi x}{L} \qquad n = 0,1,2,\dots \text{ und } A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Die Lösungen von $\boxed{T' - kc^2T = 0}$ für solche k sind

$$T(t) = C\, e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad \text{wobei } \lambda_n = \frac{2n\pi c}{L}\,, \quad n = 0,1,2,\dots \text{ und } C \in \mathbb{R}\,.$$

Somit sind die folgenden Funktionen Lösungen von PDE und BC

$$\begin{aligned} X(x)\cdot T(t) &= \left(A\cos\frac{2n\pi x}{L} + B\sin\frac{2n\pi x}{L}\right)\cdot C\, e^{-\lambda_n^2 t} \\ &= \left(A^*\cos\frac{2n\pi x}{L} + B^*\sin\frac{2n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 t} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten A, B, A^* und B^* sind reelle Konstanten und $n = 0,1,\dots$. Wir nennen die Funktionen

$$1,\; e^{-\lambda_n^2 t}\cos\frac{2n\pi x}{L} \text{ und } e^{-\lambda_n^2 t}\sin\frac{2n\pi x}{L} \; (n = 1,2,\dots) \qquad \textbf{Basislösungen}.$$

☞ Die **Basislösungen** eines Problems der Form

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} & \boxed{\text{1D-Wärmeleitungsgleichung}} \\ u(x+L,t) = u(x,t) = 0 \text{ für alle } x & \boxed{\text{Periodizitäts BC}} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

sind

$$\boxed{1,\; e^{-\lambda_n^2 t}\cos\frac{2n\pi x}{L} \text{ und } e^{-\lambda_n^2 t}\sin\frac{2n\pi x}{L}\,,\; n = 1,2,\dots} \text{ wobei } \lambda_n = \frac{2n\pi c}{L}.$$

Schritt 3

Nach dem Superpositionsprinzip ist die Reihe

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

auch eine Lösung von der PDE und BC, sofern sie konvergiert.

Wir wählen die Koeffizienten A_n und B_n, so dass die Reihe auch die Anfangsbedingungen IC erfüllt:

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right) = \underbrace{f(x)}_{\text{vorgegeben}}$$

Wir vergleichen mit der Fourier-Reihe von $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right)$$

und sehen, dass die passende Wahl der Koeffizienten ist:

$$\boxed{\begin{array}{llll} A_0 & = \frac{a_0}{2}, & A_n & = a_n = n\text{-ter Koeff. von } \cos \text{ in der FR von } f(x), \\ & & B_n & = b_n = n\text{-ter Koeff. von } \sin \text{ in der FR von } f(x). \end{array}}$$

So ergibt sich die Lösung des ganzen Problems.

Beispiel:

Ist die Anfangstemperaturverteilung des Drahtes durch

$$f(x) = 33 + \frac{2}{3} \sin \frac{4\pi x}{L} - \cos \frac{6\pi x}{L}$$

gegeben, so erhalten wir die folgende Lösung des ganzen Problems:

$$u(x,t) = \underbrace{33}_{A_0} \underbrace{+\tfrac{2}{3}}_{B_2} e^{-\lambda_2^2 t} \sin \frac{4\pi x}{L} \underbrace{-}_{A_3} e^{-\lambda_3^2 t} \cos \frac{6\pi x}{L}$$

Alle andere Koeffizienten sind in diesem Fall Null.

Übung: Überprüfe diese Lösung durch Einsetzen ins gegebene Problem.

c) Homogene Neumann-Randbedingungen

Wir betrachten die **Wärmeleitung in einem Stab mit adiabatischem Ende**, d.h. keine Wärme wird mit der Umgebung ausgetauscht.

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} \quad \text{für alle } 0 < x < L \text{ und } t > 0 & \text{PDE} \\[2ex] u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \qquad \text{für alle } t \geq 0 & \text{BC} \\[2ex] u(x,0) = f(x) \qquad \text{für alle } 0 \leq x \leq L. & \text{IC} \end{cases}$$

Die Lösung dieses Problems erfolgt durch Trennung der Variablen.

Schritt 1

Für Funktionen $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ zerfällt die Wärmeleitungsgleichung in das System von ODEs von vorhin:

$$\boxed{X'' - kX = 0} \qquad \text{und} \qquad \boxed{T' - kc^2 T = 0\,,}$$

wobei k eine beliebige reelle Zahl ist.

Schritt 2

Wir bestimmen alle Lösungen dieser ODEs, deren Produkt $X(x)\,T(t)$ die Randbedingung erfüllt.

$$X'(0)\,T(t) = X'(L)\,T(t) = 0 \iff \boxed{X'(0) = X'(L) = 0} \text{ oder } \underbrace{T(t) = 0 \text{ für alle } t}_{\text{die Nulllösung ist nicht interessant}}\,.$$

Das Problem

$$\begin{cases} \boxed{X'' - kX = 0} \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \quad \text{BC}$$

besitzt nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn (cf. Ende vom Abschnitt 5.5) $\boxed{k = -(\frac{n\pi}{L})^2 \leq 0}$ und die sind dann von der Form

$$X(x) = A\cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \; A \in \mathbb{R}\,.$$

Die Lösungen von $\boxed{T' - kc^2\,T = 0}$ für solche k sind

$$T(t) = C\,e^{-\lambda_n^2\,t}, \qquad \text{wobei } \lambda_n = \frac{n\pi c}{L},\; n = 0, 1, 2, \ldots \text{ und } C \in \mathbb{R}\,.$$

Somit sind die folgenden Funktionen Lösungen von PDE und BC

$$X(x) \cdot T(t) = A^* \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot e^{-\lambda_n^2 t}.$$

Die Koeffizienten A^* sind reelle Konstanten und $n = 0, 1, \ldots$. Wir nennen die Funktionen

$$e^{-\lambda_n^2 t} \cos \frac{n\,\pi x}{L} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \textbf{Basislösungen}.$$

☞

Die **Basislösungen** eines Problems der Form

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} & \boxed{\text{1D-Wärmeleitungsgleichung}} \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & \boxed{\text{homogene Neumann BC}} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

sind

$$\boxed{1\ ,\ e^{-\lambda_n^2 t} \cos \frac{n\,\pi x}{L}\ ,\ n = 1, 2, \ldots} \quad \text{wobei } \lambda_n = \tfrac{n\pi c}{L}.$$

Die Basislösung für $n = 0$ wurde als Konstante 1 eingetragen, da $\lambda_0 = 0$ und somit $e^{-\lambda_0^2 t} \cos \frac{0\,\pi x}{L} = 1$.

Schritt 3

Nach dem Superpositionsprinzip ist die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, e^{-\lambda_n^2 t} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

die Lösung des ganzen Problems, falls die A_n die **Koeffizienten der Cosinus-Reihe** von $u(x,0)$ sind.

Ausblick

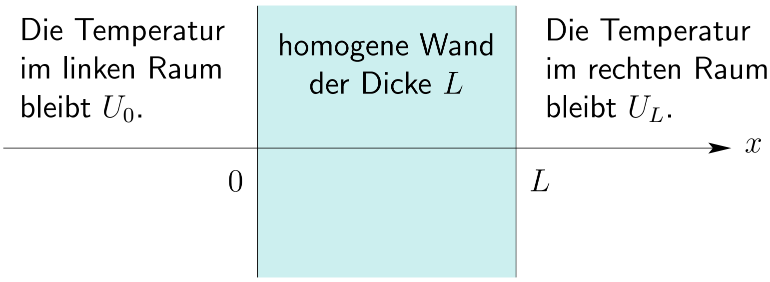
Die Fourier-Entwicklungen (d.h. Reihen von Cosinus- und Sinus-Funktionen), die für die Lösung dieser PDE-Probleme nützlich sind, sind der erste Fall von Entwicklungen nach speziellen Funktionen, die für die Lösung von anderen PDE-Probleme nützlich sind. Zum Beispiel spielen Fourier-Bessel-Entwicklungen (d.h. Reihen von *Bessel Funktionen*) bei der Lösung von Problemen auf rotationssymmetrischen Modellen eine wichtige Rolle. Im Allgemeinen sind **Sturm-Liouville-Probleme** PDE-Probleme, dessen Lösen durch Trennung der Variablen, Superpositionsprinzip und solche fourierartige Entwicklungen erfolgt.

d) Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen

Bei *inhomogenen* Randbedingungen brauchen wir ein neues Verfahren, um Trennung der Variablen zu unterstützen. Die **Methode der stationären Lösung** ist ein solches Verfahren, die wir hier in einem Wärmeleitungsproblem erklären.

Wärmeleitung in einer Wand

Wir betrachten zwei Räume getrennt durch eine dicke Wand und analysieren die Temperatur entlang der Wand in Abhängigkeit der Tiefenkoordinate x und der Zeit t.



Sei $u(x,t)$ = Temperatur eines Wandpunktes mit Tiefenkoordinate x zur Zeit t. Das mathematisches Modell ist ein Problem mit *inhomogenen* Dirichlet-Randbedingungen:

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} & \text{für alle } 0 < x < L \text{ und } t > 0 \quad \text{PDE} \\[2ex] u(0,t) = U_0,\ u(L,t) = U_L & \text{für alle Zeiten } t \geq 0 \quad \text{BC} \\[2ex] u(x,0) = f(x) & \text{für alle } 0 \leq x \leq L \quad \text{IC} \end{cases}$$

Dieses Problem mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen und lässt sich mit der *Methode der stationären Lösung* lösen:

1. Wir bestimmen zunächst eine **stationäre** Lösung $u^*(x)$ des Teilproblems

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} & \text{für } 0 < x < L \text{ und } t > 0 \quad \text{PDE} \\[2ex] u(0,t) = U_0,\ u(L,t) = U_L & \text{für } t \geq 0 \quad \text{BC} \end{cases}$$

d.h. eine Lösung u^*, die **unabhängig von der Zeit** ist: $u_t^* = 0$.

Bestimmung der stationären Lösung:

$$\begin{cases} \boxed{0 = c^2\, u^*_{xx}} \\ u^*(0) = U_0,\ u^*(L) = U_L \end{cases} \iff \begin{cases} u^*(x) = Ax + B \\ u^*(0) = U_0,\ u^*(L) = U_L \end{cases}$$

$$\iff \boxed{u^*(x) = \frac{U_L - U_0}{L}\, x + U_0.}$$

2. Für die gesuchte Lösung des vollständigen Problems machen wir den **Ansatz**

$$\boxed{u(x,t) = u^*(x) + v(x,t)}\,,$$

wobei die Funktion $v(x,t)$ das folgende Problem erfüllen soll:

$$\begin{cases} \boxed{v_t = c^2\, v_{xx}} & \text{PDE} \\ v(0,t) = \mathbf{0},\ v(L,t) = \mathbf{0} \ \text{ für alle Zeiten } t \geq 0 & \text{BC} \\ \qquad \text{homogene BC} & \\ v(x,0) = \underbrace{f(x) - u^*(x)}_{\text{angepasste Anfangsfunktion!}} & \text{IC} \end{cases}$$

Die Randbedingungen für $v(x,t)$ sind nun homogen, deshalb lässt sich $v(x,t)$ wie vorher bestimmen (siehe Abschnitt 5.8).

Schritt 1: Separationsansatz $v(x,t) = X(x)\,T(t)$.

Schritt 2: Basislösungen, die die homogenen BC erfüllen.

Schritt 3: Sinus-Entwicklung von $v(x,0) = f(x) - u^*(x)$.

Zusammenfassung der Methode der stationären Lösung:
Die Lösung des gegebenen Problems ist

$$\boxed{u(x,t) \ = \ u^*(x) + v(x,t)}$$

mit

- $u^*(x) \ = \ \frac{U_L - U_0}{L}\, x + U_0$
- $v^*(x,t) \ = \ $ Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit homogenen BC und mit IC $v(x,0) = f(x) - u^*(x)$.

Beispiel:

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} & \text{für alle } 0 < x < \pi \text{ und } t > 0 \qquad \text{PDE} \\[2ex] u(0,t) = 33,\ u(\pi,t) = 33 + \pi & \text{für alle Zeiten } t \qquad \text{BC} \\[2ex] u(x,0) = 33 + (1-\pi)x + x^2 & \text{für alle } 0 \le x \le \pi. \qquad \text{IC} \end{cases}$$

Also hier sind

$$L = \pi, \quad U_0 = 33, \quad U_L = 33 + \pi \quad \text{und} \quad u(x,0) = 33 + (1-\pi)\,x + x^2\,.$$

Mit diesen Parametern ist die **stationäre Lösung** $u^*(x) = x + 33$.
Die ganze Lösung ist von der Form

$$u(x,t) = u^*(x) + v(x,t),$$

wobei $v(x,t)$ die Lösung des folgenden Problems ist:

$$\begin{cases} v_t = c^2\, v_{xx} \\ v(0,t) = 0,\ v(\pi,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - u^*(x) = x^2 - \pi x\,. \end{cases}$$

Wir brauchen nun die Koeffizienten, b_n, der Sinus-Reihe von $x^2 - \pi x$ für $0 < x < \pi$:

$$b_n = \underset{\substack{\uparrow \\ T = 2\pi}}{\frac{4}{2\pi}} \int_0^\pi (x^2 - \pi x)\, \sin \underbrace{\frac{2n\pi x}{2\pi}}_{= nx}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partielle} \\ \text{Integration}}}{=} \cdots = \begin{cases} -\dfrac{8}{\pi n^3} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ & (n = 2k+1,\ k = 0, 1, \dots) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Lösung des Problems ist dann

$$u(x,t) = x + 33 - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_{2k+1}^2 t}}{(2k+1)^3}\, \sin\big((2k+1)\,x\big),$$

wobei $\lambda_{2k+1} = (2k+1)\,c$, da $L = \pi$.

5.10 Die Potentialgleichung

Die **Potential- oder Laplace-Gleichung** (nach Pierre-Simon Laplace, 1749-1827) ist die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\boxed{\Delta u = 0}$$

für eine skalare Funktion u in einem ebenen oder räumlichen Gebiet, wobei Δ den Laplace-Operator darstellt. Die Potentialgleichung ist der Prototyp einer elliptischen partiellen Differentialgleichung.

Die Bedeutung der Potentialgleichung umfasst mehrere Teilbereiche der Physik wie Wärmeleitung, Fluiddynamik, Elektrostatik, etc.

Bezug auf Wärmeleitung

Die Wärmeleitungsgleichung modelliert ein Temperaturgefälle:

- Im 1-dimensionalen Fall $u_t = c^2\, u_{xx}$ oder
- in höher-dimensionalen Fällen $u_t = c^2\, \Delta u$.

Ist eine Temperaturverteilung u stationär, d.h. unabhängig von der Zeit t, so ist die Zeitableitung Null und u erfüllt die Potentialgleichung:

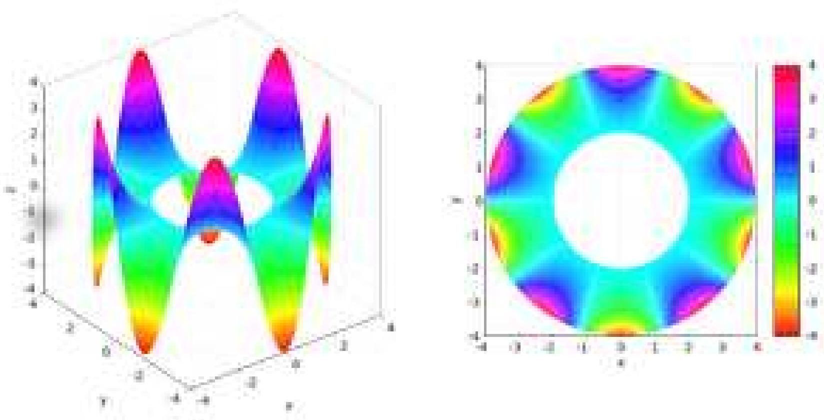
- Im 1-dimensionalen Fall $u_{xx} = 0$ oder
- in höher-dimensionalen Fällen $\Delta u = 0$.

Die Potentialgleichung lässt sich also als stationärer Fall der Wärmeleitungsgleichung betrachten. Dies wird als **stationäre Wärmeleitung** bezeichnet.

Ein 1-dimensionales Beispiel hierfür ist ein Metallstab, unter welchem an einem Ende eine Kerze steht und dessen anderes Ende mittels Eiswasser gekühlt wird. Auf dem Stab wird sich nach einiger Zeit ein zeitlich konstantes Temperaturgefälle $u(x)$ ausbilden, welches die Gleichung $u'' = 0$ erfüllt (seitlicher Temperaturaustausch mit der Umgebung wird vernachlässigt). Die Funktion $u(x)$ ist deshalb linear.

Ein höher-dimensionales praktisches Beispiel findet sich in der Isolierung von Häusern. Die Heizung im Inneren ist dabei die Kerze und die kalte Aussenluft das Eiswasser.

Wir bemerken, dass die materialspezifische Konstante c^2 nicht mehr relevant ist. Damit sind die Lösungen der Potentialgleichung *rein geometrisch*: sie hängen nur von der Form des Gebietes ab und nicht von anderen Stoffeigenschaften. Die Lösungen der Potentialgleichung werden als **harmonische Funktionen** bezeichnet.



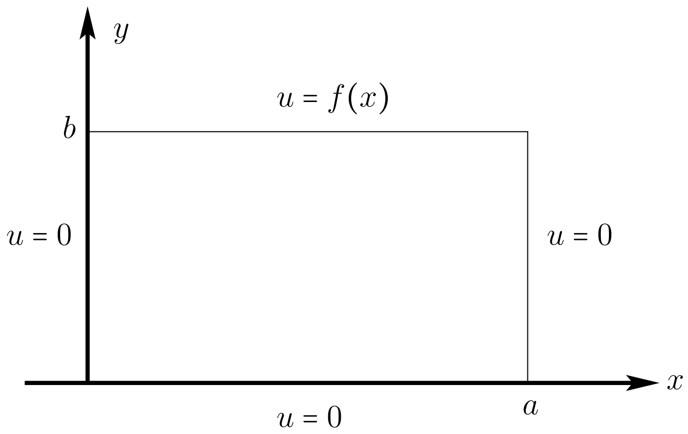
Eine harmonische Funktion in einem Kreisring

5.11 Stationäre Wärmeleitung in zwei Dimensionen mittels FR

Wir betrachten eine rechteckige Platte der Breite a und Höhe b und stationäre Wärmeleitung darüber. Die Platte sei dünn und lasse sich als Oberfläche modellieren. Sei $u(x, y)$ die Temperatur des Plattenpunktes mit Koordinaten x und y ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$).

Sei die Temperatur auf der unteren, rechten und linken Seite konstant gleich Null. } homogene Randbedingung

Sei $f(x)$ die Temperatur auf der oberen Seite. } inhomogene Randbedingung



Das mathematische Modell ist dann für alle $0 < x < a$ und $0 < y < b$:

$$
\begin{cases}
\boxed{\Delta u = 0} & \text{PDE} \\[2em]
u(x,0) = u(0,y) = u(a,y) = 0 & \\
u(x,b) = f(x) & \text{BC}
\end{cases}
$$

Die Lösung dieses Problems erfolgt durch Trennung der Variablen.

Schritt 1

Wir berücksichtigen nur unbekannte Funktionen $u(x,y)$ der Form

$$\boxed{u(x,y) = X(x)\,Y(y)\,.}$$

Das Einsetzen einer solchen Funktion in die PDE liefert

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{unabhängig von } y} = \underbrace{-\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{\text{unabhängig von } x} = k \quad \Rightarrow \quad \text{muss konstant sein}$$

und die PDE zerfällt in ein System von ODEs für $X(x)$ und $Y(y)$:

$$\boxed{X'' - kX = 0} \qquad \text{und} \qquad \boxed{Y'' + kY = 0\,.}$$

Schritt 2

Wie zuvor bestimmen wir alle Lösungen $X(x)$ und $Y(y)$ der ODEs, deren Produkt $X(x)\,Y(y)$ die homogenen Randbedingungen erfüllt:

$$X(0)\,Y(y) = X(a)\,Y(y) = 0$$

d.h.,

$$X(0) = X(a) = 0$$

(sonst ergibt sich die triviale Lösung).

Nicht-triviale Lösungen des Systems

$$\begin{cases} \boxed{X'' - kX = 0} \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \qquad \text{BC}$$

kommen genau dann vor, wenn $\boxed{k = -(\frac{n\pi}{L})^2 < 0,}$ und sind

$$X(x) = C \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots, \ C \in \mathbb{R}.$$

Für $k = -(\frac{n\pi}{a})^2$ erhalten wir folgende ODE für die Teilfunktion $Y(y)$:

$$\boxed{Y'' + kY = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad Y'' = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y.$$

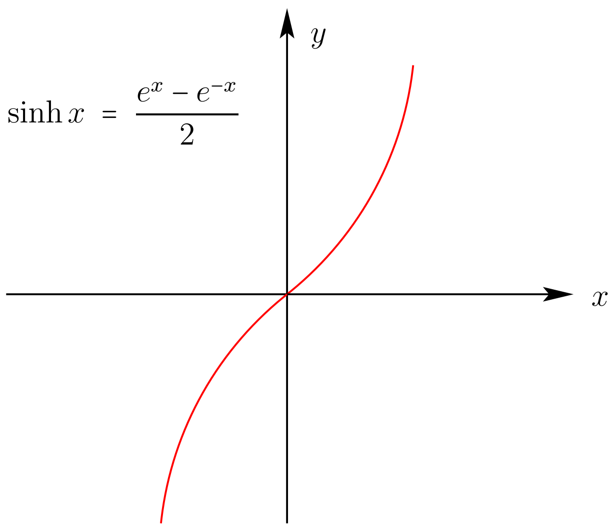
Sie hat die folgenden Lösungen:

$$Y(y) = A\, e^{\frac{n\pi}{a} y} + B\, e^{-\frac{n\pi}{a} y}, \quad n = 1, 2, \ldots, A, B \in \mathbb{R}\ .$$

Die untere Randbedingung $u(x, 0) = 0$ liefert $y(0) = A + B = 0$ und deshalb $B = -A$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} Y(y) &= A\left(e^{\frac{n\pi}{a} y} - e^{-\frac{n\pi}{a} y}\right) \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{Sinus Hyperbolicus}}}{2A \ \sinh} \frac{n\pi y}{a}. \end{aligned}$$

Zur Erinnerung:



Deshalb sind Vielfache von Funktionen der Form

$$X(x)Y(y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\,\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

Lösungen der PDE und des homogenen Teils von BC. Diese Funktionen nennen wir **Basislösungen**.

☞ Die **Basislösungen** eines Problems der Form

$$\begin{cases} \boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0} & \boxed{\text{Potentialgleichung}} \\ u(x,0) = u(0,y) = u(a,y) = 0 & \boxed{\text{3 x homogene Dirichlet BC}} \\ u(x,b) = f(x) & \end{cases}$$

sind

$$\boxed{\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sinh\frac{n\pi y}{a}\,, \quad n = 1, 2, \ldots.}$$

Schritt 3

Nach dem Superpositionsprinzip ist die Reihe

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

auch eine Lösung der Potentialgleichung und der homogenen Randbedingungen, sofern sie konvergiert.

Wir wählen die Koeffizienten C_n so, dass die Reihe auch die inhomogene Randbedingung $u(x,b) = f(x)$ erfüllt. Das heisst, dass der Wert der Reihe für $y = b$

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin\frac{n\pi x}{a}\,\underbrace{\sinh\frac{n\pi b}{a}}_{\text{Konstanten}}$$

gleich der Funktion $f(x)$ sein soll. Deshalb müssen die Produkte

$$C_n \sinh\frac{n\pi b}{a}$$

als Koeffizienten der Sinus-Reihe von $f(x)$ gewählt werden, also

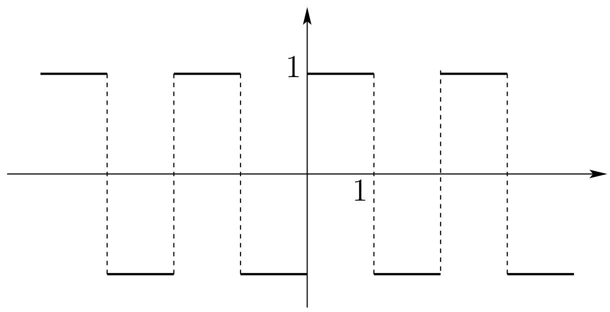
$$\boxed{C_n = \frac{1}{\sinh\frac{n\pi b}{a}} \cdot n\text{-ter Koeffizient der Sinus-Reihe von } f(x).}$$

Beispiel:

Ist die Platte quadratisch mit Masse $a = b = 1$ und ist $f(x)$ konstant gleich 1, nehmen wir

$$C_n = \frac{1}{\sinh(n\pi)} \cdot n\text{-ter Koeffizient der Sinus-Reihe von } f(x),$$

wobei die Sinus-Reihe von $f(x)$ die Fourier-Reihe einer *Square-Wave* ist.

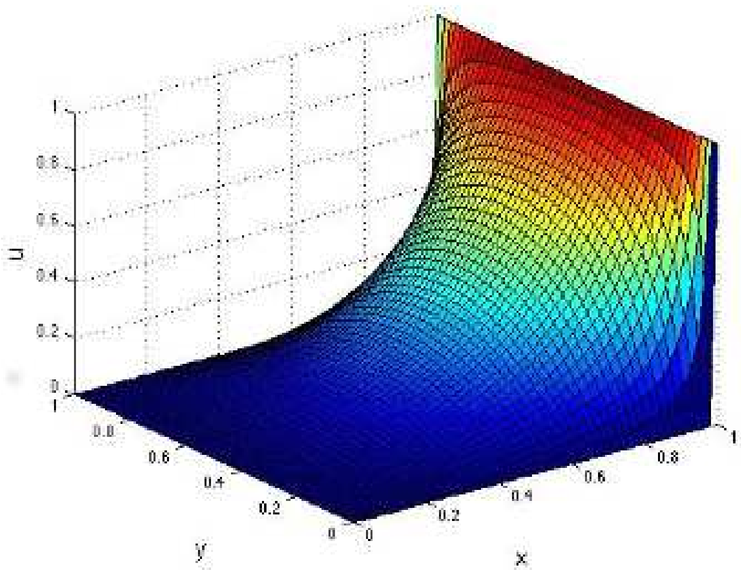


Fourier-Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi x)$. Vergleiche Abschnitt 5.1.

Es ergibt sich die Lösung

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \cdot \frac{1}{\sinh(n\pi)} \cdot \sin(n\pi x) \cdot \sinh(n\pi y)$$

mit dem folgenden Graph:



5.12 Fourier-Integrale (FI)

Motivation

Bei der Lösung von PDEs auf einem beschränkten Intervall $[a, b]$ betrachten wir periodische Funktionen mit der Periode $T = b - a$. Hierbei sind Fourier-Reihen nützlich.

Nun möchten wir uns von der Periodizitätsbedingung befreien, um PDEs auf der ganzen reellen Achse $\mathbb{R}$ zu lösen.

Herleitung

Sei f eine nichtperiodische Funktion auf $\mathbb{R}$. Wir schränken f auf das Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ mit dem Hintergedanken $T \to +\infty$ ein und nennen diese Einschränkung f_T. Im Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ lässt sich f_T in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$f_T(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right).$$

Wir benutzen die Euler-Formeln für die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n mit der Integrationsvariable v:

$$f_T(x) \sim \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\, dv}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{2n\pi x}{T} \cdot \underbrace{\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\, \cos \frac{2n\pi x}{T}\, dv}_{a_n} \right.$$

$$\left. + \sin \frac{2n\pi x}{T} \cdot \underbrace{\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\, \sin \frac{2n\pi x}{T}\, dv}_{b_n} \right).$$

Wir definieren

$$w_n = \frac{2n\pi}{T}, \qquad dw = w_{n+1} - w_n = \frac{2\pi}{T}$$

und schreiben:

$$f_T(x) \sim \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\, dv + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos(w_n x)\, dw \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \cos(w_n v)\, dv + \right.$$

$$\left. + \sin(w_n x)\, dw \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \sin(w_n v)\, dv \right).$$

Diese Formel gilt für jedes beliebige T. Wir lassen nun T gegen unendlich streben.

Annahme: Der Betrag von $f(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ integrierbar, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$.

Unter dieser Annahme verschwindet der erste Term (a_0) im Grenzwert:

$$\left| \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\,dv \right| \le \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |f(v)|\,dv = 0\ .$$

Zudem wird die (Riemann'sche Näherungs-)Summe im Grenzwert ein Integral:

$$f_T(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Big(\cos(wx)\,dw \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv}_{A(w)} + \sin(wx)\,dw \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(wv)\,dv}_{B(w)} \Big).$$

Wir nennen es ein **Fourier-Integral** und definieren die **Koeffizienten-Funktionen**

$$\boxed{\begin{aligned} A(w) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv \\ B(w) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(wv)\,dv\ . \end{aligned}}$$

Fourier-Integrale

Satz. *Ist $f(x)$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion und ist ihr Betrag auf $\mathbb{R}$ integrierbar, so lässt sich $f(x)$ durch ein Fourier-Integral*

$$\boxed{\int_0^{\infty} \big(A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)\big)\,dw}$$

darstellen, wobei $A(w)$ und $B(w)$ die obigen Formeln besitzen. Dann gilt

- *In allen Stetigkeitspunkten von f ist das Fourier-Integral gleich $f(x)$ und*
- *In den Sprungstellen ist das Fourier-Integral gleich dem arithmetischen Mittel der beiden einseitigen Grenzwerte von f.*

Fourier-Cosinus- und Sinus-Integrale

Ähnlich wie für Fourier-Reihen besitzen gerade, bzw. ungerade, Funktionen **Fourier-Cosinus-Integrale** bzw. **Fourier-Sinus-Integrale**, nämlich:

- Ist $f(x)$ gerade, so gilt:

$$\boxed{f(x) \sim \int_0^\infty A(w)\cos(wx)\,dw}$$

mit

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos(wv)\,dv\,.$$

- Ist $f(x)$ ungerade, so gilt:

$$\boxed{f(x) \sim \int_0^\infty B(w)\sin(wx)\,dw}$$

mit

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin(wv)\,dv\,.$$

Bemerkungen:

1. Ähnlich wie die Fourier-Reihen lassen sich Fourier-Integrale in komplexer Form darstellen:

$$f(x) \sim \int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\,e^{i\lambda y}d\lambda$$

mit

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(y)\,e^{-i\lambda y}dy\,.$$

$\widehat{f}(\lambda)$ heisst dann die Fourier-Transformierte von $f(x)$.

2. Ausser der Fourier-Transformation gibt es weitere Integraltransformationen von grosser praktischer Bedeutung.

Insbesondere überführt auch die Laplace-Transformation eine gegebene Funktion f vom reellen Zeitbereich in eine Funktion F im komplexen "Spektralbereich". Diese Funktion F wird Laplace-Transformierte genannt. Wie zur Fourier-Transformation gibt es zur Laplace-Transformation ebenfalls eine inverse Transformation.

Beispiel:

Wir stellen die folgende Funktion mittels eines Fourier-Integrals dar:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Die Koeffizienten des Fourier-Integrals sind

$$\begin{aligned} A(w) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Formel für } A(w)}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wv)\, dv \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } f}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^1 1 \cdot \cos(wv)\, dv \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{HDI}}}{=} \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{w} \sin(wv) \right]_0^1 \\ &= \frac{\sin w}{\pi w} \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} B(w) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Formel für } B(w)}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wv)\, dv \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } f}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^1 1 \cdot \sin(wv)\, dv \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{HDI}}}{=} \frac{1}{\pi} \left[\frac{-1}{w} \cos(wv) \right]_0^1 \\ &= \frac{1 - \cos w}{\pi w}\,. \end{aligned}$$

Es ergibt sich das Fourier-Integral von f:

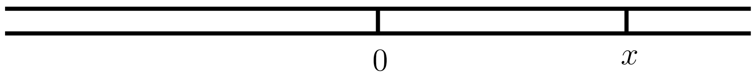
$$f(x) \sim \int_0^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{\sin w}{\pi w}}_{A(w)} \cos(wx) + \underbrace{\frac{1 - \cos w}{\pi w}}_{B(w)} \sin(wx) \Big)\, dw$$

und dies ist gleich:

$$\begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x = 1, \Big\} \text{ Sprungstellen} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

5.13 Wärmeleitung in einem unendlichen Stab mittels FI

Thermische Diffusion



Wir betrachten einen sehr langen Stab mit kleinem Querschnitt verglichen mit der Länge. Diesen Stab modellieren wir durch die reelle Gerade. Sei $u(x,t)$ die Temperatur zur Zeit $t \geq 0$ im Punkt $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{u_t = c^2\, u_{xx}}$ PDE

Keine Randbedingung!

Aber die Lösung soll für alle (x,t) beschränkt bleiben.

$$u(x,0) = \underbrace{f(x)}_{\text{gegebene Anfangs-temperaturverteilung}}$$ IC

Die Lösung dieses Problems erfolgt durch eine Kombination von der Trennung der Variablen mit den Fourier-Integralen.

Schritt 1: Separationsansatz

Für unbekannte Funktionen der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ zerfällt die PDE wie früher in zwei ODEs:

$$\boxed{X'' - kX = 0} \qquad \text{und} \qquad \boxed{T' - kc^2 T = 0\,.}$$

Schritt 2: Basislösungen

Die physikalisch interessanten Lösungen müssen beschränkt sein und deshalb muss $k \leq 0$ sein. Wir schreiben $\boxed{k = -p^2 \text{ (mit } p \geq 0).}$

Es gibt nun eine kontinuierliche Menge von zulässigen Parametern!

Die Lösungen der ODEs sind dann

$$X(x) = A\cos(px) + B\sin(px) \qquad \text{und} \qquad T(t) = De^{-c^2p^2t}.$$

Die Produktfunktionen der Form

$$e^{-c^2p^2t}\cdot\cos(px) \qquad \text{und} \qquad e^{-c^2p^2t}\cdot\sin(px)$$

nennen wir **Basislösungen**.

☞ Die **Basislösungen** eines Problems der Form

$$\begin{cases} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} \qquad \boxed{\text{1D-Wärmeleitungsgleichung}} \\ \textbf{Keine Randbedingung!} \\ \text{Aber die Lösung soll für alle } (x,t) \text{ beschränkt bleiben.} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

sind

$$\boxed{e^{-c^2p^2t}\cdot\cos(px) \ \text{ und } \ e^{-c^2p^2t}\cdot\sin(px)\ , \quad p \geq 0.}$$

Schritt 3: Superpositionsprinzip $\longrightarrow$ Fourier-Integrale

Nach dem Superpositionsprinzip ist das **Integral**

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^\infty \big(A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\big)\, e^{-c^2p^2t} dp}$$

auch eine Lösung von der PDE, sofern es konvergiert.

Wir wählen die Koeffizienten $A(p)$ und $B(p)$ so, dass die Anfangsbedingung erfüllt wird.
Es ergibt sich, dass die geeignete Wahl ist

$$A(p), \text{bzw.} B(p) \ = \ A\text{-}, \text{bzw.} B\text{-Koeffizienten-Funktionen des Fourier-Integrals von } f(x)\,.$$

Diese Funktionen sind dann durch die Integralformeln vom Abschnitt 5.12 gegeben:

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(px)\,dx \qquad \text{und} \qquad B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(px)\,dx\ .$$

Beispiel:

Wir betrachten einen unendlichen Stab mit kleinem Querschnitt verglichen mit der Länge. Diesen Stab modellieren wir durch die reelle Gerade. Sei $u(x,t)$ die Temperatur zur Zeit $t \geq 0$ im Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Wir nehmen an, dass die Anfangstemperaturverteilung durch die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

gegeben wird.

Das entsprechende Wärmeleitungsproblem ist:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boxed{u_t = c^2\, u_{xx}} & \text{PDE} \\ \textbf{Keine Randbedingung!} & \\ \text{Aber die Lösung soll für alle } (x,t) \text{ beschränkt bleiben.} & \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases} & \text{IC} \end{array} \right.$$

Da wir die Basislösungen solchen Probleme schon kennen, dürfen wir sofort die Lösung als Supersposition angeben. In diesem Fall gilt für die Lösung:

$$u(x,t) \;=\; \int_0^\infty \big(A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\big)\, e^{-c^2p^2t} dp \;,$$

wobei $A(p)$ und $B(p)$ die Koeffizienten-Funktionen des Fourier-Integrals von $f(x)$ sind. Diese haben wir im Abschnitt 5.12 berechnet:

$$A(p) = \frac{\sin p}{\pi p} \qquad \text{und} \qquad B(p) = \frac{1-\cos p}{\pi p} \;.$$

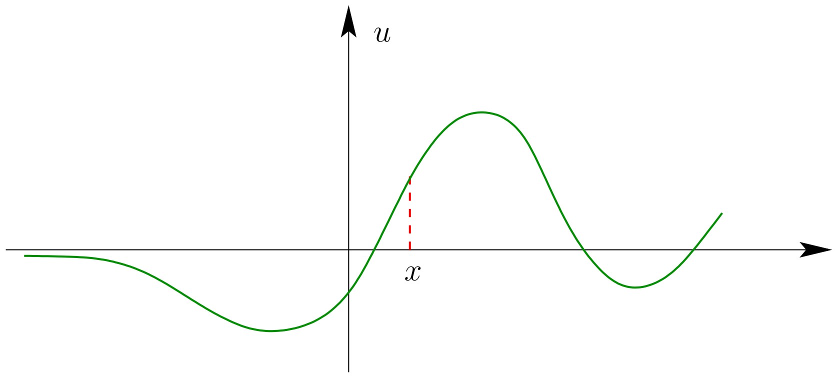
Somit ist die vollständige Lösung durch das folgende Integral gegeben:

$$u(x,t) \;=\; \int_0^\infty \left(\tfrac{\sin p}{\pi p}\, \cos(px) \;+\; \tfrac{1-\cos p}{\pi p}\, \sin(px) \right) e^{-c^2p^2t}\, dp \;.$$

5.14 Unendliche 1-dimensionale Wellen mittels FI

Dieser Abschnitt ist nicht Gegenstand der Prüfung.

Unendliche Wellen



Wir betrachten eine unendliche Saite, die in der Querrichtung schwingt. Sei $u(x,t)$ die Auslenkung des Saitenpunktes mit Koordinate x zur Zeit t ($x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$). Das Problem ist:

$$\begin{cases} \boxed{u_{tt} = c^2\, u_{xx}} & \text{PDE} \\ \textbf{Keine Randbedingung!} & \\ \text{Aber die Lösung soll für alle } (x,t) \text{ beschränkt bleiben.} & \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{IC} \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \end{cases}$$

Die Lösung dieses Problems erfolgt durch eine Kombination von der Trennung der Variablen mit Fourier-Integralen (oder durch die Methode von d'Alembert im nächsten Abschnitt).

Lösung mit Fourier-Integralen

Schritt 1: Separationsansatz

Für unbekannte Funktionen der Form

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

zerfällt die PDE in ein System von ODEs:

$$\boxed{X'' - kX = 0} \qquad \text{und} \qquad \boxed{T'' - kc^2T = 0\,.}$$

Schritt 2: Basislösungen

Um beschränkte Lösungen zu erhalten, muss k negativ sein. Wir schreiben $\boxed{k = -p^2 (p > 0).}$

Es gibt nun eine kontinuierliche Menge von zulässigen Parametern!

Die Lösungen der beiden ODEs sind dann Linearkombinationen von Sinus und Cosinus Funktionen und wir erhalten die folgende Produktfunktionen als **Basislösungen**:

$$\cos(px)\cdot\cos(pct), \quad \sin(px)\cdot\cos(pct), \cos(px)\cdot\sin(pct), \quad \text{und} \quad \sin(px)\cdot\sin(pct).$$

Schritt 3: Superpositionsprinzip $\longrightarrow$ Fourier-Integrale

Nach dem Superpositionsprinzip ist ein **Integral** von Linearkombinationen der Basislösungen auch eine Lösung der PDE, sofern es konvergiert.

Da die (reellen) Basislösungen hier von vier Arten sind, verwendet man üblicherweise die komplexe Darstellung:

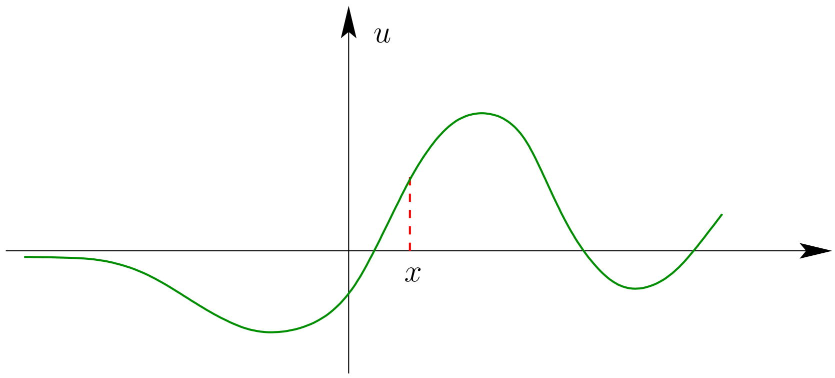
$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(C(p)\,e^{ip(x-ct)} + D(p)\,e^{ip(x+ct)}\right) dp\,.$$

Wir bestimmen die Koeffizienten $C(p)$ und $D(p)$, so dass die Anfangsbedingungen erfüllt werden. Dazu verwenden wir die *Fourier-Integralformeln*.

5.15 1-dimensionale Wellen mittels der Methode von d'Alembert

Dieser Abschnitt ist nicht Gegenstand der Prüfung.

Wir lösen nochmals ein System für endliche und unendliche Wellen, nun mit Hilfe der Methode von d'Alembert.



$u(x,t)$ = Auslenkung des Saitenpunktes mit Koordinate x und zur Zeit t

$$\begin{cases} \boxed{u_{tt} = c^2\, u_{xx}} & \text{PDE} \\ \text{eventuell noch Randbedingungen} & \text{BC} \\ u(x,0) = u_0(x) & \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{IC} \end{cases}$$

Methode von d'Alembert

Wir führen neue Koordinaten ein:

$$\boxed{\xi = x + ct} \quad \text{und} \quad \boxed{\eta = x - ct}$$

d.h., $x = \frac{1}{2}\,(\xi + \eta)$, $t = \frac{1}{2c}\,(\xi - \eta)$.

Die neue unbekannte Funktion ist dann

$$\boxed{\widetilde{u}(\xi,\eta) = u\Big(\tfrac{1}{2}\,(\xi+\eta),\ \tfrac{1}{2c}\,(\xi-\eta)\Big)}$$

und erfüllt die PDE

$$\boxed{\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0,}$$

Wellengleichung bzgl.
neuer Koordinaten

deren Lösungen der folgenden Form sind:

$$\boxed{\widetilde{u}(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)}\ ,$$

wobei G und F beliebige (differentiale) Funktionen sind.

Fazit:

Die allgemeine Lösung der PDE $\boxed{u_{tt} = c^2\,u_{xx}}$ (mit $x \in \mathbb{R}$) ist

$$\boxed{u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).}$$

wobei G und F beliebige (differenzierbare) Funktionen sind.

Nun müssen wir F und G so finden, dass die Anfangsbedingung erfüllt werden.

$$\text{IC} \qquad \begin{cases} F(x) + G(x) = u_0(x) \\ cF'(x) - cG'(x) = v_0(x)\,. \end{cases}$$

Wir bekommen

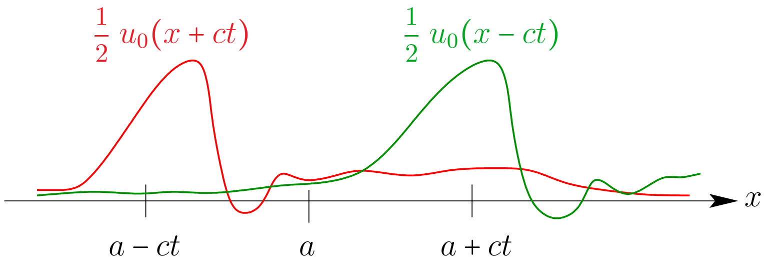
$$F(x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x) + \frac{1}{c}\int_0^x v_0(y)\,dy\right)$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x) - \frac{1}{c}\int_0^x v_0(y)\,dy\right).$$

Sonderfall $v_0(x) = 0$

Hier ist die Lösung einfach

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right).$$



Die Lösung $u(x,t)$ ist die Superposition zweier *Wellen*, die beide mir der selben Geschwindigkeit c einmal nach links und einmal nach rechts laufen.

Ausblick

Die Methode d'Alembert ist der Ausgangspunkt zu einer anderen Methode zur Lösung bestimmter PDEs: die **Methode der Charakteristiken**.

Die grundlegende Idee besteht darin, die PDE durch eine geeignete Koordinatentransformation auf ein System von ODEs auf bestimmten Kurven oder Flächen, sogenannten Charakteristiken, zurückzuführen.

Für die 1-dimensionale Wellengleichung sind die Charakteristiken die Geraden:

$$x + ct = \text{Konst.} \quad \text{und} \quad x - ct = \text{Konst.}$$