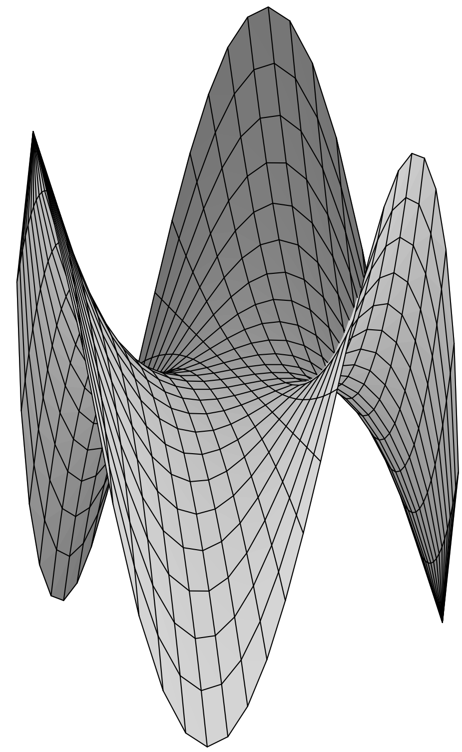
G. Felder

Partielle Differenzialgleichungen

für Ingenieurinnen und Ingenieure

hypertextuelle Notizen
zur Vorlesung Analysis III WS 2002/2003



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Zurück

Inhaltsverzeichnis

Der Author ist Markus Engeli, Thomas Liebrich und Torsten-Karl Strempel für zahlreiche Verbesserungen des Textes dankbar.

Navigationshilfe
Rot = interner Link
Blau = externer Link

1. Grundbegriffe, Beispiele

1.1. Definitionen, Beispiele. Eine *partielle Differenzialgleichung* (PDG) ist eine Gleichung für eine Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$ auf einem Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die als Gleichheit zweier Funktionen von $\mathbf{x}$ und den partiellen Ableitungen von $u(\mathbf{x})$ gegeben ist.

Zum Beispiel ist

$$(1) \qquad y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 yu \qquad \text{oder} \qquad yu_{xx} + u_y = x^2 yu$$

eine PDG für eine Funktion $u(x, y)$ von zwei Variablen (Wir verwenden die Notation $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = (u_x)_x$, $u_{xy} = (u_x)_y = u_{yx}$, usw. für partielle Ableitungen).

Die Variablen x, y heissen *unabhängige Variablen* .

Die Variable u heisst *abhängige Variable* .

Die *Ordnung* einer PDG ist die Ordnung der partiellen Ableitung höchster Ordnung die darin vorkommt. Zum Beispiel ist (1) eine PDG zweiter Ordnung. Die PDG $xu_x u_{xxy} + u_x^4 = 0$ ist eine PDG dritter Ordnung, da die dritte Ableitung u_{xxy} und keine höhere Ableitung darin vorkommt.

Fast alle PDG, die in der Praxis auftreten, sind von erster oder zweiter Ordnung.

Eine *Lösung* einer PDG ist eine Funktion u, welche die PDG erfüllt. Zum Beispiel ist $u = \exp((x^2 - y^2)/2)$ eine Lösung von (1) (verifizieren Sie das).

Beispiele.

(1) Das elektrostatische Potenzial $u(x, y, z)$, das von einer gegebenen Ladungsdichteverteilung $\rho(x, y, z)$ erzeugt wird, erfüllt die Poisson-Gleichung
$$\triangle u = 4\pi\rho,$$
wobei $\triangle$ der Laplace-Operator (in drei Dimensionen) ist: $\triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

(2) Die *Wellengleichung* ist die PDG
$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \triangle u.$$
$u(x, y, z, t)$ ist dabei zum Beispiel die Dichte der Luft im Punkt (x, y, z) zur Zeit t bei Schallwellen, eine Komponente des elektromagnetischen Feldes bei Lichtwellen, usw. Wir werden sehen, dass der Parameter $c > 0$ die Interpretation der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen hat.

(3) Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung:

$$u_t = \alpha \triangle u, \qquad \alpha > 0.$$

(4) Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ und der Druck $p(\mathbf{x}, t)$ einer inkompressiblen Flüssigkeit als Funktion des Ortes $\mathbf{x} = (x, y, z)$ und der Zeit t erfüllen die Navier–Stokes-Gleichung

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nu \triangle \mathbf{v} + \nabla p, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \nu > 0.$$

Es handelt sich eigentlich um ein *System* von vier PDG für die vier Funktionen v_1, v_2, v_3, p.

Definition. Eine PDG für u heisst *linear* falls u und ihre Ableitungen höchstens linear vorkommen. Genauer: Eine lineare PDG ist eine PDG der Form

$$Lu = b,$$

wobei L ein *Differenzialoperator* und b eine gegebene Funktion ist.

Zum Beispiel ist (1) linear mit

$$L = y\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} - x^2 y, \qquad b = 0.$$

Die Poisson-Gleichung ist linear mit $L = \triangle$ und $b = 4\pi\rho$. Die Wellen- und Wärmeleitungsgleichungen sind linear. Die Navier–Stokes-Gleichung ist nicht linear. Weitere Beispiele von nichtlinearen partiellen Differenzialgleichungen sind $u_x + uu_y = 0$, $u_x = \sin(u_y)$.

1.2. **Energiebilanz: Herleitung der Wärmeleitungsgleichung.** Einige partielle Differenzialgleichungen, wie die Wellengleichung für das elektromagnetische Feld, sind Grundgleichungen der Physik. Andere treten als Beschreibung von Systemen von sehr vielen Teilchen (z.B. einer Flüssigkeit) durch eine Kontinuumapproximation auf. Sie können oft aus anschaulichen Grundprinzipien hergeleitet werden. Dies soll illustriert werden am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung in einer Dimension.

Wir betrachten die Temperaturverteilung $u(x, t)$ auf einem wärmeleitenden homogenen Stab der Länge L. Dabei ist $u(x, t)$ die Temperatur im Punkt $x \in [0, L]$ zur Zeit t.

Prinzipien: 1. Energiebilanz. Die Zeitliche Änderung der thermischen Energie in jedem Intervall $[a, b]$ ist gleich dem Wärmefluss durch die Ränder a, b

2. Die Energiedichte (Energie pro Längeneinheit) ist $\rho c u$. Die Dichte ρ und die spezifische Wärme c werden wir konstant annehmen.

3. Fouriergesetz: Der Wärmefluss ist proportional zum Gradienten der Temperatur ("Wärme fliesst von warm nach kalt"). Die Proportionalitätskonstante $k > 0$ heisst Wärmeleitfähigkeit.

In Formeln haben wir dann

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho c u(x,t)dx = -k\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) + k\frac{\partial u}{\partial x}(b,t). \tag{2}$$

Auf der linken Seite steht die zeitliche Ableitung der totalen Energie im Intervall $[a,b]$. Die rechte Seite ist die Energie, die pro Zeiteinheit durch die Grenzen des Intervalls fliesst, mit dem richtigen Vorzeichen gerechnet. Diese Gleichung soll für alle Intervalle $[a,b]$ gelten. Mit dem Fundamentalsatz der Integrationsrechnung können wir diese Gleichung umformen:

$$\int_a^b \left(\rho c\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right) dx = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Intervalle gilt, soll der Integrand verschwinden (Mittelwertsatz für kleine Intervalle $[a, a+\epsilon]$). Also haben wir die Wärmeleitungsgleichung $u_t - \alpha u_{xx} = 0$, $\alpha = k/(\rho c)$.

Eine ähnliche Überlegung gilt in drei Dimensionen. Statt (2) haben wir, für jedes Volumen D mit Rand ∂D und nach aussen weisendem normalem Einheitsvektor $\mathbf{n}$,

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho c u(\mathbf{x},t)dV = \int_{\partial D} k\nabla u\cdot\mathbf{n}\,dA.$$

Dabei ist $k\nabla u\cdot\mathbf{n}dA$ der Wärmefluss durch das Flächenelement dA (positiv wenn Wärme *hinein*fliesst). Mit Hilfe des Gaussschen Divergenzsatzes können wir die rechte Seite als Volumenintegral schreiben:

$$\int_{\partial D} k\nabla u\cdot\mathbf{n}\,dA = k\int_D \triangle u\,dV.$$

Wir erhalten also die Wärmeleitungsgleichung $u_t - \alpha\triangle u = 0$, $\alpha = k/(\rho c)$.

1.3. **Die eindimensionale Wellengleichung.** Wir wollen einen der wenigen Fälle studieren, wo alle Lösungen einer partiellen Differenzialgleichung explizit bekannt sind. Die *eindimensionale Wellengleichung*

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0$$

beschreibt z. B. die Amplitude $u(x,t)$ der (kleinen) Schwingungen einer Saite als Funktion von Ort x und Zeit t. Wir wollen diese

Gleichung durch geschickte *Transformation der unabhängigen Variablen* vereinfachen. Zuerst führt man die neue Funktion $v(x,\tau) = u(x,\tau/c)$ ein. Erfüllt u die Wellengleichung, so erfüllt v die Gleichung $v_{\tau\tau} - v_{xx} = 0$, in welcher c nicht mehr vorkommt, und umgekehrt. Zweitens, d'Alembert folgend, führen wir neue Variablen $\xi = x - \tau$, $\eta = x + \tau$ ein und setzen $w(\xi,\eta) = v(x,\tau)$. Die Wellengleichung für u ist dann äquivalent zur Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

für w. Diese Gleichung bedeutet, dass $\partial w/\partial\xi$ unabhängig von η ist, also

$$\frac{\partial w(\xi,\eta)}{\partial\xi} = f(\xi)$$

Jean d'Alembert
1717–1783

Nach Integration (bei jedem festen η) folgt

$$w(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist und die Integrationskonstante $G(\eta)$ von η abhängen kann.

Umgekehrt ist es klar, dass $w = F(\xi) + G(\eta)$ für beliebige differenzierbare Funktionen F, G eine Lösung von $w_{\xi\eta} = 0$ ist.

In den ursprünglichen Variablen ausgedrückt, haben wir das Resultat (von d'Alembert):

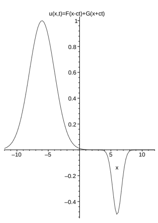
Für beliebige (zweimal stetig differenzierbare) Funktionen F, G ist

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) \tag{3}$$

eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Alle (zweimal stetig differenzierbaren) Lösungen sind von dieser Form.



>Visualisierung

Zum Beispiel ist $u(x,t) = F(x-ct)$ eine Lösung. Sie beschreibt eine Welle, die sich mit Fortpflanzungsgeschwindigkeit c nach rechts bewegt: Der Graph der Funktion $x \mapsto u(x,t)$ verschiebt sich nach einer Zeit t um ct. Analog beschreibt $G(x+ct)$ eine sich nach links bewegende Welle. Eine Formel wie (3), die alle Lösungen einer PDG angibt, heisst *allgemeine Lösung* der PDG.

Wir sehen, dass im Gegensatz zu den gewöhnlichen Differenzialgleichungen, deren allgemeine Lösung typischerweise von endlich vielen Konstanten abhängt, die allgemeine Lösung der Wellengleichung von beliebig wählbaren *Funktionen* abhängt. In den Anwendungen werden diese Funktionen mit Hilfe der im physikalischen Problem auftretenden Nebenbedingungen (Randbedingungen oder Anfangsbedingungen) bestimmt. Für die Wellengleichung hat man typischerweise ein *Anfangswertproblem*

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Beschreibt u die Amplitude einer in einer Ebene schwingenden Saite, so sind die vorgegebenen Funktionen $f(x)$, $g(x)$ die Anfangsamplitude bzw. die Anfangsgeschwindigkeit im Punkt x (die Notation $u_t(x,0)$ bedeutet den Wert der Funktion $u_t(x,t)$ an der Stelle $t = 0$).

Um die Lösung des Anfangswertproblems für beliebig vorgegebene f, g zu finden, setzen wir unsere allgemeine Lösung ein, und finden Bedingungen für F, G:[1]

$$F(x) + G(x) = f(x), \qquad c(-F'(x) + G'(x)) = g(x).$$

Wir leiten die erste Gleichung ab und lösen nach F', G' auf:

$$F'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x), \quad G'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x).$$

Daraus folgt

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)dy + C, \quad G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)dy - C,$$

wobei die Integrationskonstanten $\pm C$ so gewählt wurden, dass die Anfangsbedingung $F(x) + G(x) = f(x)$ gilt. In der Lösung $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$ kürzen sich die Integrationskonstanten, und wir erhalten:

Die Lösung des Anfangswertproblems (4) der eindimensionalen Wellengleichung ist

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy.$$

[1] Nach der Kettenregel ist $\frac{\partial}{\partial t}F(x-ct) = F'(x-ct)(-c)$, wobei F' die Ableitung der Funktion F bezeichnet: $F'(\xi) = \frac{dF(\xi)}{d\xi}$

Bemerkung. Wir sehen hier das Phänomen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Signale bei der Wellengleichung, welches auch in höheren Dimensionen auftritt: Nehmen wir an, dass die Anfangsfunktionen f, g in einem kleinen Intervall $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ verschieden von 0 und sonst überall null sind. Nach einer Zeit t kann die Lösung $u(x,t)$ nur im Intervall $[x_0 - \epsilon - ct, x_0 + \epsilon + ct]$ verschieden von 0 sein: Das zur Zeit $t = 0$ in x_0 ausgesandte Signal hat zur Zeit t nur Punkte im Abstand $\leq ct$ erreicht. Wir werden eine stärkere Fassung dieses Phänomens (Huygens-Prinzip) im Fall der dreidimensionalen Wellengleichung diskutieren.

1.4. **Wohl gestellte Probleme.** Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung *hat eine eindeutige Lösung*: Es gibt genau eine Lösung, welche die Anfangsbedingungen erfüllt. Zudem ist die Lösung *stabil*: Werden f, g ein wenig geändert so ändert sich die Lösung zu jeder gegebenen Zeit t wenig: Ersetzen wir nämlich die Anfangsfunktionen f, g durch $f + \delta f$, $g + \delta g$ mit $\max(|\delta f(x)|) < \epsilon$ und $\max(|\delta g(x)|) < \epsilon$, so ist die Lösung $u + \delta u$ mit

$$|\delta u(x,t)| \leq \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \epsilon dy = \epsilon(1+t).$$

Probleme mit diesen zwei Eigenschaften, der Existenz einer eindeutigen Lösung und der Stabilität unter Änderung von Anfangs- oder Randdaten, nennt man *wohl gestellt*. Diese Eigenschaften sind wichtig für die Anwendungen: Bei einem wohl gestellten Anfangswertproblem gibt die gerechnete Lösung mit durch Messungen bestimmten Anfangsfunktionen eine gute Approximation des Verhaltens des Systems, selbst wenn die Messungen ungenau sind. Darüber hinaus sind die numerischen Lösungen eines Problems, bei dem die Anfangs- und Randdaten notwendigerweise durch eine Approximation gegeben werden, nur sinnvoll, wenn das Problem wohl gestellt ist.

Wir werden ein Beispiel eines schlecht gestellten Problems bei der Wärmeleitungsgleichung im Abschbitt 3.5 treffen.

2. Lineare partielle Differenzialgleichungen, Separation der Variablen

2.1. Homogene lineare PDG, Superpositionsprinzip. Eine lineare partielle Differenzialgleichung für $u = u(x_1, \dots, x_n)$ hat die allgemeine Form $Lu = b$, wobei L ein Differenzialoperator und b eine gegebene Funktion der unabhängigen Variablen ist. Eine lineare Differenzialgleichung heisst *homogen* falls $b = 0$.

Wie bei gewöhnlichen Differenzialgleichungen ist die wichtigste Eigenschaft einer homogenen linearen partiellen Differenzialgleichung das *Superpositionsprinzip*

Sind $u_1, \dots, u_n$ Lösungen der linearen PDG

$$Lu = 0,$$

so auch jede Linearkombination

$$u = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n, \qquad c_i \in \mathbb{R}.$$

Mit anderen Worten: Die Lösungen einer homogenen PDG bilden einen Vektorraum.

Das Superpositionsprinzip folgt aus der Linearität $L(c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n) = c_1 L u_1 + \cdots + c_n L u_n$, die wiederum auf der Linearität der partiellen Ableitungen beruht.

Bei einer homogenen linearen *gewöhnlichen* Differenzialgleichung ist der Vektorraum der Lösungen endlichdimensional.[2] Dagegen ist aber der Vektorraum der Lösungen einer homogenen linearen PDG im allgemeinen *unendlichdimensional*, wie wir bei der Wellengleichung schon bemerkt haben. Daher will man das Superpositionsprinzip so erweitern, dass auch unendliche Linearkombinationen

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j u_j$$

[2] eine homogene lineare gewöhnliche Differenzialgleichung der Ordnung n hat einen n-dimensionalen Lösungsraum. Zum Beispiel hat die Gleichung

$$u''(x) - u(x) = 0$$

zwei linear unabhängige Lösungen $u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = e^{-x}$. Diese Lösungen bilden eine Basis des Lösungsraum. Also ist die allgemeine Lösung

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

von Lösungen u_j Lösungen ergeben. Dies gilt tatsächlich unter geeigneten Konvergenzbedingungen.

2.2. **Methode der Separation der Variablen.** Wir betrachten zuerst partielle Differenzialgleichungen für Funktionen $u(x, t)$ von zwei Unbekannten. Die Methode der Separation der Variablen besteht aus zwei Schritten:

(i) Finde Lösungen der Form $u(x, t) = X(x)T(t)$.
(ii) Hoffe, dass die allgemeine Lösung durch eine (möglicherweise unendliche) Linearkombination von Lösungen dieser Form gegeben ist.

Auch wenn die Hoffnung in (ii) in dieser Allgemeinheit nicht erfüllt ist, ist die Methode bei vielen Problemen erfolgreich: Dabei versucht man nicht die allgemeine Lösung zu bestimmen, sondern diejenige Lösung in der Form einer solchen Linearkombination, die die gegebene Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

Wir wollen diese Idee anhand des Beispiels eines Anfangs-/Randwertproblems der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung illustrieren.

Beispiel 2.A. Man soll die Temperaturverteilung eines Stabes der Länge L untersuchen, dessen Enden auf einer festen Temperatur gehalten werden, die wir mit passender Wahl der Temperaturskala auf Null festlegen:

$$\begin{array}{ll} u_t = \alpha u_{xx}, & 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0, \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t \geq 0, \text{Randbedingung} \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq \ell, \text{Anfangsbedingung}, \end{array}$$

für eine gegebene anfängliche Temperaturverteilung $f(x)$, die die Randbedingungen erfüllt, zum Beispiel

$$f(x) = \sin(\pi x/\ell).$$

Die Konstante $\alpha > 0$ ist ein Parameter.

Im ersten Schritt suchen wir also Lösungen der Form $u(x, t) = X(x)T(t)$. Wir setzen diese Funktion in die PDG:

$$X(x)T'(t) = \alpha X''(x)T(t).$$

Hier kommt die eigentliche Separation der Variablen, wo alles was von x abhängt nach rechts und alles was von t abhängt nach links geschoben wird:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Die linke Seite ist jetzt unabhängig von x und die rechte Seite ist unabhängig von t. Da beide Seiten gleich sind, sind sie unabhängig von x

und von t also konstant:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda = \alpha \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Umgekehrt gilt: Sind $X(x)$, $T(t)$ Funktionen und λ eine Konstante, welche diese Gleichungen erfüllen, so ist $u(x,t) = X(x)T(t)$ eine Lösung der gegebenen partielle Differenzialgleichung. Wir haben also, für jedes λ, gewöhnliche Differenzialgleichungen für X und T. Wir betrachten zuerst die Gleichung für X:

$$X''(x) - \frac{\lambda}{\alpha} X(x) = 0.$$

Ist $\lambda < 0$, so hat diese Gleichung die allgemeine Lösung

$$X(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x), \qquad \omega = \sqrt{-\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Wir setzen hier die Randbedingungen ein: $T(t)X(0) = T(t)X(\ell) = 0$ also $X(0) = X(\ell) = 0$ (oder $T \equiv 0$ aber diese triviale Lösungen wollen wir nicht berücksichtigen). Es folgt, dass $B = 0$ und $\omega = \pi n/\ell$, $n = 1, 2, \dots$, also

$$\lambda = -\frac{\alpha \pi^2 n^2}{\ell^2}, n = 1, 2, \dots$$

Nur für diese Werte von λ hat man eine nichttriviale Lösung der Form XT, die die Randbedingungen erfüllt.[3] Die allgemeine Lösung der Gleichung für T ist dann $T(t) = Ce^{\lambda t}$.

Also haben wir für jedes $n = 1, 2, \dots$ eine Lösung der Form $X(x)T(t)$, nämlich

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{\alpha \pi^2 n^2 t}{\ell^2}} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right),$$

(oder proportional dazu) die auch die Randbedingungen erfüllt.

Im zweiten Schritt wollen wir das Superpositionsprinzip verwenden um den Kandidat

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$$

für die allgemeine Lösung zu untersuchen. Im vorliegende Fall will man die Lösung finden, die die Anfangsbedingung erfüllt: $u(x,0) = f(x)$, oder

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) = f(x).$$

Das Problem, Koeffizienten c_n zu finden, so dass diese *Sinusreihe* eine vorgegebene, auf $[0, \ell]$ definierte, Funktion f gibt, ist Teil der Theorie der Fourier-Reihen, die wir im nächsten Kapitel studieren. In unserem Beispiel

[3]Dies haben wir gezeigt unter der Annahme $\lambda < 0$. Für positive λ hat man aber Exponentialfunktionen, die nicht beide Randbedingungen erfüllen können

für f können wir einfach $c_1 = 1$, $c_j = 0$, $j \neq 1$ nehmen. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$u(x,t) = e^{-\frac{\alpha\pi^2 t}{\ell^2}} \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right).$$

Beispiel 2.B. Wir wollen das folgende Anfangswertproblem für eine Funktion $u(x,t)$ lösen:

$$\begin{aligned} xu_x &= u_t \qquad\qquad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= x + 2x^3. \end{aligned}$$

Der Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ führt auf die Gleichung

$$xX'(x)T(t) = X(x)T'(t),$$

oder

$$x\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Wieder sind hier beide Seiten unabhängig von x, t also gleich einer Konstante λ. Wir haben dann die gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$xX'(x) = \lambda X(x), \qquad T'(t) = \lambda T(t),$$

mit Lösungen

$$X(x) = C_1 x^\lambda, \qquad T(t) = C_2 e^{\lambda t},$$

Also für jedes λ haben wir eine Lösung der Form $X(x)T(t)$, nämlich

$$u_\lambda(x,t) = x^\lambda e^{\lambda t}.$$

Also auch jede Linearkombination von solchen Lösungen ist eine Lösung. Für $t = 0$ gilt $u_\lambda(x,0) = x^\lambda$, also ist die Linearkombination, die die Anfangsbedingung erfüllt

$$u(x,t) = u_1(x,t) + 2u_3(x,t) = xe^t + 2x^3 e^{3t}.$$

2.3. **Inhomogene Probleme.** Die Probleme, die wir bis jetzt betrachtet haben, sind *homogen*: Die partielle Differenzialgleichung ist homogen linear und die Randbedingungen sind von der Form $u(a,t) = 0$. Solche Randbedingungen nennt man homogen. Allgemeiner heisst eine Randbedingung homogen, wenn sie fordert, dass eine Linearkombination der Werte der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen auf dem Rand gleich null ist. Die wesentliche Eigenschaft homogener Probleme ist das Superpositionsprinzip. Wenn die PDG nicht homogen ist oder wenn die Randbedingungen nicht homogen sind, kann die Methode der Separation der Variablen nicht direkt funktionieren:

Summen von Lösungen sind im Allgemeinen keine Lösungen. Es gilt aber das allgemeine Prinzip der linearen Algebra:

Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Randwertproblems ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Problems plus eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems.

Das "zugehörige homogene Problem" erhält man, in dem man die rechte Seite der PDG und die Randwerte durch Null ersetzt. Die "partikuläre Lösung" ist irgendeine Lösung, die man typischerweise erratet.

Beispiel 2.C. Die PDG

$$c^{-2}u_{tt} - u_{xx} = \cos(x)$$

ist linear, aber inhomogen (wir fordern keine Randbedingungen hier). Die zugehörige homogene PDG ist die eindimensionale Wellengleichung. Die rechte Seite ist unabhängig von t. Es ist also natürlich zu versuchen, eine t-unabhängige partikuläre Lösung zu finden: Sie soll $-u_{xx} = \cos(x)$ erfüllen, woraus wir die partikuläre Lösung $u(x,t) = \cos(x)$ finden. Die allgemeine Lösung ist dann

$$u(x,t) = \cos(x) + F(x - ct) + G(x + ct).$$

Beispiel 2.D. Wir betrachten wie im Beispiel 2.A die Wärmeleitungsgleichung auf einem Intervall, aber diesmal wollen wir die Temperatur an den Endpunkten auf verschiedene Werte festsetzen:

$$\begin{array}{lll} u_t = \alpha u_{xx}, & & 0 \le x \le \ell, \quad t \ge 0, \\ u(0,t) = T_1, & u(\ell,t) = T_2, & t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x), & & 0 \le x \le \ell, \end{array}$$

Wir ignorieren zunächst die Anfangsbedingung und betrachten die PDG mit den Randbedingungen. Wir versuchen wieder, eine von t unabhängige partikuläre Lösung $u(x,t) = u_P(x)$ zu finden. Eine solche erfüllt $u_P''(x) = 0, u_P(0) = T_1, u_P(\ell) = T_2$. Wir erhalten die partikuläre Lösung $u_P(x) = T_1 + (T_2 - T_1)x/\ell$. Also ist die allgemeine Lösung von der Form

$$u(x,t) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ell} x + U(x,t), \tag{5}$$

wobei U die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist

$$\begin{array}{lll} U_t = \alpha U_{xx}, & & 0 \le x \le \ell, \quad t \ge 0, \\ U(0,t) = 0, & U(\ell,t) = 0, & t \ge 0. \end{array}$$

Die Anfangsbedingung kann jetzt eingesetzt werden. Aus (5) sehen wir, dass die Anfangsbedingung für U

$$U(x,0) = f(x) - T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ell} x$$

ist. Das homogene Problem für U kann mit der Methode der Separation der Variablen wie im Beispiel 2.A gelöst werden.

3. Fourier-Reihen

3.1. **Fourier-Reihen periodischer Funktionen. Definition.** Sei $L > 0$. Eine auf $\mathbb{R}$ definierte reell- oder komplexwertige Funktion $f(x)$ heisst *L-periodisch* (oder periodisch mit Periode L) falls

$$f(x+L) = f(x), \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiele von L-periodischen Funktionen:

(i) $\cos(x), \sin(x), e^{ix}$ sind 2π-periodische Funktionen.
(ii) Es folgt, dass $\cos(2\pi x/L), \sin(2\pi x/L), e^{2\pi ix/L}$ L-periodische Funktionen sind.
(iii) Für jede ganze Zahl n sind die Funktionen

$$\cos(2\pi nx/L), \qquad \sin(2\pi nx/L), \qquad e^{2\pi inx/L}$$

L-periodisch (sie sind ebenfalls L/n-periodisch).
(iv) Linearkombinationen von L-periodischen Funktionen sind L-periodisch.

Definition. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi in}{L}x}, \qquad c_n \in \mathbb{C},$$

heisst (komplexe) *Fourier-Reihe.*

Falls eine Fourier-Reihe für alle x konvergiert, definiert sie eine Funktion

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi in}{L}x},$$

die L-periodisch ist. Die Fragen, die die Theorie der Fourier-Reihe beantwortet, sind: Kann jede periodische Funktion als eine Fourier-Reihe dargestellt werden? Wenn ja, wie bestimmt man die Koeffizienten c_n?

Lemma 3.1. *Sei n eine ganze Zahl.*

$$\frac{1}{L}\int_0^L e^{\frac{2\pi in}{L}x}dx = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Beweis: Für $n = 0$ ist diese Identität $\frac{1}{L}\int_0^L dx = 1$. Für $n \neq 0$,

$$\int_0^L e^{\frac{2\pi in}{L}x}dx = \frac{L}{2\pi in}(e^{2\pi in} - e^{2\pi i0}) = 0.$$

□

Lemma 3.2. *Ist* $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x}$ *mit* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, *so gilt*

$$c_n = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L}x} f(x)dx. \tag{6}$$

Beweis: Nach Lemma 3.1 gilt

$$\frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-\frac{2\pi i n}{L}x}dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \frac{1}{L}\int_0^L e^{\frac{2\pi i(m-n)}{L}x}dx = c_n.$$

Die Vertauschung von Integral und Summe ist erlaubt, da die Summe absolut konvergiert. □

Wir haben also gezeigt: Wenn eine periodische Funktion durch eine Fourier-Reihe gegeben ist, dann kann man die Koeffizienten c_n aus der Funktion durch (6) bestimmen. Bleibt die Frage, welche Funktionen durch Fourier-Reihen dargestellt werden können. Der folgende Satz, den wir nicht beweisen, gibt dazu Auskunft.

Satz 3.1. *Sei $f(x)$ eine 2-mal stetig differenzierbare L-periodische Funktion. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x} := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x},$$

wobei die Fourier-Koeffizienten c_n *durch die Formel*

$$c_n = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L}x} f(x)dx \tag{7}$$

gegeben sind.
Ist $f(x)$ stückweise 2-mal stetig differenzierbar, so gilt dasselbe, aber nur für x wo f stetig ist.

Bemerkung. In der Formel für c_n können wir statt von 0 bis L auf einem beliebigen Intervall der Länge L integrieren. Dies folgt, da der Integrand L-periodisch ist: Wenn wir beispielsweise von a bis $L + a$ mit $a > 0$, integrieren, liefert der Teil des Integrals zwischen L und $L + a$ denselben Beitrag wie das Integral von 0 bis L. Also ist $\int_a^{L+a}(\ldots) = \int_0^a(\ldots) + \int_a^L(\ldots) = \int_0^L(\ldots)$.

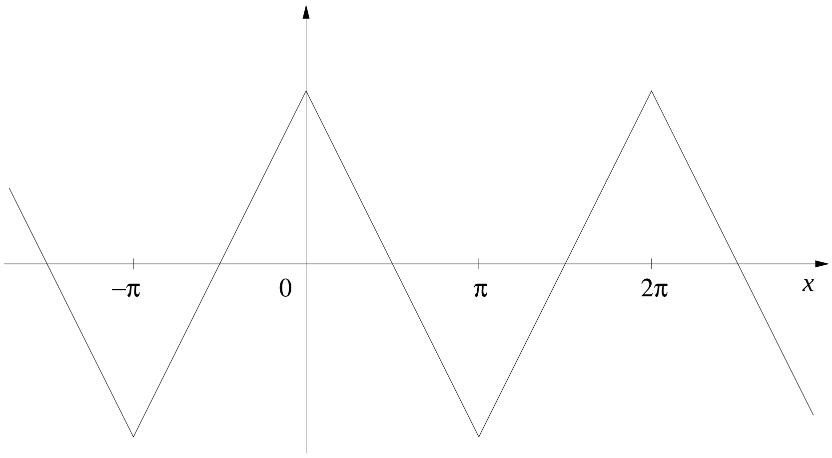
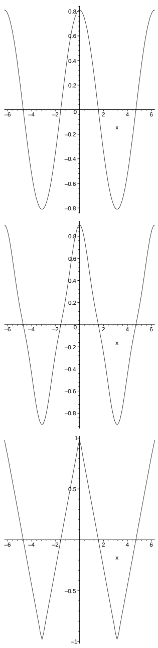


ABBILDUNG 1. Die 2π-periodische Fortsetzung der auf $[-\pi, \pi]$ definierten Funktion $1 - 2|x|/\pi$

Ein oft nützliches Integrationsintervall ist $[-L/2, L/2]$. Also haben wir

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} dx. \tag{8}$$



Partialsummen $N = 1, 3, 10$.

Beispiel 3.A. Wir wollen die Funktion $f(x) = 1 - 2|x|/\pi$, $-\pi < x \le \pi$ zu einer 2π-periodischen Funktion fortsetzen (Abb. 1).

Die Fourier-Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - 2|x|/\pi) e^{-inx} dx = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2 n^2}, & n \text{ ungerade}, \\ 0, & n \text{ gerade}, \end{cases}$$

wie man durch partielle Integration findet.

Es gilt also

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{-\infty < n \text{ ungerade} < \infty} \frac{1}{n^2} e^{inx}.$$

Nimmt man die Terme für n und $-n$ zusammen, so erhält man mit $e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx)$

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx) = \frac{8}{\pi^2} \cos(x) + \frac{8}{9\pi^2} \cos(3x) + \cdots$$

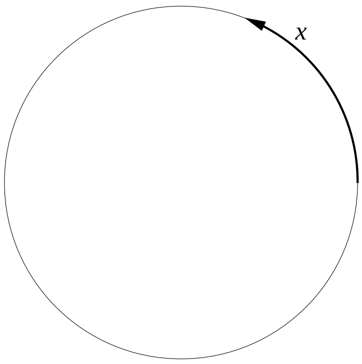


Abbildung 2. Wärmeleitung auf einem Ring

Da $f(0) = 1$, erhält man nach Division durch $8/\pi^2$ eine Formel für die Summe der Inversen der Quadrate der ungeraden Zahlen:

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Übung. Leiten Sie aus dieser Formel die Eulersche Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

her. Hinweis: Jede gerade Zahl ist das Doppelte einer ganzen Zahl.

3.2. **Anwendung: Wärmeleitung auf einem Ring.** Wir betrachten die Temperaturverteilung auf einem Ring mit Radius R. Die Temperatur im Punkt mit Bogenlänge x (S. Abb. 2) zur Zeit t sei mit $u(x,t)$ bezeichnet. Da x und $x+2\pi R$ denselben Punkt auf dem Ring darstellen, gilt $u(x+2\pi R, t) = u(x,t)$, also ist u eine $2\pi R$-periodische Funktion von x. Es gilt also

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\, e^{inx/R},$$

wobei

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} u(x,t)\, e^{-inx/R} dx.$$

Die grundlegende Bemerkung, die wir im Fall der Wärmeleitungsgleichung jetzt machen werden, ist, dass *lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für $u(x,t)$ äquivalent zu gewöhnlichen Differenzialgleichungen für die Fourier-Koeffizienten $c_n(t)$ sind.*

In unserem Fall soll $u(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllen

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0, \qquad u(x + 2\pi R, t) = u(x,t).$$

Also gilt, nach Differenzieren unter dem Summationszeichen,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{dc_n}{dt} + \alpha \frac{n^2}{R^2} c_n \right) e^{inx/R} = 0.$$

Diese Gleichung besagt, dass die linke Seite die Fourier-Reihe der Funktion 0 ist, für welche alle Fourier-Koeffizienten $= 0$ sind. Also ist die Wärmeleitungsgleichung äquivalent zu

$$\frac{dc_n}{dt} + \alpha \frac{n^2}{R^2} c_n = 0,$$

für alle ganzen Zahlen n, mit Lösung

$$c_n(t) = e^{-\alpha \frac{n^2}{R^2} t} c_n(0).$$

Die unendlich vielen Integrationskonstanten $c_n(0)$ werden festgelegt, wenn Anfangsbedingungen gestellt werden. Ist $u(x,0) = f(x)$ die gegebene, $2\pi R$-periodische Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$, so sind die Fourier-Koeffizienten $c_n(0)$ zur Zeit 0 gleich den Fourier-Koeffizienten von f, nämlich

$$c_n(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(x)\, e^{-inx/R} dx.$$

Das Resultat ist also

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Temperaturverteilung $u(x,t) = u(x+2\pi R, t)$ auf einem Ring vom Radius R,

$$\begin{aligned} &u_t - \alpha u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x) \end{aligned}$$

ist

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(0)\, e^{inx/R - \alpha n^2 t/R^2},$$

mit

$$c_n(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(x)\, e^{-inx/R} dx.$$

Bemerkung. Wir haben in der Herleitung der Lösung *komplexe Zahlen* benutzt. Genauer haben wir die Funktion $u(x,t)$ als eine *komplexwertige* Funktion von reellen Variablen x, t betrachtet. Obwohl das physikalische Problem nach einer reellwertigen Lösung fragt, ist es nützlich, das Problem in dieser grösseren Allgemeinheit zu studieren: Der Vorteil besteht wie bei linearen gewöhnlichen Differenzialgleichungen darin, dass Exponentialfunktionen leichter zu behandeln sind als trigonometrische Funktionen. Auf jeden Fall sind reellwertige Lösungen Spezialfälle von komplexwertigen Lösungen, und bei reellen Anfangsbedingungen erhält man automatisch reelle Lösungen. Spezielle Eigenschaften von reellwertigen Fourier-Reihen werden im nächsten Abschnitt studiert.

3.3. **Reelle Fourier-Reihen, Kosinus- und Sinusreihen.** Aus den Formeln

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \tag{9}$$

folgt, dass jede Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x},$$

auch mit cos und sin geschrieben werden kann:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{2\pi n}{L} x + b_n \sin\frac{2\pi n}{L} x \right).$$

Die Koeffizienten a_n, b_n werden mit Hilfe von (9) durch c_n ausgedrückt: $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Mit (8) hat man dann das Resultat

Für jede L-periodische stückweise 2-mal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt (ausser an den Unstetigkeitsstellen)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{L}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{L}x\right).$$

Die Fourier-Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ sind:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\,\cos\frac{2\pi n}{L}x\,dx, \qquad n \geq 0, \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\,\sin\frac{2\pi n}{L}x\,dx, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Definition. Eine Funktion $f(x)$ heisst *gerade* falls $f(-x) = f(x)$. Sie heisst *ungerade* falls $f(-x) = -f(x)$.

Zum Beispiel ist, für alle a, $\cos(ax)$ eine gerade Funktion, $\sin(ax)$ eine ungerade Funktion. Das Produkt von zwei geraden oder zwei ungeraden Funktionen ist gerade. Das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ist ungerade. Das Integral einer ungeraden Funktion auf einem symmetrischen Intervall $[-L/2, L/2]$ verschwindet. Daraus folgt:

Ist $f(x)$ eine ungerade L-periodische Funktion, so verschwinden die Fourier-Koeffizienten a_n, und $f(x)$ ist durch eine Sinusreihe gegeben:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n\,x}{L}, \qquad (f \text{ ungerade}),$$

wobei

$$b_n = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} f(x)\,\sin\frac{2\pi n\,x}{L}\,dx, \qquad n \geq 1. \tag{10}$$

Die Formel für die Koeffizienten ist durch ein Integral einer geraden Funktion gegeben: Der Beitrag des Intervalls $[-L/2, 0]$ ist gleich dem Beitrag des Intervalls $[0, L/2]$.

Analog erhält man:

Ist $f(x)$ eine gerade L-periodische Funktion, so verschwinden die Fourier-Koeffizienten b_n, und $f(x)$ ist durch eine Kosinusreihe *gegeben:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{L} x, \qquad (f \text{ gerade}),$$

wobei

$$a_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} f(x) \cos \frac{2\pi n}{L} x \, dx, \qquad n \geq 0.$$

3.4. **Die schwingende Saite.** Ein Modell für die ebene Schwingungen einer an den Endpunkten festgehaltenen Saite der Länge ℓ ist durch die Wellengleichung mit Randbedingungen gegeben:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad 0 \leq x \leq \ell, \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Dabei ist $u(x,t)$ die Amplitude der Saite im Punkt x zur Zeit t. Dies bedeutet, dass die Lage der Saite zur Zeit t durch die Kurve in der x-y-Ebene mit Gleichung $y = u(x,t)$ beschrieben wird. Die Randbedingungen $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ besagen, dass die Endpunkte zu allen Zeiten festgehalten werden.

Physikalisch erwartet man, dass die Lösung eindeutig bestimmt wird, wenn wir zu einer bestimmten Zeit, sagen wir $t = 0$, die Anfangslage $u_0(x)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0(x)$ vorgeben. Also betrachten wir zusätzlich zu (11) die *Anfangsbedingungen*

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ u_t(x,0) &= v_0(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \end{aligned} \tag{12}$$

Die vorgegebenen Funktionen $u_0(x)$, $v_0(x)$ sollen mit den Randbedingungen verträglich sein, also für $x = 0, \ell$ verschwinden.

Obwohl dieses Anfangswertproblem mit einem direkten Fourieransatz gelöst werden kann, wie bei der Wärmeleitungsgleichung, wollen wir hier systematischer die Methode der Separation der Variablen anwenden. Also schreiben wir $u(x,t) = X(x)T(t)$ und finden die separierten Gleichungen

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad c^{-2} T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung ist

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Die Randbedingungen $X(0) = X(\ell) = 0$ sind nur dann erfüllt, falls $A = 0$ und $\sqrt{\lambda}\ell = \pi n$, wobei n eine ganze Zahl ist. Also ist $\lambda = (\pi n/\ell)^2$ und linear unabhängige Lösungen der zweiten Gleichung sind $\cos(\omega_n t), \sin(\omega_n t)$, $\omega_n = c\pi n/\ell$. Wir erhalten die Lösung von (11)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t))\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right), \qquad \omega_n = \frac{c\pi n}{\ell}.$$

Setzen wir $t = 0$ in u und u_t so erhalten wir aus den Anfangsbedingungen Gleichungen für die Koeffizienten A_n, B_n:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right). \\ v_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right). \end{aligned}$$

Also sind u_0, v_0 Sinusreihen mit $L = 2\ell$. Aus der Formel für die Fourier-Koeffizienten erhalten wir

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} u_0(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right). \tag{13}$$

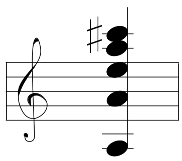
$$B_n = \frac{2}{c\pi n}\int_0^{\ell} v_0(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right). \tag{14}$$

Dabei ist es wichtig, dass die Koeffizienten der Sinusreihen nur von den Werten von u_0, v_0 auf dem Intervall $[0,\ell]$, wo unsere Funktionen definiert sind, abhängen. Die Sinusreihen selbst sind dann für alle x definiert: Ihre Summen sind die eindeutigen ungeraden 2ℓ-periodischen Funktionen, die mit u_0, bzw. v_0 auf $[0,\ell]$ übereinstimmen.

Wir fassen zusammen:

Die Lösung von (11) mit Anfangsbedingungen (12) ist die Reihe
(15)
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right).$$
wobei
$$\omega_n = \frac{c\pi n}{\ell},$$
und die Koeffizienten A_n, B_n aus den Anfangsbedingungen mittels (13) auszurechnen sind.

Die Zahlen ω_n sind die *Kreisfrequenzen* der Schwingung. Die Lösung (12) ist eine Summe von *Eigenschwingungen*: Jeder Summand ist eine in der Zeit periodische Funktion, wobei die Periode des n-ten Summanden $2\pi/\omega_n$ ist. Dies entspricht einer *Frequenz* (Zyklen pro Zeiteinheit) $\nu_n = \omega_n/(2\pi)$. Lässt man die Saite eines musikalischen Instruments schwingen, so empfindet das Ohr die Frequenzen der Schwingungen als Tonhöhen, wobei Frequenzen in gleichen Verhältnissen als gleiche Intervalle empfunden werden. Mit einer Grundfrequenz von beispielsweise $\nu_1 = 220$ Hz $= 220$ Zyklen pro Sekunde, sind die Frequenzen $\nu_1, \dots, \nu_5$ die Frequenzen der Noten nebenan. Welche Note entspricht der Frequenz ν_6?



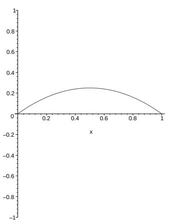
Bemerkung. Die Lösung mit Fourier-Reihen, die wir hier vorgestellt haben, ist für die physikalische Interpretation der Lösung als Superposition von Eigenschwingungen nützlich. Interessiert man sich nur für eine Lösung des Anfangswertproblems, so kann man es auch, und expliziter, mit Hilfe der d'Alembert Lösung lösen, was der Leserin, dem Leser überlassen wird.

3.5. **Ein schlecht gestelltes Problem.** Wir kommen auf das Beispiel 2.A der Wärmeleitung in einem Stab der Länge ℓ zurück. Die Lösung lautet
$$u(x,t) = \sum b_n e^{-\frac{\alpha\pi^2 n^2 t}{\ell^2}} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$
wobei die Koeffizienten b_n aus der Anfangstemperatur $f(x)$ durch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) = f(x)$ zu bestimmen sind. Nach (10), mit $L = 2\ell$ erhalten wir
$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\frac{\pi n}{\ell} x \, dx, \qquad n \geq 1.$$

In dieser Herleitung haben wir nirgends von der physikalisch gegebenen Tatsache Gebrauch gemacht, dass $\alpha > 0$ ist. Trotzdem hängen die Eigenschaften des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \alpha u_{xx}$ wesentlich vom Vorzeichen von α ab.

Ist $\alpha > 0$, so nehmen die Fourierkoeffizienten $b_n(t) = b_n e^{-cn^2 t}$ ($c = \alpha\pi^2/\ell^2 > 0$) mit $n > 0$ exponentiell schnell ab, und je grösser n desto schneller streben sie gegen 0. Wir haben also ein wohl gestelltes Problem: Das Anfangswertproblem hat eine eindeutige Lösung, und eine kleine Änderung der Anfangsbedingung hat eine kleine Änderung der Lösung zur Folge. Auch numerisch ist das Anfangswertproblem sehr gut: Ersetzt man die Anfangsfunktion f durch die ersten paar Summanden in ihrer Fourier-Reihe, so erhält man eine sehr gute Approximation der Lösung ausser für sehr kleine Zeiten.

Ist $\alpha < 0$, so wachsen die Fourierkoeffizienten $b_n(t)$ von $u(x,t)$ exponentiell mit der Zeit und mit einer Rate, die mit n wächst. Dies hat zur Folge, dass das Anfangswertproblem *schlecht gestellt* ist. Erstens existiert eine Lösung nur für sehr spezielle Anfangsbedingungen: Die Fourierkoeffizienten der Anfangsfunktion f müssen derart schnell mit n gegen 0 streben, dass die Reihe für $u(x,t)$ für positive t immer noch konvergiert. Selbst dann ist das Problem instabil: Ändert man die Anfangsbedingung wenig, so dass sich die Fourierkoeffizienten wenig ändern, hat das für die Lösung für $t >> 0$ grosse Konsequenzen: Die Änderung der Fourierkoeffizienten wird mit der Zeit exponentiell gross.



>Visualisierung $\alpha > 0$
>Visualisierung $\alpha < 0$

Instruktiv ist der Vergleich der grafischen Darstellungen der (durch eine Partialsumme der Fourier-Reihe approximierten) Lösungen des Anfangswertproblems der Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $[0,1]$ mit Anfangsbedingung $u(x,0) = x(1-x)$ und $\alpha = 1$ bzw. $\alpha = -0.001$ (Klicken Sie nebenan).

4. Fouriertransformationen

Wir haben gesehen, dass jede L-periodische Funktion $f(x)$ durch eine Fourierreihe $\sum c_n e^{2\pi i n x/L}$ gegeben ist. Also kann jede solche Funktion als Superposition (unendliche Linearkombination) von Funktionen der Form e^{ikx} dargestellt werden, wobei k über die Menge $\{\cdots - \frac{2\pi}{L}, 0, \frac{2\pi}{L}, \frac{4\pi}{L}, \cdots\}$ läuft. Der Abstand Δk zwischen zwei benachbarten Werten von k ist $2\pi/L$. Mit Hilfe der Fourierreihen kann man partielle Differenzialgleichungen auf endlichen Intervallen wie die Wellengleichung für die schwingende Saite untersuchen. Für lineare PDG in unendlichen Gebieten spielen *Fouriertransformationen* dieselbe Rolle.

Die (heuristische) Idee besteht darin, Funktionen auf der reellen Achse als L-periodische Funktionen mit unendlich grossem L zu betrachten. Im Grenzwert $L \to \infty$ strebt der Abstand $\Delta k = 2\pi/L$ gegen 0, und die Summe der Fourierreihe wird zu einem Integral. Um diese Idee in Formeln umzusetzen, ist es nützlich, die Fourierreihe einer L-periodischen Funktion f umzuschreiben, in dem man für $k = 2\pi n/L$, $n \in \mathbb{Z}$, die Notation

$$\hat{f}_L(k) = L c_n = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, e^{-ikx} dx, \qquad n = \frac{Lk}{2\pi},$$

einführt. Dann gilt

$$f(x) = \sum_k \frac{1}{L} \hat{f}_L(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_k \hat{f}_L(k)\, e^{ikx} \Delta k, \qquad \Delta k = \frac{2\pi}{L}.$$

Hier läuft die Summe über $k = 2\pi n/L$, $n \in \mathbb{Z}$. Die Summe auf der rechten Seite ist eine Riemannsche Summe. Nimmt man also formal den Grenzwert $L \to \infty$, so gilt für die *Fouriertransformierte* einer auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion f

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx,$$

der Satz von Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx} dk.$$

Dieser Satz gilt tatsächlich, aber unter geeigneten Annahmen über f, die die Konvergenz der uneigentlichen Integrale garantieren. Eine mögliche Formulierung (von L. Schwartz), die wir gleich in n Dimensionen angeben, ist die folgende: Wir sagen, dass eine Funktion f auf

$\mathbb{R}^n$ *schnell abfällt* wenn für jedes $N > 0$ ein R_N existiert, so dass $|\mathbf{x}| > R_N \implies |f(\mathbf{x})| \leq 1/|\mathbf{x}|^N$.

Satz 4.1. *Sei f eine komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so dass f und alle ihre partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung schnell abfallen. Dann hat die* Fouriertransformierte *von f*

$$(16) \qquad \hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx_1 \cdots dx_n, \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n,$$

dieselbe Eigenschaft und es gilt

$$(17) \qquad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dk_1 \cdots dk_n.$$

Hier ist $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_1x_1 + \cdots + k_nx_n$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Umgekehrt, unter denselben Annahmen für eine Funktion $\hat{f}$, definiert (17) ihre inverse Fouriertransformierte *(oder Fourierrücktransformierte) f und es gilt (16).*

Beispiel 4.A. Wir berechnen die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$ (für $n = 1$):

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+ik/(2a))^2 - k^2/(4a)} dx \\ &= e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \\ &= e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \end{aligned}$$

Die Variablensubstitution $y = x + ik/(2a)$ mit einer Verschiebung um eine *komplexe* Zahl kann im Rahmen der komplexen Analysis gerechtfertigt werden. Eine ähnliche Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx} dk &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{4\pi a}\, e^{-ax^2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

4.1. **Fouriertransformierte reeller Funktionen.** Ist f eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so erfüllt die Fouriertransformierte die Relation

$$\overline{\hat{f}(\mathbf{k})} = \hat{f}(-\mathbf{k}),$$

wie man aus der Definition unmittelbar sieht. Umgekehrt erfüllt die Fouriertransformierte einer Funktion f diese Relation, so gilt

$$\begin{aligned}
\overline{f(\mathbf{x})} &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}dk_1\cdots dk_n \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(\mathbf{k})}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dk_1\cdots dk_n \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(-\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dk_1\cdots dk_n \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dk_1\cdots dk_n \\
&= f(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Also nimmt $f(\mathbf{x})$ nur reelle Werte. Es folgt

> *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ nimmt genau dann ihre Werte in $\mathbb{R}$ an, wenn ihre Fouriertransformierte die Relation*
>
> $$\overline{\hat{f}(\mathbf{k})} = \hat{f}(-\mathbf{k})$$
>
> *erfüllt.*

Man bemerke, dass die Fouriertransformierte einer reellwertigen Funktion im allgemeinen nicht reellwertig ist.

Beispiel 4.B. (Übung) Die Fouriertransformierte von

$$f(x) = e^{-a(x-b)^2}, \qquad a > 0, b \in \mathbb{R},$$

ist

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-k^2/(4a)-ikb}.$$

5. Wärmeleitungsgleichung

Das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$ lautet

$$\begin{array}{lll} (18) & u_t(x,t) = \alpha u_{xx}(x,t), & -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ & u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty. \end{array}$$

Die anfängliche Temperaturverteilung $f(x)$ ist eine gegebene Funktion, und die Konstante $\alpha > 0$ ist ein fester Parameter. In Analogie zum Fall eines Ringes schreiben wir die Gleichung als eine Differenzialgleichung für die Fouriertransformierte von u bezüglich x. Es gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k,t)\, e^{ikx} dk, \qquad \hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-ikx} dx.$$

Differenziert man unter dem Integral, so erhält man

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_t(k,t)\, e^{ikx} dk, \\ u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k,t)(ik)^2\, e^{ikx} dk. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\hat{u}(k,t)$ das folgende Anfangswertproblem erfüllt:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(k,t) = -\alpha k^2 \hat{u}(k,t), & k \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k), & k \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Also erfüllt $\hat{u}(k,t)$ für jedes feste k eine *gewöhnliche* Differenzialgleichung, mit Anfangsbedingung $\hat{f}(k)$. Die Lösung ist

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\, e^{-\alpha k^2 t}.$$

Daraus erhält man die Lösung $u(x,t)$ des Anfangswertproblems, ausgedrückt durch die Fouriertransformierte der Anfangstemperaturverteilung $f(x)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{-\alpha k^2 t + ikx} dk, \\ \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

Setzt man die zweite Formel in die erste ein, so erhält man

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$ *ist*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-x')f(x')dx'$$

mit Wärmeleitungskern

$$K_t(x-x') = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}.$$

Obwohl diese Formel mit Hilfe von Fouriertransformationen hergeleitet worden ist, also unter der Voraussetzung, dass u schnell abfällt, gilt diese Formel unter schwächeren Annahmen. Zum Beispiel gilt die Wärmeleitungsgleichung für u für alle $t > 0$ falls f stückweise stetig und beschränkt ist, und es gilt in diesem Fall $\lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = f(x)$. Ein Teil des Beweises ist die (als Übung für den Leser und die Leserin empfohlene) Tatsache, dass $K_t(x-x')$, bei festem x', die Wärmeleitungsgleichung selber erfüllt.

Bemerkung. Der Wärmeleitungskern erfüllt

1) $\int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-x')dx = 1$.
2) $K_t(x-x') > 0$.

Daraus folgen einfache aber physikalisch wichtige Eigenschaften. Aus 1) folgt: Wenn die Temperatur anfänglich konstant ist, dann bleibt sie immer gleich. Aus 2) folgt: Ist die Anfangstemperatur positiv, so bleibt sie für alle Zeiten positiv.

Dieselbe Rechnung mit geringem Unterschied gilt in n Dimensionen. In 3 Dimensionen hat man zum Beispiel

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} &u_t(\mathbf{x},t) = \alpha\triangle u(\mathbf{x},t), && \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, t\geq 0,\\ &u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x}), && \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

ist

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} K_t(\mathbf{x}-\mathbf{x}')f(\mathbf{x}')dx_1'dx_2'dx_3'$$

mit Wärmeleitungskern

$$K_t(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}}\, e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4\alpha t}}.$$

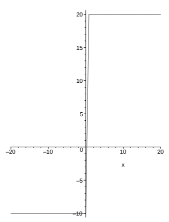
In n Dimensionen ist der Exponent im Nenner $n/2$.

Beispiel 5.A. Wir suchen die Temperaturverteilung für $t > 0$ in der Nähe des Punktes, wo zwei identische homogene Stäben zur Zeit $t = 0$ zusammengefügt werden, die anfänglich unterschiedliche, konstante Temperaturen T_1, T_2 haben.

Wir wählen den Ursprung $x = 0$ im Punkt wo sich die beiden Stäbe berühren. Also haben wir das Anfangswertproblem (18) mit

$$f(x) = \begin{cases} T_1, & x > 0, \\ T_2, & x < 0. \end{cases} \tag{19}$$

Wir nehmen zunächst an, dass $T_1 = -T_2 \equiv T$. Diese Annahme wird die Rechnung vereinfachen; den allgemeinen Fall werden wir durch Verschiebung des Nullpunktes erhalten. Die Lösung ist



$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{0} K_t(x-x')(-T)\,dx' + \int_0^\infty K_t(x-x')\,T\,dx' \\ &= \frac{T}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\left(-\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}dx' + \int_0^\infty e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}dx'\right) \\ &= \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\left(-\int_{x/\sqrt{2\alpha t}}^{\infty} e^{-y^2/2}dy + \int_{-x/\sqrt{2\alpha t}}^{\infty} e^{-y^2/2}dy\right) \\ &= \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x/\sqrt{2\alpha t}}^{x/\sqrt{2\alpha t}} e^{-y^2/2}dy, \end{aligned}$$

>Visualisierung

(Variablensubstitution $y = (x-x')/\sqrt{2\alpha t}$ bzw. $y = (x'-x)/\sqrt{2\alpha t}$). Diese Lösung können wir durch die in der Statistik wichtige (und in Rechnern vorhandenen) *Fehlerfunktion* (error function)

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z}^{z} e^{-y^2/2}dy,$$

ausdrücken:

$$u(x,t) = T\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right).$$

Den Fall, wo T_1, T_2 beliebig sind, führen wir auf diesen zurück: u genügt der Wärmeleitungsgleichung genau dann, wenn $u - C$ sie erfüllt. Sei u die Lösung des Anfangswertproblems mit beliebigen T_1, T_2. Wir wählen C gleich dem Mittelwert $(T_1 + T_2)/2$. Dann erfüllt $u - C$ die Anfangsbedingung mit Anfangswerten $T, -T$, wobei $T = (T_1 - T_2)/2$.

Die gesuchte Lösung ist also

$$u(x,t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right).$$

Die erf Funktion erfüllt $\mathrm{erf}(z) \to \pm 1$ wenn $z \to \pm\infty$ also gilt für alle $t > 0$, wie erwartet,

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = T_1, \qquad \lim_{x\to-\infty} u(x,t) = T_2.$$

6. Die Wellengleichung

Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung in n Dimensionen ist

$$\begin{aligned} &c^{-2}u_{tt}(\mathbf{x},t) - \triangle u(\mathbf{x},t) = 0, && \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, && t \geq 0,\\ &u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\\ &u_t(\mathbf{x},0) = g(\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

$c > 0$ ist eine feste Konstante und f, g sind vorgegebene Funktionen.

Das eindimensionale Problem haben wir im Abschnitt 1.3 gelöst. Die Lösung ist eindeutig und lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy.$$

Wir wenden uns dem dreidimensionalen Fall zu, den wir mit Hilfe der Fouriertransformationen lösen.

6.1. **Lösung der 3-dimensionalen Wellengleichung durch Fouriertransformation.** Wir gehen vor wie bei der Wärmeleitungsgleichung und drücken die gesuchte Funktion u durch ihre Fouriertransformierte aus:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}(\mathbf{k},t)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, dk_1dk_2dk_3.$$

Wir setzen diese Formel in die Wellengleichung $c^{-2}u_{tt} - \triangle u = 0$ ein und differenzieren unter dem Integral:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} [c^{-2}\hat{u}_{tt}(\mathbf{k},t) + |\mathbf{k}|^2 u(\mathbf{k},t)]e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, dk_1dk_2dk_3 = 0.$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist also die Fouriertransformation der Funktion 0, muss also verschwinden. Das Anfangswertproblem für die Transformation $\hat{u}$ ist dann

$$\begin{aligned} &c^{-2}\hat{u}_{tt}(\mathbf{k},t) + |\mathbf{k}|^2\hat{u}(\mathbf{k},t) = 0, && \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, && t \geq 0,\\ &\hat{u}(\mathbf{k},0) = \hat{f}(\mathbf{k}), && \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3,\\ &\hat{u}_t(\mathbf{k},0) = \hat{g}(\mathbf{k}), && \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Für jedes feste $\mathbf{k}$ haben wir das Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung ist:

$$\hat{u}(\mathbf{k},t) = A(\mathbf{k})\cos(|\mathbf{k}|ct) + B(\mathbf{k})\sin(|\mathbf{k}|ct).$$

Die Integrationskonstanten A, B werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\hat{u}(\mathbf{k},0) = A(\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k}), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} u(\mathbf{k},t) = |\mathbf{k}|cB(\mathbf{k}) = \hat{g}(\mathbf{k}).$$

Also ist die *Lösung* des Anfangswertproblems:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\hat{f}(\mathbf{k})\,\cos(|\mathbf{k}|ct) + \hat{g}(\mathbf{k})\frac{\sin(|\mathbf{k}|ct)}{|\mathbf{k}|c}\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,dk_1dk_2dk_3.$$

Dabei sind die Fouriertransformierten von f, g durch die übliche Formel gegeben:

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dx_1dx_2dx_3, \qquad \hat{g}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dx_1dx_2dx_3.$$

6.2. **Die Kirchhoff-Lösung.** Die obige Lösungsmethode kann in n Dimension angewendet werden und die Lösung ist durch dieselbe Formel (mit 3 durch n ersetzt) gegeben. In drei Dimensionen können wir sie aber so umformen, dass physikalisch wichtige Eigenschaften der Wellenfortpflanzung ersichtlich sind. Wir betrachten zuerst den Fall wo $f(\mathbf{x}) \equiv 0$. Also ist

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{g}(\mathbf{k})\frac{\sin(|\mathbf{k}|ct)}{|\mathbf{k}|c}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,dk_1dk_2dk_3.$$

Wir verwenden folgende nützliche Identität:

Lemma 6.1. *Sei $S_R = \{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3\,|\,|\mathbf{y}| = R\}$ die Oberfläche der Kugel mit Radius R und Mittelpunkt $\mathbf{0}$, $d\omega(\mathbf{y})$ ihr Oberflächenelement. Dann gilt:*

$$\frac{\sin(|\mathbf{k}|R)}{|\mathbf{k}|} = \frac{1}{4\pi R}\int_{S_R} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}d\omega(\mathbf{y})$$

Beweis: Wir werten das Integral auf der rechten Seite in Kugelkoordinaten θ, φ aus, wobei die z-Achse parallel zu $\mathbf{k}$ gewählt wird, θ der Winkel zwischen $\mathbf{y}$ und $\mathbf{k}$ ist und φ der azimutale Winkel ist. Es gilt also $\mathbf{k}\cdot\mathbf{y} = R|\mathbf{k}|\cos\theta$ und $d\omega(\mathbf{y}) = R^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$. Also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi R}\int_{S_R} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}d\omega(\mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi R}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{iR|\mathbf{k}|\cos\theta}R^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta \\
&= \frac{2\pi R^2}{4\pi R}\int_0^\pi e^{iR|\mathbf{k}|\cos\theta}\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{R}{2}\int_{-1}^1 e^{iR|\mathbf{k}|z}dz \\
&= \frac{\sin(|\mathbf{k}|R)}{|\mathbf{k}|}.
\end{aligned}$$

Das Lemma ist bewiesen. □

Wir setzen diese Formel mit $R = ct$ in die Lösung ein:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{g}(\mathbf{k})\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})}\,d\omega(\mathbf{y})\,dk_1dk_2dk_3.$$

Aus der Integration über $\mathbf{k}$ gewinnen wir (nach Vertauschen der Integrationen) $g(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Also

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} g(\mathbf{x}+\mathbf{y})d\omega(\mathbf{y}).$$

Also ist $u(\mathbf{x},t)$ gleich t mal *dem Mittelwert von g auf einer Kugeloberfläche mit Radius ct*. Das ist die Lösung wenn $f = 0$. Der Term mit f kann auf derselben Weise behandelt werden, wenn wir bemerken, dass der Koeffizient von $\hat{f}(\mathbf{k})$ auch durch den Ausdruck des Lemmas geschrieben werden kann:

$$\cos(\mathbf{k}ct) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(|\mathbf{k}|ct)}{|\mathbf{k}|c}.$$

Wir erhalten die Formel von Kirchhoff:

Die Lösung des Anfangswertproblems in drei Dimensionen ist

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} f(\mathbf{x}+\mathbf{y})d\,\omega(\mathbf{y})\right) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} g(\mathbf{x}+\mathbf{y})d\,\omega(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

6.3. **Das Huygens-Prinzip.** Aus der Kirchhoff-Form der Lösung erkennt man eine wichtige Eigenschaft der Wellengleichung in drei Dimensionen: Nehmen wir an, dass die Anfangsfunktionen überall verschwinden ausser in einer kleinen Umgebung eines Punktes $\mathbf{x}_0$.

Im Falle der Schallwellen, wo $u(\mathbf{x}, t)$ die Druckverteilung der Luft darstellt, können wir uns vorstellen, dass überall Stille herrscht, ausser in der Unmgebung von $\mathbf{x}_0$, wo jemand zur Zeit $t = 0$ ein Wort ausgesprochen und dadurch eine Abweichung im Luftdruck verursacht hat.

Wie ist dann die Druckverteilung zu einer Zeit $t > 0$? Wir sehen, dass wir f und g über eine Kugeloberfläche vom Radius ct mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ integrieren müssen, um $u(x, t)$ auszurechnen. Damit diese Integrale nicht verschwinden, muss die Kugeloberfläche durch die Umgebung von $\mathbf{x}_0$ gehen, den einzigen Ort, wo $f, g \neq 0$. Dies bedeutet dass, zu gegebener Zeit t, $u(\mathbf{x}, t)$ verschwindet ausser wenn $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \simeq ct$. Also gilt das *Huygens-Prinzip* für die Wellengleichung in 3 Dimensionen:

> *Verschwinden die Anfangsdaten f, g ausser in einer kleinen Umgebung von $\mathbf{x}_0$, so verschwindet die Lösung zur Zeit $t > 0$ ausser in einer kleinen Umgebung einer Kugeloberfläche mit Radius ct und Mittelpunkt $\mathbf{x}_0$.*

In anderen Worten: Das zur Zeit 0 in $\mathbf{x}_0$ ausgesprochene Wort wird zur Zeit $t > 0$ von allen gehört, die sich im Abstand ct von $\mathbf{x}_0$ befinden.

7. Laplacetransformationen

7.1. Definitionen, elementare Beispiele.

Definition. Die *Laplacetransformierte* $F(s)$ einer für $t \geq 0$ definierten Funktion $f(t)$ ist

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

Die Laplacetransformierte F von f wird auch mit $\mathcal{L}[f]$ bezeichnet. Wir betrachten also $\mathcal{L}$, die *Laplacetransformation*, als eine lineare Abbildung, die einer Funktion f die Funktion $F = \mathcal{L}[f]$ zuordnet. Die Laplacetransformierte $F(s)$ ist für diejenigen s definiert, für die das Integral existiert.

Rapporté par Victor Hugo:
M. Arago avait une anecdote favorite. Quand Laplace eut publié sa Mécanique céleste, disait-il, l'empereur le fit venir. L'empereur était furieux. Comment, s'écria-t-il en apercevant Laplace, vous faite tout le système du monde, vous donnez les lois de toute la création et dans tout votre livre vous ne parlez pas une seule fois de l'existence de Dieu! Sire, répondit Laplace, je n'avais pas besoin de cette hypothèse.

Beispiel 7.A. Wir berechnen die Laplacetransformierte von $f(t) = t^n$, für $n = 0, 1, \cdots$. Sie ist für $s > 0$ definiert. Für $n = 0$ ist $f(t) = 1$, also $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = 1/s$. Für $n > 0$ haben wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^n e^{-st} dt &= t^n \frac{1}{-s} e^{-st}\Big|_0^\infty - \int n t^{n-1} \frac{1}{-s} e^{-st} dt \\ &= \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt.\end{aligned}$$

Durch Iteration dieser Identität erhalten wir

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdots \cdot \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Der letzte Faktor $1/s$ ist das Integral für $n = 0$. Die Laplacetransformierte von $f(t) = t^n$ ist also $F(s) = n!/s^{n+1}$.

Beispiel 7.B. Sei $f(t) = e^{at}$. Dann ist die Laplacetransformierte definiert für $s > a$ und es gilt $F(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = 1/(s-a)$.

Allgemeiner gilt: ist $f(t)$ eine stetige, auf $[0, \infty)$ definierte Funktion mit $|f(t)| \leq Ce^{at}$, so ist die Laplacetransformierte von f für alle $s > a$. Der Integrand ist nämlich dann kleiner als $Ce^{(a-s)t}$, das exponentiell gegen 0 für $t \to \infty$ strebt, und das Integral existiert.

Beispiel 7.C. *Die Heaviside Funktion.* Die Heaviside Funktion ist die Funktion:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Also gilt

$$H(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a, \\ 0, & t < a. \end{cases}$$

In der Praxis kommt diese Funktion vor, wenn man einen Einschaltprozess zur Zeit a beschreiben will. Für $a \geq 0$ ist die Laplacetransformierte von $H(t-a)$

$$\int_a^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{-s}e^{-st}|_a^\infty = \frac{1}{s}e^{-as}.$$

Sie ist für $s > 0$ definiert.

7.2. **Inverse Laplacetransformation.** Eine Funktion $f(t)$ heisst *inverse Laplacetransformierte* (oder Laplace-Rücktransformierte) einer Funktion $F(s)$ falls $F(s)$ die Laplacetransformierte von $f(t)$ ist. Wir schreiben dann $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$.

Nicht alle Funktionen haben eine inverse Laplacetransformierte. Man kann aber zeigen, dass die inverse Laplacetransformierte, falls sie als stetige Funktion auf $[0, \infty)$ existiert, eindeutig durch F bestimmt ist. Insbesondere ist $\mathcal{L}^{-1}$ linear. Eine Formel für $\mathcal{L}^{-1}[F]$ unter gewissen Annahmen über F kann mit Hilfe der komplexen Analysis gegeben werden. In den Fällen, wo die Laplacetransformation nützlich ist, findet man aber die inverse Laplacetransformierte einer Funktion durch Zurückführen auf Funktionen, von denen wir die Laplacetransformierte kennen. Zum Beispiel wissen wir aus obigem Beispiel, dass die inverse Laplacetransformierte von $1/s^2$ ist t.

7.3. **Eigenschaften.**

(1) *Linearität.* Die Laplacetransformation ist linear:

$$\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda\mathcal{L}[f] + \mu\mathcal{L}[g],$$

für f, g Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Konstanten.

(2) *Verschiebungssatz.* Ist $f(t) = e^{-at}g(t)$, so ist $F(s) = G(s+a)$.

(3) *Ableitungsregel.* Ist $F = \mathcal{L}[f]$, so gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] &= sF(s) - f(0),\\
\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0),\\
\mathcal{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] &= s^nF(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j}\frac{d^jf(0)}{dt^j}.
\end{aligned}$$

Wie wir sehen werden, ist diese Eigenschaft der Hauptgrund wieso Laplacetransformationen bei Differenzialgleichungen nützlich sind.

Im Folgenden setzen wir $F = \mathcal{L}[f]$ und $G = \mathcal{L}[g]$

$f(t)$	$F(s)$
$t^n \qquad (n = 0, 1, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a} \qquad (s > a)$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$H(t-a) \qquad (a > 0)$	e^{-as}/s
$\delta(t-a) \qquad (a > 0)$	e^{-as}

Tabelle 1. Tabelle der Laplacetransformationen

(4) *Faltungssatz.*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-t')g(t')dt'\right] = F(s)G(s).$$

Das Integral in den eckigen Klammern heisst *Faltung* von f und g. Diese Eigenschaft ist vor allem nützlich, um die inverse Laplacetransformierte eines Produktes auszurechnen, wenn die inversen Laplacetransformierten der Faktoren bekannt sind.

(5) *Zweite Ableitungsregel.*

$$f(t) = t^k g(t) \implies F(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} G(s).$$

(6) *Zweiter Verschiebungssatz.* Sei $a > 0$.

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-sa}F(s)] = H(t-a)f(t-a) = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a, \\ 0, & t < a \end{cases}$$

7.4. **Anwendung auf gewöhnliche Differenzialgleichungen.** Bevor wir Laplacetransformationen auf partiellen Differenzialgleichungen studieren, betrachten wir den einfacheren Fall der gewöhnlichen Differenzialgleichungen. Mit dieser Methode lassen sich viele einfache lineare Differenzialgleichungen lösen, die in den Anwendungen vorkommen. Diese Differenzialgleichungen kann man auch mit anderen bekannten Methoden lösen (Exponentialansatz, Variation der Konstanten). Die Lösung durch Laplacetransformation hat den Vorteil einer gewissen Automatisierung des Lösungsprozesses. Bei Anfangswertproblemen erlaubt ausserdem die erste Ableitungsregel das Einsetzen der Anfangsbedingungen schon bei der Lösung der Gleichung.

Diese Aspekte wollen wir jetzt an einigen Beispielen illustrieren. Das allgemeine Rezept ist: “1. Schreibe das Problem als ein Problem für die Laplacetransformierte, 2. Löse das Problem für die Laplacetransformierte, 3. Finde die inverse Laplacetransformierte der Lösung”

Beispiel 7.D. Betrachte das Anfangswertproblem mit Parameter a:

$$\begin{aligned}&\tfrac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = t,\\ &x(0) = a\end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Laplacetransformierte der Funktion $x(t)$ mit $X(s)$. Nach der Ableitungsregel ist $\mathcal{L}[dx/dt] = sX(s) - x(0) = sX(s) - a$. Die Laplacetransformierte von t ist $1/s^2$. Also erhält man mit der Linearität von $\mathcal{L}$ die Gleichung für X:

$$sX(s) - a + 2X(s) = \frac{1}{s^2},$$

mit Lösung

$$X(s) = \frac{1}{s+2}\left(a + \frac{1}{s^2}\right).$$

Nach Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$X(s) = \frac{a}{s+2} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{4(s+2)}.$$

Wir finden die inverse Laplacetransformierte $x(t)$ indem wir die Linearität von $\mathcal{L}^{-1}$ und die Tabelle verwenden:

$$x(t) = \left(a + \frac{1}{4}\right)e^{-2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}.$$

Beispiel 7.E. Wir lösen das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}&\ddot{x}(t) - x(t) = e^t,\\ &x(0) = \dot{x}(0) = 1\end{aligned}$$

(Der Punkt bezeichnet die Ableitung nach t). Es bezeichne wieder $X(s)$ die Laplacetransformierte von $x(t)$. Nach der Ableitungsregel hat man (mit den gegebenen Anfangsbedingungen) $\mathcal{L}[\ddot{x}] = s^2X(s) - s - 1$. Das Anfangswertproblem für $x(t)$ wird zur Gleichung

$$s^2X(s) - s - 1 - X(s) = \frac{1}{s-1}$$

für $X(s)$. Also haben wir (Partialbruchzerlegung)

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s^2-1}\left(\frac{1}{s-1} + s + 1\right) \\ &= \frac{1}{(s-1)^2(s+1)} + \frac{1}{s-1} \\ &= \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{3}{4(s-1)} + \frac{1}{4(s+1)} \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatz und der Tabelle können wir daraus die Rücktransformierte $x(t)$ bestimmen:

$$x(t) = \frac{t}{2}e^t + \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}.$$

Das ist die Lösung des Anfangswertproblems.

7.5. **Der schwach gedämpfte harmonische Oszillator.** Wir untersuchen hier ein Beispiel, wo der Faltungssatz das physikalische Prinzip der Kausalität ausdrückt. Die Newtonsche Bewegungsgleichung eines System mit einem Freiheitsgrad, das sich in der Nähe eines stabilen Gleichgewichtpunkts und unter dem Einfluss einer äusseren Kraft bewegt, ist

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) - 2k\dot{x}(t) + g(t), \qquad \omega, k > 0.$$

Dabei ist $x(t)$ die Abweichung von der Gleichgewichtslage. Man kann sich darunter ein an eine Feder gebundenes Teilchen vorstellen, das sich in der Nähe der Gleichgewichtslage bewegt. Die linke Seite ist die Beschleunigung, die rechte die Kraft dividiert durch die Masse: der erste Term ist proportional zum Abstand von der Gleichgewichtslage und kommt von der Federkraft; der zweite Term ist ein Reibungsterm, der proportional zur Geschwindigkeit ist. Die äussere, zeitabhängige, Kraft ist Masse$\times g(t)$.

Wir betrachten den Fall der *schwachen Dämpfung*, wo die *Dämpfungskonstante* k die Ungleichung

$$k < \omega$$

erfüllt. Die Fälle der starken ($k > \omega$) und kritischen ($k = \omega$) Dämpfung können mit derselben Methode studiert werden, und sind als Übung überlassen.

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass das System sich anfänglich in Ruhe in der Gleichgewichtslage befindet. Also haben wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}&\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) + 2k\dot{x}(t) = g(t), \qquad \omega, k > 0.\\&x(0) = \dot{x}(0) = 0\end{aligned}$$

Hier ist $g(t)$ eine gegebene Funktion. Im Studium der Resonanzen ist zum Beispiel $g(t) = \epsilon \sin(\omega_0 t)$ eine kleine periodische Störung des Systems mit Kreisfrequenz ω_0. Wir wollen aber hier den Fall einer allgemeinen gegebenen Funktion $g(t)$ betrachten.

Sei wieder $X(s)$ die Laplacetransformierte von $x(t)$ und es bezeichne $G(s)$ die Laplacetransformierte von $g(t)$. Dann erfüllt $X(s)$ die Gleichung

$$(s^2 + \omega^2 + 2ks)X(s) = G(s).$$

Also

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s^2 + 2ks + \omega^2} G(s)\\&= \frac{1}{(s+k)^2 + \omega^2 - k^2} G(s)\end{aligned}$$

Da $k < \omega$ ist $\omega^2 - k^2 > 0$. Wir setzen

$$\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - k^2}$$

Die inverse Laplacetransformierte des ersten Faktors in $X(s)$ ist

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+k)^2 + \bar{\omega}^2}\right] = e^{-kt}\frac{\sin(\bar{\omega}t)}{\bar{\omega}},$$

(Verschiebungssatz, Tabelle). Also erhalten wir die Lösung durch den Faltungssatz:

$$x(t) = \int_0^t h(t-t')g(t')dt', \qquad h(t) = e^{-kt}\frac{\sin(\bar{\omega}t)}{\bar{\omega}}, \qquad \bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - k^2}.$$

Die Funktion $h(t)$ heisst *Einflussfunktion* oder *Greensche Funktion*: $h(t - t')$ gibt den Einfluss der äusseren Störung $g(t')$ zur Zeit t' auf die Lösung zur Zeit t. Da die Integration auf dem Intervall $0 \leq t' \leq t$ ist, beinflusst die Störung zur Zeit t' nur $x(t)$ zu *späteren* Zeiten t, ein Ausdruck des Kausalitätsprinzips.

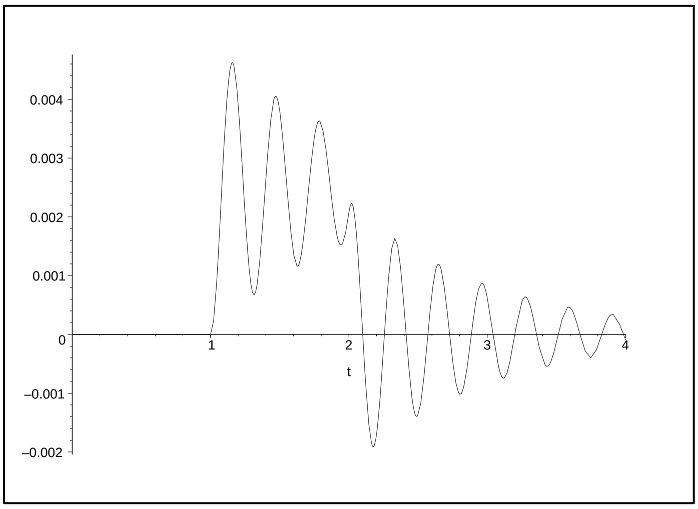


Abbildung 3. Der gestossene Oszillator

Zum Beispiel sei

$$g(t) = \begin{cases} a, & t_0 < t < t_1 \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

mit $0 < t_0 < t_1$. Mit anderen Worten, wir legen einem anfänglich ruhenden Oszillator zur Zeit t_0 eine Kraft a an, die zur Zeit t_1 wieder ausgeschaltet wird. Um die Formel zu vereinfachen, schreiben wir $x(t) = \int_0^t h(t-t')g(t')dt'$ mit Hilfe der Heaviside Funktion als $\int_0^\infty H(t-t')h(t-t')g(t')dt'$. Mit unserer Wahl von g erhalten wir dann

$$\begin{aligned} x(t) &= a\int_{t_0}^{t_1} H(t-t')h(t-t')dt' \\ &= a\int_{t_0}^{t_1} H(t-t')e^{-k(t-t')}\frac{\sin(\bar\omega(t-t'))}{\bar\omega}dt'. \end{aligned}$$

Dieses Integral kann explizit ausgewertet werden, am Besten auf einem Computer, wo gleich die einleuchtende grafische Darstellung der Lösung erzeugt werden kann. Auf Abb. 3 ist die Lösung für $\bar\omega = 20, k = 1, a = 1$ dargestellt, wobei die Kraft zwischen $t_0 = 1$ und $t_1 = 2$ angelegt wird.

7.6. **Greensche Funktion und Dirac-Deltafunktion.** Wir haben im vorigen Abschnitt den Fall einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differenzialgleichung mit Anfangsbedingungen $= 0$ betrachtet. Der inhomogene Term $g(t)$ ist eine Funktion der Zeit, die (bis auf Proportionalität) die Interpretation einer äusseren, zeitabhängigen Kraft hat. Die Lösung hat die Form $x(t) = \int_0^t h(t-t')g(t')dt'$, mit Greenscher Funktion $h(t-t')$. Die Bedeutung der Greenschen Funktion wird klar, wenn wir den Grenzfall eines infinitesimal kurzen Stosses betrachten. Um dies zu beschreiben, legen wir eine Kraft für eine sehr kurze Kraft ϵ zur Zeit $t_0 > 0$ an, dafür mit einer Intensität $1/\epsilon$:

$$g(t) = g_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & t_0 < t < t_0 + \epsilon. \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Lösung ist dann $x(t) = 0$ für $t < t_0$, und für $t > t_0 + \epsilon$,

$$x(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} h(t-t')dt' \to h(t-t_0), \qquad \epsilon \to 0.$$

Also ist $h(t-t_0)$ die Lösung für $t > t_0$, wenn g eine während einer infinitesimal kleinen Zeit unendlich grosse angelegte Kraft ist:

$$g(t) = \delta(t-t_0) = \lim_{\epsilon \to 0} g_\epsilon(t).$$

Dieser Limes existiert strikt gesprochen nicht. Es macht aber als verallgemeinerte Funktion einen Sinn, wie wir sehen werden. Die Haupteigenschaft der *Dirac-Deltafunktion* δ ist

$$\int_a^b \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0),$$

wenn t_0 im Intervall (a,b) liegt. Insbesondere ist die Laplacetransformierte von $\delta(t-t_0)$ $(t_0 > 0)$:

$$\int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-st}dt = e^{-st_0}.$$

7.7. **Eine Anwendung auf partielle Differenzialgleichungen.** Wir betrachten ein langes Seil, das an einem Ende befestigt ist und am anderen Ende bewegt werden kann. Das Seil sei anfänglich längs der positiven x-Achse gespannt und in Ruhe; die Position des beweglichen Endes sei bei $x = 0$. Die y-Koordinaten sei durch eine vorgegebene Funktion $f(t)$ der Zeit beschrieben. Bei kleinen Bewegungen kann man annehmen, dass das Seil zur Zeit t durch die Gleichung $y = u(x,t)$ gegeben ist, wobei u, die Höhe des Seiles über der Anfangslage, die Wellengleichung erfüllt. Wir interessieren uns für die Bewegung des Seils in der Umgebung des beweglichen Punktes, also können wir das Seil als unendlich lang idealisieren (Abb. 4).

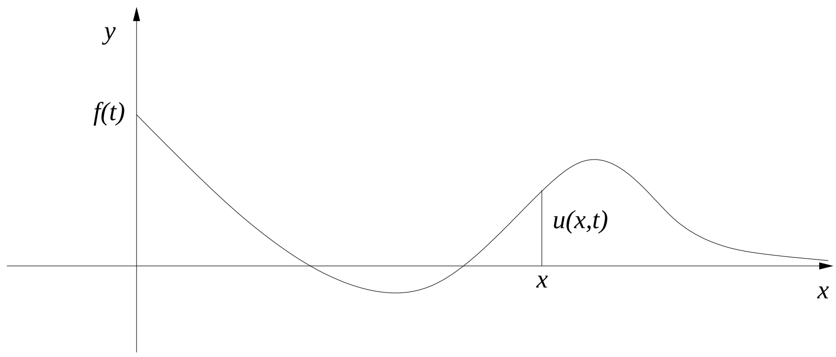


Abbildung 4. Wellengleichung auf einer Halbachse

In Formeln haben wir ein Anfangs- und Randwertproblem für eine Funktion $u(x,t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$: die PDG ist die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad c > 0.$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,$$

(die Höhe über die x-Achse und die Geschwindigkeit verschwinden zur Zeit $t = 0$). Die Randbedingungen sind

$$u(0,t) = f(t), \qquad \lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0.$$

Die letzte Bedingung besagt, dass das andere Ende befestigt ist. Wir führen eine Laplacetransformation bezüglich der Zeit t durch, setzen also

$$U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st} dt.$$

Nach der Ableitungsregel ist $\mathcal{L}[u_{tt}] = s^2 U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$. Die beiden letzten Terme verschwinden wegen der Anfangsbedingungen. Die Wellengleichung wird also zu

>Visualisierung

$$\frac{s^2}{c^2} U(x,s) - U_{xx}(x,s) = 0.$$

Das ist für jedes feste s eine gewöhnliche Differenzialgleichung für U als Funktion von x aufgefasst. Die allgemeine Lösung lautet:

$$U(x,s) = A(s) e^{sx/c} + B(s) e^{-sx/c}.$$

Da $u(x,t) \to 0$ für $x \to \infty$, gilt auch $U(x,s) \to 0$ für $s > 0$. Also muss $A(s) = 0$ sein für alle $s > 0$. Die andere Randbedingung ist

$$U(0,s) = F(s) = \mathcal{L}[f].$$

Also ist $B(s) = F(s)$. Es gilt also

$$U(x,s) = F(s)e^{-sx/c}.$$

Die inverse Laplacetransformation erhalten wir mit dem zweiten Verschiebungssatz:

$$u(x,t) = H\left(t - \frac{x}{c}\right) f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} f\left(t - \frac{x}{c}\right), & x < ct, \\ 0, & x > ct. \end{cases}$$

Bemerkung. Diese Lösung kann man auch aus der allgemeinen d'Alembert Lösung der Wellengleichung bestimmen, was als Übung empfohlen wird.

8. Die Laplace-Gleichung

Wir haben bis jetzt vor allem zeitabhängige Phänomene studiert. Sie werden typischerweise durch Anfangswertprobleme gegeben. Wir wenden uns jetzt zeitunabhängigen Phänomenen zu, in denen andere Klassen von PDG und andere Typen von Problemen, typischerweise Randwertprobleme vorkommen. Typische Beispiele von zeitunabhängigen Problemen werden von der Elektrostatik geliefert, deren Grundgleichung die Poisson-Gleichung ist, die das elektrostatische Potenzial $u(\mathbf{x})$ und die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x})$ verbindet[4]

$$\triangle u = -4\pi\rho, \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

(Das elektrische Feld ist $\mathbf{E} = -\mathrm{grad} u$; da $\triangle = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$, ist diese Gleichung das Gausssche Gesetz $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho$). Insbesondere erfüllt das Potenzial u in einem Gebiet, wo es keine Ladungen gibt, die *Laplace-Gleichung*

$$\triangle u = 0.$$

Das *Dirichlet-Problem* ist ein Randwertproblem für die Laplace-Gleichung auf einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ mit (glattem) Rand ∂D:

$$\begin{aligned} \triangle u(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in D, \\ u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in \partial D. \end{aligned}$$

Die vorgegebene Funktion f ist das elektrostatische Potenzial (Spannung) auf dem Rand und die Lösung u gibt an, wie sich das Potenzial im Inneren verhält. Aus dieser physikalischen Interpretation, erwartet man, dass das Dirichlet-Problem eine eindeutige Lösung besitzt, was man auch beweisen kann.

Beweis der Eindeutigkeit: Besitzen zwei Lösungen u_1, u_2 die selben Randwerte $f(\mathbf{x})$, so erfüllt $u = u_1 - u_2$ die Laplace-Gleichung mit Randbedingung $u = 0$ auf ∂D. Zu zeigen ist $u = 0$ auf ganz D. Nach der Produktregel gilt $0 = \int_D u\triangle u dV = -\int_D \nabla u \cdot \nabla u + \int_D \nabla \cdot (u\nabla u)$. Nach dem Divergenzsatz von Gauss ist der zweite Term gleich einem Integral von $u\nabla u$ auf dem Rand, wo $u = 0$. Also $\int_D |\nabla u|^2 dV = 0$, woraus $\triangle u = 0$ folgt, d.h. $u = \mathrm{const}$. Da $u = 0$ auf dem Rand ist, folgt $\mathrm{const} = 0$.

Wir behandeln zuerst einen Spezialfall, den wir schon mit der Methode der Separation der Variablen lösen können.

[4]Der Faktor vor ρ ist Konventionssache (Wahl der Masseinheiten): Mit einer anderen Konvention ersetzt man 4π durch die "Permeabilität des Vakuums" ϵ_0^{-1}

8.1. **Die Poisson-Formel.** Wir betrachten das Dirichlet-Problem für eine Kreisscheibe von Radius a in zwei Dimensionen:

$$\begin{aligned} &u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, && x^2+y^2 \le a^2,\\ &u(x,y) = f(x,y), && x^2+y^2 = a^2, \end{aligned}$$

wobei f eine auf dem Kreis $x^2+y^2 = a^2$ gegebene Funktion ist. Wir führen Polarkoordinaten ein. Wir schreiben einfach $f(\varphi)$ für $f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$. Das Dirichlet-Problem für das Potenzial $u(r,\varphi)$ ist dann

$$\begin{aligned} &u_{rr} + \tfrac{1}{r}u_r + \tfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0. \quad 0 \le r \le a,\\ &u(a,\varphi) = f(\varphi). \end{aligned}$$

Die Separation der Variablen $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ führt auf

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = \text{const}.$$

Wir lösen zuerst die Gleichung für Φ

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0.$$

Linear unabhängige Lösungen für $\lambda > 0$ sind $\Phi = e^{i\sqrt{\lambda}\varphi}$, $e^{-i\sqrt{\lambda}\varphi}$. Wir stellen jetzt die Forderung, dass $u(r,\varphi+2\pi) = u(r,\varphi)$, da beide Seiten das Potenzial am gleichen Punkt darstellen. Diese Periodizität ist nur erfüllt, wenn $\pm\sqrt{\lambda}$ eine ganze Zahl ist. Also muss gelten

$$\lambda = n^2 \in \mathbb{Z}.$$

Für $n = \lambda = 0$ erhält man $\Phi = 1$. Wenn $\lambda < 0$, erhält man Linearkombinationen von Exponentialfunktionen mit reellen Argumenten, die nie periodisch sind. Die Gleichung für R lautet dann

$$r^2R'' + rR' = n^2R,$$

die man mit dem Potenzansatz $R = r^\alpha$ löst. Für $n \ne 0$ erhält man die zwei linear unabhängige Lösungen r^n, r^{-n}. Für $n = 0$ gibt es, nebst $R = r^0 = 1$, auch die Lösung $\ln r$.

Zusammenfassend haben wir zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ zwei linear unabhängige separierte Lösungen:

$$\begin{aligned} r^n e^{in\varphi}, \quad & r^{-n}e^{in\varphi}, \quad && n \ne 0,\\ 1, \quad & \ln r, && n = 0. \end{aligned}$$

Wir suchen also unsere Lösung als unendliche Linearkombination von diesen separierten Lösungen. Dabei bemerken wir aber, dass für jedes n nur eine der beiden Lösungen (die erste für $n \ge 0$, die zweite für

$n < 0$) stetig bei $r = 0$ ist. Die andere divergiert für $r \to 0$. Die stetige Lösung ist

$$r^{|n|}e^{in\varphi} = \begin{cases} r^n e^{in\varphi}, & n \geq 0 \\ r^{-n}e^{in\varphi}, & n < 0. \end{cases}$$

Also suchen wir eine Lösung der Form

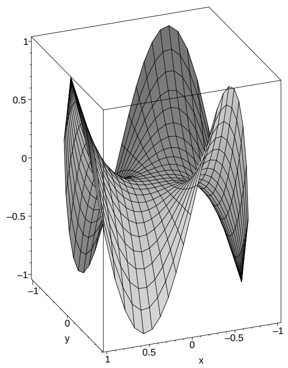
$$u(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n r^{|n|} e^{in\varphi}.$$

Die Randbedingung ist dann

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n a^{|n|} e^{in\varphi} = f(\varphi).$$

Also sind die Koeffizienten A_n dadurch bestimmt, dass $A_n a^{|n|}$ *die Fourier-Koeffizienten* c_n *von* f sind. Wir können die Lösung schreiben als:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in\varphi}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, e^{-in\varphi} d\varphi.$$



Zum Beispiel ist hier der Graph der Lösung $u = r^3\cos(3\phi)$ für $f(\phi) = \cos(3\phi)$ und $a = 1$. Eine Integraldarstellung, die die Lösung durch die Randbedingung ausdrückt, erhält man nach Einsetzen der Formel für c_n in die Formel für u. Nach Vertauschung von Summe und Integral, bekommt man

$$u(r,\varphi) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi'} e^{in\varphi} \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|}\right] f(\varphi')d\varphi'.$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern heisst Poisson-Kern $K(r,\varphi,\varphi')$. Wir können ihn ausrechnen, in dem wir die geometrische Reihe summieren. Das Resultat ist

Die Lösung des Dirichlet-Problems auf der Kreisscheibe mit Radius a ist gegeben durch die Poisson-Formel

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \int_0^{2\pi} K(r,\varphi,\varphi')f(\varphi')d\varphi', \\ K(r,\varphi,\varphi') &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ra\cos(\varphi-\varphi') + r^2}. \end{aligned}$$

Wir können diese Formel noch etwas mit Hilfe des Kosinussatzes umschreiben: Der Nenner von K ist das Quadrat des Abstandes zwischen dem Punkt mit Polarkoordinaten (r, φ) und dem Punkt mit Polarkoordinaten (a, φ'). Es gilt also

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a}\int_{\partial D} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} f(\mathbf{x}')d\ell(\mathbf{x}').$$

Hier ist $d\ell(\mathbf{x}') = ad\phi'$ das Längeelement auf dem Kreis.

Die Poisson-Formel kann für beliebige Dimension des Raumes verallgemeinert werden. Wir beschränken uns auf drei Dimensionen und geben die Poisson-Formel ohne Beweis:

Die Lösung des Dirichlet-Problems auf der dreidimensionalen Kugel $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq a\}$ mit Radius a, ist gegeben durch die Poisson-Formel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi a}\int_{\partial D} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} f(\mathbf{x}')d\sigma(\mathbf{x}'),$$

wobei $d\sigma(\mathbf{x}')$ das Oberflächenelement auf der Kugeloberfläche ist.

8.2. **Mittelwertprinzip.** Eine einfache Folge aus der Poisson-Formel ist das

Mittelwertprinzip

Ist $\triangle u = 0$ auf einem Gebiet D, so ist der Wert von u an der Stelle $x \in D$ gleich dem Mittelwert von u auf der Oberfläche jeder Kugel in D mit Mittelpunkt x.

Zum Beispiel gilt in 2 Dimensionen: Falls $\triangle u = 0$ auf $D \subset \mathbb{R}^2$ und $K_R(\mathbf{x})$ ein Kreis von Radius R um $\mathbf{x}$ ist, der eine Kreisscheibe in D berandet, so gilt

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi R}\int_{K_R(\mathbf{x})} u(\mathbf{x}')d\ell(\mathbf{x}').$$

Diese Formel folgt aus der Poisson-Formel: Wir können durch Verschiebung der Koordinaten annehmen, dass $x = 0$. Wenn u die Gleichung $\triangle u = 0$ in einer Kreisscheibe von Radius R um $x = 0$ erfüllt, dann ist sie die Lösung eines Dirichlet-Problems, wobei $f = u$ auf $\partial D = K_R(x)$. Also gilt die Poisson-Formel für den Wert von u innerhalb der Kreisscheibe, insbesondere in ihrem Mittelpunkt $x = 0$. In diesem Fall besagt die Poisson-Formel, dass $u(0)$ der Mittelwert von u auf $K_R(0)$ ist.

8.3. **Maximumprinzip.** Aus dem Mittelwertprinzip leiten wir das Maximumprinzip her. Dieses Prinzip gilt nicht nur für die Laplace-Gleichung, sondern auch für eine allgemeine Klasse von elliptischen Gleichungen.

Maximumprinzip
Sei $\triangle u = 0$ auf einem beschränkten, geschlossenen Gebiet D. Dann wird das Maximum von u auf dem Rand angenommen:

$$\max\{u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in D\} = \max\{u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in \partial D\}.$$

Zum Beweis setzen wir $M = \max\{u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in D\}$. Ist $u(\mathrm{x}) = M$ für einen inneren Punkt $\mathbf{x}_0$ von D (d.h. einen Punkt, der im Mittelpunkt einer Kugel in D liegt), und $\mathbf{x}_1$ ein Punkt auf dem Rand einer Kugel $K_R(\mathbf{x}_0) \subset D$ um $\mathbf{x}_0$, so ist $u(\mathbf{x}_1) = M$, denn nach dem Mittelwertprinzip ist $M = u(\mathbf{x}_0)$ der Mittelwert von $u(\mathbf{x})$ auf $K_R(\mathrm{x}_0)$, was nur dann möglich ist, wenn $u = M$ auf $K_R(\mathrm{x}_0)$. Wir wiederholen diese Konstruktion für x_1 und können eine Folge $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ wählen, so dass $u(\mathbf{x}_i) = M$ und $\mathbf{x}_n \in \partial D$. Also wird der Maximalwert M (auch) auf dem Rand angenommen.

Erfüllt u die Gleichung $\triangle u = 0$ so auch $-u$. Aus dem Maximumprinzip für $-u$ folgt also das Minimumprinzip für u: Das Minimum von u wird auf dem Rand angenommen. Es folgt: Ist $\triangle u = 0$ auf dem beschränkten Gebiet D, so gilt für alle $\mathbf{x} \in D$

$$\min\{u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in \partial D\} \le u(\mathbf{x}) \le \max\{u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in \partial D\}. \tag{20}$$

8.4. **Stabilität.** Aus dem Maximumprinzip folgt die Stabilität des Dirichlet-Problems auf einem beschränkten Gebiet: Die Lösung des Dirichlet-Problems ändert sich wenig, wenn wir die Randdaten f wenig ändern. Seien nämlich u_1, u_2 Lösungen von $\triangle u = 0$ mit Randbedingungen $u_1 = f_1$ bzw. $u_2 = f_2$ auf ∂D. Wir nehmen an, dass f_1 und f_2 sich wenig unterscheiden, d.h.

$$|f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})| \le \epsilon, \qquad \mathbf{x} \in \partial D,$$

für eine kleine Zahl ϵ. Dann ist $u = u_1 - u_2$ die Lösung des Dirichlet-Problems mit Randdaten $f = f_1 - f_2$. Aus (20) folgt dann $\min f \le u(\mathbf{x}) \le \max f$, also

$$|u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})| \le \epsilon, \qquad \mathbf{x} \in D.$$

Das Dirichlet-Problem ist also wohl gestellt.

8.5. **Poisson-Gleichung, Green-Funktion, Deltafunktion.** Wir betrachten hier die Poisson-Gleichung (inhomogene Laplace-Gleichung)

$$\triangle u = g,$$

wobei g eine gegebene Funktion ist. In der Elektrostatik ist g proportional zur Ladungsdichte. Aus der Linearität des Laplace-Operators folgt das Superpositionsprinzip: Aus $\triangle u_1 = g_1$, $\triangle u_2 = g_2$ folgt $\triangle(u_1 + u_2) = g_1 + g_2$. Durch wiederholte Anwendung dieses Prinzips erhält man dann: Aus $\triangle u_i = g_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $g = \sum_{i=1}^n g_i$ folgt $\triangle \sum_{i=1}^n u_i = g$. Physikalisch stellt man sich vor, dass die Ladungsdichte g aus n Ladungsträgern besteht, mit Ladungsdichte g_i. Im Grenzwert $n \to \infty$ will man g als Superposition unendlich vieler Punktladungen auffassen. Nach dem Superpositionsprinzip genügt es dann, die Poisson-Gleichung für eine Punktladung zu lösen. Was ist aber die Ladungsdichte einer Punktladung, und wie löst man die Gleichung für eine Punktladung? Wir betrachten zuerst den einfacheren eindimensionalen Fall.

8.6. **Die Dirac-Deltafunktion.** Zur Beschreibung der Ladungsdichte einer in 0 sitzenden Punktladung der totalen Ladung 1, führte der Physiker P. A. M. Dirac eine Funktion $\delta(x)$ ein, die überall verschwindet ausser in 0 und die Eigenschaft $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$ besitzt. Eine nützliche Definition dieser Funktion ist als Grenzwert: $\delta(x) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \delta_\epsilon(x)$, wobei

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & |x| < \epsilon/2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion δ_ϵ erfüllt $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x)dx = 1$ und verschwindet ausser in einer kleinen Umgebung von 0 (für $\epsilon > 0$ klein). Die Deltafunktion (und dieser Grenzwert) existiert nicht im klassischen Sinne, muss stattdessen mathematisch als *verallgemeinerte Funktion* verstanden werden. Dies bedeutet, dass sie nur "unter dem Integral" Sinn macht. Für jede glatte Funktion ϕ gilt nämlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

Dies ist die mathematisch rigorose Definition der Deltafunktion: Sie wird als Zuordnung $\phi \mapsto \phi(0)$ aufgefasst. Allgemeiner sind *verallgemeinerte Funktionen* (auch: Distributionen) lineare Abbildungen, die jeder glatten, schnell abfallenden Funktion eine Zahl zuordnen. Eine gewöhnliche Funktion f wird mit der verallgemeinerte Funktion $\phi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,dx$ identifiziert. Der Grenzwert $\delta = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\delta_\epsilon$ ist dann die Aussage:

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\epsilon(x)\phi(x)\,dx = \phi(0) \tag{21}$$

Allgemeiner können wir die *verschobene Deltafunktion* $\delta(x-x_0) = \lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(x-x_0)$ für festes x_0 betrachten. Sie erfüllt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\phi(x)dx = \phi(x_0),$$

wie man durch Variablensubstitution in (21) sieht.

Wir wenden uns dem dreidimensionalen Fall zu. Die dreidimensionale Deltafunktion $\delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ist durch die Identität

$$\int_{\mathbb{R}^3}\delta(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})dV = \phi(\mathbf{0}), \qquad dV = dx_1dx_2dx_3 \tag{22}$$

definiert. Fasst man das Integral über $\mathbb{R}^3$ als dreifaches Integral auf, so können wir $\delta(\mathbf{x})$ als Produkt von eindimensionalen Deltafunktionen $\delta(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x_1})\delta(\mathbf{x_2})\delta(\mathbf{x_3})$ interpretieren. Die verschobene dreidimensionale Deltafunktion $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ erfüllt

$$\int_{\mathbb{R}^3}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\phi(\mathbf{x})dV = \phi(\mathbf{x}_0), \qquad dV = dx_1dx_2dx_3,$$

und beschreibt eine Punktladung im Punkt $\mathbf{x}_0$. Ähnlich kann diese Definition in beliebiger Dimension formuliert werden.

8.7. **Das Coulomb-Potenzial.** Wir kommen auf die Poisson-Gleichung $\triangle u = g$ zurück. Wir betrachten zuerst den Fall einer Punktladung im Ursprung $\mathbf{0}$ und setzen also $g(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$:

$$\triangle u(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}). \tag{23}$$

Es ist wegen der Drehsymmetrie des Problems naheliegend, eine Lösung $u(\mathbf{x}) = u(r)$ zu suchen, die nur vom Abstand $r = |\mathbf{x}|$ zum Ursprung abhängt. Da die Deltafunktion ausserhalb des Ursprungs verschwindet, haben wir die Gleichung $\triangle u(r) = 0$ für $r \neq 0$. Mit der Formel für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten hat man dann

$$\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u(r)}{\partial r} = 0, \qquad r \neq 0.$$

Diese gewöhnliche Differenzialgleichung hat zwei linear unabhängige Lösungen: $u = 1$ und $u = 1/r$. Um eine Lösung von (23) zu finden

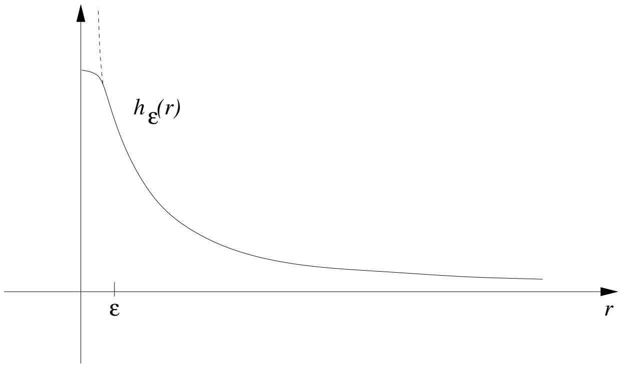


Abbildung 5. Eine Approximation zur Funktion $1/r$

müssen wir $\triangle u(\mathbf{x})$ im Ursprung ausrechnen. Bei der ersten Lösung haben wir $\triangle 1 = 0$. Bei der zweiten Lösung ist wegen der Singularität von $1/r$ bei $r = 0$ die Rechnung delikater und wir müssen diese Lösung im Sinne der verallgemeinerte Funktionen verstehen. Dafür betrachten wir $1/r$ als Grenzwert für $\epsilon \to 0$ von glatten Funktionen $h_\epsilon(r)$, die mit $1/r$ für $r \geq \epsilon$ übereinstimmen, siehe Abb. 5. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \triangle h_\epsilon$ proportional zu δ ist. Also rechnen wir ($\triangle = \mathrm{div}\nabla$)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \triangle h_\epsilon(r)\phi(\mathbf{x})dV &= \int_{r\leq\epsilon} \triangle h_\epsilon(r)\phi(\mathbf{x})dV \\
&\simeq \int_{r\leq\epsilon} \triangle h_\epsilon(r)\phi(\mathbf{0})dV \\
&= \phi(\mathbf{0}) \int_{r=\epsilon} \nabla h_\epsilon(r)\cdot\mathbf{n}\, d\omega \\
&= \phi(\mathbf{0}) \int_{r=\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} h_\epsilon(r)\, d\omega \\
&= \phi(\mathbf{0}) \int_{r=\epsilon} \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\, d\omega \\
&= \phi(\mathbf{0}) \int_{r=\epsilon} -\frac{1}{r^2}\, d\omega \\
&= -\phi(\mathbf{0})\frac{1}{\epsilon^2}4\pi\epsilon^2 \\
&= -4\pi\phi(\mathbf{0}).
\end{aligned}$$

Erklärung der einzelnen Schritten: Erstens ist $h_\epsilon(r) = 1/r$ für $r > \epsilon$, woraus folgt, dass $\triangle h_\epsilon(r)$ für $r > \epsilon$ verschwindet. Ist ϵ klein, so können wir $\phi(\mathbf{x})$ durch $\phi(\mathbf{0})$ für $|\mathbf{x}| \leq \epsilon$ approximieren. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass der Fehler, den wir bei dieser Approximation machen für $\epsilon \to 0$ gegen Null strebt. Dann wenden wir den Gaussschen Divergenzsatz und erhalten ein Integral über die Oberfläche $r = \epsilon$ einer Kugel von Radius ϵ. Im Integrand kommt die Richtungsableitung $\nabla h_\epsilon \cdot \mathbf{n} = \partial h_\epsilon / \partial r$ in Richtung des normalen Einheitsvektor $\mathbf{n}$ vor. Auf dieser Kugeloberfläche ist $h_\epsilon(r) = 1/r$ also ist der Integrand gleich der Konstante $-1/\epsilon^2$. Das Integral ist diese Konstante mal die Oberfläche $4\pi\epsilon^2$ der Kugel von Radius ϵ.

Es folgt $\triangle \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{x})$, oder

$$\triangle \left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \right) = \delta(\mathbf{x})$$

Durch Verschiebung des Nullpunktes erhalten wir auch das Potenzial, das von einer Punktladung in einem anderen Punkt erzeugt wird:

$$\triangle \left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

Die Poisson-Gleichung für allgemeines g (glatt, schnell abfallend) lösen wir mit dem Superpositionsprinzip, in dem wir g als "Summe" von Punktladungen auffassen:

$$g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') g(\mathbf{x}') dV', \qquad dV' = dx_1' dx_2' dx_3'.$$

Dies ist eine Version von (22). Wir erhalten dann

$$-\triangle \int \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} g(\mathbf{x}') dV' = g(\mathbf{x}).$$

Wir fassen das Resultat zusammen, indem wir $g = -4\pi\rho$, wie in der Elektrostatik schreiben.

Eine Lösung der Poisson-Gleichung in drei Dimensionen

$$\triangle u(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}),$$

mit gegebener (glatter, im Unendlichen schnell genug gegen Null strebender) Ladungsdichte ρ ist

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\rho(\mathbf{x}')dV'.$$

Das Coulomb-Potenzial $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ *ist eine Lösung der Poisson-Gleichung mit einer Punktladung in* $\mathbf{x}'$*:*

$$\triangle \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

Man bemerke, dass die Lösung der Poisson-Gleichung nicht eindeutig ist: Wir können eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung $\triangle u = 0$ hinzufügen. Die angegebene Lösung ist dadurch charakterisiert, dass sie für $|\mathbf{x}| \to \infty$ gegen 0 strebt. Die Leserin oder der Leser soll sich mit Hilfe des Maximumprinzips überzeugen, dass keine andere Lösung diese Eigenschaft besitzt.

9. Methode der Charakteristiken

Bis jetzt haben wir nur *lineare* Differenzialgleichungen betrachtet, meistens mit konstanten Koeffizienten. Mit der Methode der Charakteristiken lernen wir, eine grosse Klasse von linearen und quasilinearen partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung zu lösen.

Wir betrachten zuerst den Fall von zwei unabhängigen Variablen.

Definition. Eine PDG erster Ordnung für $u = u(x,t)$ heisst *quasilinear* falls sie die Form

$$a(x,t,u)u_t + b(x,t,u)u_x = c(x,t,u),$$

besitzt mit gegebenen Funktionen a, b, c.

Lineare PDG erster Ordnung sind ein Spezialfall: Für zwei unabhängige Variablen haben sie die Form

$$a(x,t)u_t + b(x,t)u_x = c_1(x,t) + c_2(x,t)u.$$

Beispiele.

(1) $u_t + u_x = u + 1$ ist linear.
(2) $xu_t + \sin(t)u_x = \cos(x+t)$ ist linear.
(3) $u_t + uu_x = 0$ ist quasilinear.
(4) $2u_t + u^2u_x + \cos(x)\cos(u) = 0$ ist quasilinear.
(5) $u_t + u_x^2 = 0$ ist nicht quasilinear.

Sofia Kovalevskaya
1850–1891

Wir betrachten das Anfangswertproblem für quasilineare PDG. Dazu zitieren wir den grundlegenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz *für kleine Zeiten*, einen Spezialfall des Satzes von Cauchy–Kowalevsky.

Satz 9.1. *Sei $a(x,t,u) \neq 0$. Das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} a(x,t,u)u_t + b(x,t,u)u_x &= c(x,t,u), \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned} \tag{24}$$

hat für jede gegebene (differenzierbare) Funktion f eine eindeutige Lösung $u(x,t)$, die im Bereich $\{(x,t) \,|\, t < T_0(x)\}$ für eine gewisse Funktion $T_0(x)$, definiert ist.

Im Folgenden wollen wir diese Lösung bestimmen. Wir werden sehen, dass sie i. A. tatsächlich nicht für alle t definiert ist.

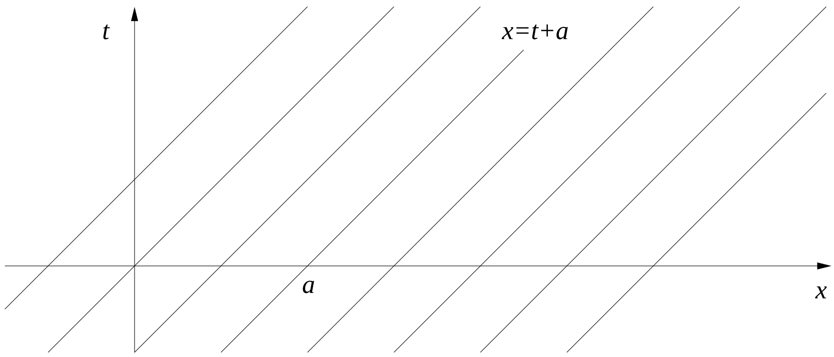


ABBILDUNG 6. Charakteristiken für $u_t - u_x = 0$

9.1. **Ein einfaches Beispiel.** Wir betrachten das einfache Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &u_t + u_x = 0, \qquad t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der PDG $u_t + u_x$ kann mit derselben Methode gefunden werden, die wir bei der eindimensionalen Wellengleichung angewendet haben: Sie lautet $u(x,t) = F(x-t)$, wobei F eine beliebige Funktion ist. Setzt man $t = 0$, so erhält man $F(x) = f(x)$. Also ist die Lösung des Anfangswertproblems mit Anfangsfunktion $f(x)$:

$$u(x,t) = f(x-t).$$

Diese Lösung ist *konstant* entlang jeder der Geraden $x = t + a$, $a \in \mathbb{R}$. Der Wert im Punkt (x,t) ist folglich der Wert der Anfangsfunktion f im Punkt, wo die Gerade durch (x,t) die x-Achse kreuzt (S. Abb. 6).

Die Idee der Methode der Charakteristiken besteht darin, eine Familie von Kurven (Charakteristiken) in der (x,t) Ebene zu finden entlang welcher die Lösung sich einfach verhält. In diesem einfachen Beispiel sind die Charakteristiken die Geraden $x = t + a$. Entlang dieser Charakteristiken ist u konstant; im allgemeinen Fall wird u nicht konstant sein, sondern die Lösung einer *gewöhnlichen* Differenzialgleichung. Die Methode der Charakteristiken reduziert also das Lösen einer PDG auf das Problem, gewöhnliche Differenzialgleichungen zu lösen.

9.2. **Die allgemeine quasilineare PDG mit zwei unabhängigen Variablen.** Wir wollen also Kurven $x = x(t)$ in der (x, t)-Ebene finden, entlang welcher die Lösungen der PDG (24) sich einfach verhalten. Zuerst dividieren wir durch a. Wir betrachten also Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{aligned} &u_t + c(x,t,u)u_x = d(x,t,u), \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x). \end{aligned}$$

Wir parametrisieren die (zu bestimmende) Kurve $x = x(t)$ durch die Zeit t und betrachten den Wert $z(t)$ von u enlang der Kurve:

$$z(t) = u(x(t), t).$$

Die Kurve soll dabei so gewählt werden, dass die PDG für u eine gewöhnliche Differenzialgleichung für z impliziert. Aus der Kettenregel folgt

$$\frac{dz(t)}{dt} = u_t(x(t),t) + u_x(x(t),t)\frac{dx(t)}{dt}$$

Falls $x(t)$ die Gleichung

$$\frac{dx(t)}{dt} = c(x(t), t, z(t)) \tag{25}$$

erfüllt, dann folgt aus der PDG für u, dass

$$\frac{dz(t)}{dt} = d(x(t), t, z(t)). \tag{26}$$

Der Wert der Lösung $u(x, t)$ des Anfangswertproblems entlang der Kurven $x = x(t)$ erfüllt mit der Gleichung der Kurve also das System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen (25),(26). Findet man eine solche Kurve, die durch jeden Punkt x_0 auf der x-Achse geht, so kennt man die Lösung $u(x, t)$ überall. Also suchen wir für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (25), (26), mit Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \qquad z(0) = z_0 = u(x(0), 0) = f(x_0)$$

Die Lösung $u(x(t), t)$ im Punkt $(x(t), t)$ ist dann $z(t)$. Die so konstruierte Lösung ist in allen Punkten (x, t) definiert, die auf einer eindeutigen Charakteristik liegen.

In unserem einfachen Beispiel ist das System von Gleichungen

$$\dot{x}(t) = 1, \qquad \dot{z}(t) = 0,$$

mit Lösung $x(t) = t + x_0$, $z(t) = z_0 = f(x_0)$. Die Lösung ist durch die Relation $u(t + x_0, t) = f(x_0)$ bestimmt. Setzt man $x = t + x_0$, so erhält man die bekannte Lösung $u(x, t) = f(x - t)$.

9.3. **Algorithmus.** Die obige Überlegung führt auf ein Rezept, um die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} &u_t + c(x,t,u)u_x = d(x,t,u), \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x), \end{aligned}$$

zu bestimmen:

(1) Für jedes x_0 löse man das System

$$\dot{x}(t) = c(x(t),t,z(t)), \tag{27}$$

$$\dot{z}(t) = d(x(t),t,z(t)), \tag{28}$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $z(0) = z_0 = f(x_0)$.

(2) Die Lösung ist implizit durch die Gleichung

$$u(x(t),t) = z(t)$$

gegeben.

(3) Um $u(x,t)$ zu bestimmen, finde man x_0, so dass für die Lösung von (27), (28) mit dieser Anfangsbedingung $x(t) = x$.

Jede durch t parametrisierte Kurve $t \mapsto (t, x(t), z(t))$, die das System (27), (28) erfüllt, heisst *Charakteristik*. Auch ihre Projektion $t \mapsto (t, x(t))$ auf die x-t-Ebene wird manchmal Charakteristik genannt.

Beispiel 9.A.

$$\begin{aligned} &u_t + xu_x = x, \quad && t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x), && t = 0. \end{aligned}$$

Hier ist $c = x, d = x$. Also sind die Gleichungen für Charakteristiken sind

$$\dot{x}(t) = x(t), \qquad \dot{z}(t) = x(t),$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $z(0) = f(x_0)$. Die Lösung der ersten Gleichung ist also $x(t) = x_0 e^t$. Wir setzen sie in die zweite Gleichung ein:

$$\dot{z}(t) = x_0 e^t, \quad \text{also} \quad z(t) = x_0 e^t + C.$$

Die Anfangsbedingung $z(0) = f(x_0)$ ist erfüllt, falls $C = f(x_0) - x_0$. Also sind die Charakteristiken gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^t, \\ z(t) &= x_0(e^t - 1) + f(x_0). \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also $u(x,t) = x_0(e^t - 1) + f(x_0)$, wobei x_0 durch $x = x(t) = x_0 e^t$ als Funktion von x, t bestimmt wird. Es folgt, dass $x_0 = xe^{-t}$, und die Lösung ist:

$$u(x,t) = x(1 - e^{-t}) + f(xe^{-t}).$$

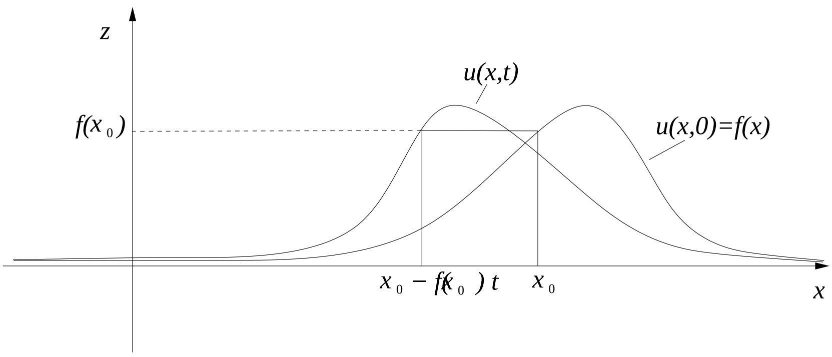
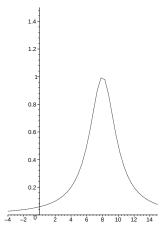


ABBILDUNG 7. Konstruktion des Graphs der Lösung bei gegebenem t (hier $t \simeq 0.75$) im Beispiel 9.3. Der zu einem Parameterwert x_0 gehörende Punkt im Graph hat Koordinaten $(x_0 - f(x_0)t, f(x_0))$



>Visualisierung

Beispiel 9.B.

$$\begin{aligned} &u_t - uu_x = 0, \quad t \geq 0,\\ &u(x,0) = f(x). \end{aligned}$$

In diesem Fall ist $c(x,t,z) = z$ und $d = 0$. Die Gleichungen für die Charakteristiken sind:

$$\dot{x}(t) = -z(t), \qquad \dot{z}(t) = 0.$$

Die Lösung mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $z(0) = f(x_0)$ ist

$$x(t) = x_0 - f(x_0)t, \qquad z(t) = f(x_0).$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also implizit durch

$$u(x,t) = f(x_0), \qquad x = x_0 - f(x_0)t$$

gegeben. Im allgemeinen kann man nicht die zweite Gleichung nach x_0 auflösen. Diese implizite Lösung kann aber dazu verwendet werden, um den Graph $z = u(x,t)$ der Lösung bei jedem festen t zu zeichnen. Fassen wir nämlich x_0 als Parameter auf, so ist

$$x = x_0 - f(x_0)t, \qquad z = f(x_0)$$

eine parametrische Darstellung des Graphs der Lösung. Es ergibt sich die Konstruktion in Abb. 7.

Wir sehen an diesem Beispiel, dass die parametrische Darstellung nur für kleine t der Graph einer Funktion ist. Wenn t grösser als eine gewisse Zeit t_c wird, erhält man eine Kurve in der (x,z) Ebene, die nicht zu einer

Funktion gehört. Dies signalisiert, dass die Lösung nur für Zeiten $t < t_c$ existiert.

Beispiel 9.C.

$$\begin{aligned} &u_t + (1+u)u_x = u^2, \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x). \end{aligned}$$

Die Gleichung für Charakteristiken ist

$$\dot{x}(t) = 1 + z(t), \qquad \dot{z}(t) = z^2(t)$$

Wir lösen zuerst die zweite Gleichung mit Anfangsbedingung $z(0) = z_0$ mit der Methode der Separation der Variablen (der Theorie der *gewöhnlichen* Differenzialgleichungen):

$$dz/z^2 = dt \Longrightarrow -1/z = t + 1/z_0 \Longrightarrow z = \frac{z_0}{1 - tz_0}.$$

Nach Einsetzen in die erste Gleichung und Integration erhalten wir $x(t) = x_0 + t - \ln(1 - tz_0)$. Also sind die Charakteristiken

$$x(t) = x_0 + t - \ln(1 - t\,f(x_0)), \qquad z(t) = \frac{f(x_0)}{1 - t\,f(x_0)}.$$

Wir sehen, dass hier die Charakteristiken selbst nicht für alle t sondern nur für kleine t (solange $tf(x_0) < 1$) definiert und differenzierbar sind.

Die Lösung des Anfangswertproblem ist also

$$u(x,t) = \frac{f(x_0)}{1 - t\,f(x_0)},$$

wobei x_0 implizit durch die Gleichung

$$x = x_0 + t - \ln(1 - t\,f(x_0)) \tag{29}$$

bestimmt wird.

Beispiel 9.D. Wir betrachten das vorherige Beispiel mit einer spezifischen Anfangsbedingung.

$$\begin{aligned} &u_t + (1+u)u_x = u^2, \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = e^{-x}. \end{aligned}$$

In diesem Fall kann man (29) nach x_0 auflösen (am besten mit einem Rechner) und einsetzen. Wir erhalten

$$x_0 = x - t + \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4te^{-x+t}}}{2}\right).$$

Die Lösung ist dann

$$u(x,t) = \frac{2}{e^{x-t}(1 + \sqrt{1 - 4te^{-x+t}}) - 2t}.$$

10. Klassifikation

Wie wir an Beispielen gesehen haben, kommen partielle Differenzialgleichungen in verschiedenen Arten von Problemen vor. Als grobe Unterteilung können wir zunächst PDG, die zu zeitabhängigen Problemen gehören, von PDG, die zu zeitunabhängigen Problemen gehören, unterscheiden. Wie wir hier sehen werden, gehören typischerweise zur ersten Klasse *elliptische* PDG, z. B. die Laplace-Gleichung und zur zweiten *hyperbolische* PDG, z. B. die Wellengleichung. Die verschiedene Typen von PDG haben mathematisch verschiedene Eigenschaften, die auf verschiedene Verhalten der Lösungen führen.

10.1. **Klassifikation der linearen PDG 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen.** Wir betrachten den Fall einer linearen PDG 2. Ordnung für eine Funktion $u(x, y)$ von zwei Variablen. Eine solche Gleichung hat die allgemeine Form

$$Au_{xx} + 2Bu_{x,y} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0. \tag{30}$$

Hier sind die Koeffizienten $A = A(x, y), \dots G = G(x, y)$ gegebene Funktionen von zwei Variablen.

Definition. Die PDG (30) heisst

elliptisch falls $AC - B^2 > 0$.
parabolisch falls $AC - B^2 = 0$.
hyperbolisch falls $AC - B^2 < 0$.

Beispiel 10.A. Die Wellengleichung $c^{-2}u_{xx} - u_{yy} = 0$ ($A = c^{-2}$,$C = 1$, $B = 0$), oder in anderen Koordinaten $u_{xy} = 0$ (siehe 1.3), ist hyperbolisch.

Beispiel 10.B. Die Wärmeleitungsgleichung $u_x - u_{yy} = 0$ hat $A = B = 0$, $C = 1$, also sie ist parabolisch.

Beispiel 10.C. Die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ und die allgemeinere Poisson-Gleichung sind elliptische partielle Differenzialgleichungen.

Bemerkungen

(1) Bei dieser Klassifikation zählt nur das *Hauptsymbol* $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy}$, das die Terme mit den Ableitungen höchster Ordnung (hier 2) beinhaltet.
(2) Die Grösse $AC - B^2$ ist die Determinante der symmetrische Matrix
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Sind $m_{11} = A, m_{12} = m_{21} = B, m_{22} = C$ die Matrixelemente dieser Matrix, und setzt man $x_1 = x, x_2 = y$, so ist das Hauptsymbol $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} m_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

(3) Sind die Koeffizienten A, B, C nicht konstant, sondern Funktionen, die von x und y nicht trivial abhängen, so kann es vorkommen, dass die PDG verschiedenen Charakter in verschieden Punkten hat: Zum Beispiel ist die PDG $xu_{xx} + u_{yy} = 0$ elliptisch für $x > 0$, parabolisch für $x = 0$ und hyperbolisch für $x < 0$.

(4) Die Namensgebung wurde in Anlehnung an die Klassifikation der Kegelschnitten gewählt: Eine durch eine Gleichung $AX^2 + 2BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$ gegebene glatte Kurve in der X-Y Ebene ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel je nach Vorzeichen von $AC - B^2$. In der linearen Algebra betrachtet man die entsprechende *quadratische Form*

$$Q(X, Y) = AX^2 + 2BXY + CY^2.$$

Wir nehmen an, dass die reellen Koeffizienten A, B, C nicht alle Null sind. Eine solche quadratische Form heisst positiv (negativ) definit, falls $Q(X, Y) > 0$ (bzw. $Q(X, Y) < 0$) für alle $(X, Y) \neq (0, 0)$. Sie heisst positiv (negativ) semidefinit, falls $Q(X, Y) \geq 0$ (bzw. ≤ 0) für alle (X, Y). Nicht semidefinite quadratische Formen heissen indefinit; Sie nehmen sowohl positive wie auch negative Werte an. Ein wichtiger Satz der linearen Algebra besagt, dass Q genau dann (positiv oder negativ) definit ist, wenn $AC - B^2 > 0$. Sie ist genau dann indefinit, wenn $AC - B^2 < 0$. Ist $AC - B^2 = 0$, so ist Q semidefinit aber nicht definit. Weiter kann man durch eine lineare Koordinatentransformation ("Hauptachsentransformation") jede quadratische Form auf eine Normalform bringen: $Q(X, Y) = X^2 + Y^2$ falls $AC - B^2 > 0$, $Q(X, Y) = X^2 - Y^2$ falls $AC - B^2 < 0$ und $Q(X, Y) = X^2$ falls $AC - B^2 = 0$. (Beispiel: $X^2 + 4XY + Y^2 = (X + 2Y)^2 - 4Y^2 + Y^2 = (X + 2Y)^2 - 3Y^2 = (X')^2 - (Y')^2$, wobei $X' = X + 2Y$, $Y' = \sqrt{3}Y$)

Eine wichtige Eigenschaft der obigen Klassifikation ist die *Invarianz unter Koordinatentransformationen*: Eine Transformation der unabhängigen Variablen x, y führt eine PDG in eine neue PDG über, die genau dann elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist, wenn die ursprüngliche PDG elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch ist. Wir verifizieren dies für *lineare* Koordinatentransformationen:

$$x' = ax + by,$$
$$y' = cx + dy.$$

Für partielle Ableitungen erhalten wir dann nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x} = a\frac{\partial}{\partial x'} + c\frac{\partial}{\partial y'},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = b\frac{\partial}{\partial x'} + d\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Daraus folgt, dass das Hauptsymbol der PDG in den neuen Variablen durch die Matrix M' gegeben wird, wobei

$$M' = AMA^t, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\det M' = (\det A)^2 \det M$. Also ist haben $\det M$ und $\det M'$ gleiches Vorzeichen.

Bei nichtlinearen Koordinatentransformationen zeigt man, dass das Hauptsymbol sich ebenfalls so transformiert, wobei aber A die Jacobische Martix der Transformation ist.

10.2. **Charakteristiken.** Die Bedeutung der Unterschiede zwischen den verschiedenen Typen von partiellen Differenzialgleichung wird klar, wenn wir untersuchen, wie die Gleichung das Verhalten der Lösung unter infinitesimalen Verschiebung der Argumenten beeinflusst. Dazu betrachten wir zuerst den Fall einer *gewöhnlichen* Differenzialgleichung zweiter Ordnung für eine Funktion $u(x)$. Sie soll von der Form

$$u''(x) = F(u(x), u'(x), x) \tag{31}$$

sein. Hier ist F eine gegebene Funktion. Die Gleichung $u'' = xuu' + u$ ist ein Beispiel einer solchen Differenzialgleichung. Nehmen wir an, $u(x_0), u'(x_0)$ seien bekannt in einem Punkt x_0. Die Differenzialgleichung gibt uns dann die Werte von u, u' in einem benachbarten Punkt $x_0 + \Delta x$: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x) &\simeq u(x_0) + u'(x_0)\Delta x, \\ u'(x_0 + \Delta x) &\simeq u'(x_0) + u''(x_0)\Delta x \\ &= u'(x_0) + F(u(x_0), u'(x_0), x_0)\Delta x, \end{aligned} \tag{32}$$

wobei die Approximation genau wird, wenn $\Delta x \to 0$. Also bestimmt die Differenzialgleichung die Werte der Lösung und ihrer Ableitung im Punkt $x_0 + \Delta x$ (für infinitesimal kleines Δx) aus den Werten im Punkt x_0. Dies ist der Grund, wieso die Differenzialgleichung (31) mit Anfangsbedingungen $u(x_0) = u_0$, $u'(x_0) = v_0$ eine eindeutige Lösung in der Umgebung eines Punktes x_0 besitzt. Dies ist auch die Basis des einfachsten numerischen Verfahren (Euler-Methode) um das Anfangswertproblem für (31) zu lösen: Die Gleichung (32) wird für einen kleinen Δx verwendet, um $u(x), u'(x)$ in allen Punkten der Form $x_0 + n\Delta x$, $n \in \mathbb{Z}$, approximativ aus der Anfangswerten $u(x_0), u'(x_0)$ zu berechnen.

Wir versuchen jetzt diese Überlegungen auf dem Fall einer partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung der Form (30) anzuwenden. In diesem Fall wird angenommen, dass die Lösung u und ihre ersten Ableitungen u_x, u_y auf einer Kurve in der x-y Ebene bekannt ist. Zum Beispiel ist diese Kurve die x-Achse in einem Anfangswertproblem, wo die Anfangsbedingungen gegeben werden. Die Frage lautet dann: Inwieweit wird dann die Lösung in der Umgebung der Kurve durch die PDG bestimmt?

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir einen Punkt (x_0, y_0) auf der Kurve. Wie im Falle der gewöhnlichen Differenzialgleichung erhalten wir die Werte von u im benachbarten Punkt $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ nach Taylor aus den Werten von u und ihrer Ableitungen in (x_0, y_0):

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \simeq u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Dagegen brauchen wir alle zweiten partiellen Ableitungen u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} in (x_0, y_0) um die ersten Ableitungen in $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ zu bestimmen. Zum Beispiel haben wir für u_x:

$$u_x(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \simeq u_x(x_0, y_0) + u_{xx}(x_0, y_0)\Delta x + u_{xy}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Über diese zweite partielle Ableitungen wissen wir, dass sie der PDG genügen:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = -Du_x - Eu_y - Fu - G, \tag{33}$$

wobei wir die bekannten Terme auf die rechte Seite geschrieben haben.[5] Da wir u_x, u_y nicht nur in (x_0, y_0) kennen, sondern auch auf eine Kurve durch (x_0, y_0), kennen wir auch die *Richtungsableitung* $D_{\mathbf{v}}u_x$, $D_{\mathbf{v}}u_y$ von u_x, u_y in Richtung des Tangentenvektor zur Kurve: Sei $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dieser Tangentenvektor. Da die Richtungsableitung gleich dem Skalarprodukt des Gradienten mit $\mathbf{v}$ ist, haben wir im

[5] Für diese Überlegungen ist die Form der rechten Seite irrelevant. Dieselben Schlussfolgerungen erhält man, wenn die rechte Seite eine beliebige Funktion von u, u_x, u_y, x, y ist.

Punkt (x_0, y_0)

$$\begin{array}{rcccccl} v_1 u_{xx} & + & v_2 u_{xy} & & & = & D_{\mathbf{v}} u_x, \\ & & v_1 u_{xy} & + & v_2 u_{yy} & = & D_{\mathbf{v}} u_y \end{array} \tag{34}$$

Also sind die zweiten partiellen Ableitungen in (x_0, y_0) durch das lineare System (33), (34) gegeben. Dieses System hat genau dann eine eindeutige Lösung wenn die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} A & 2B & C \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = Av_2^2 - 2Bv_1v_2 + Cv_1^2 = Q(-v_2, v_1)$$

nicht verschwindet. Die quadratische Form Q wurde in Bemerkung (4) eingeführt. Je nach Vorzeichen von $AC - B^2$ haben wir verschiedene Szenarien:

10.2.1. *Elliptischer Fall $AC - B^2 > 0$.* Die quadratische Form ist (positiv oder negativ) definit. Also ist die Determinante niemals 0, unabhängig von $\mathbf{v} \neq 0$. Das lineare System hat eine eindeutige Lösung und die Lösung der PDG in der Umgebung einer Kurve werden durch die Werte von u und ihre partielle Ableitungen auf der Kurve eindeutig bestimmt.

10.2.2. *Hyperbolischer Fall $AC - B^2 < 0$.* Die quadratische Form ist indefinit. Die Determinante nimmt dann sowohl positive wie negative Werte an und also auch den Wert 0. Wenn also $Q(-v_2, v_1) = 0$, hat das lineare System (33), (34) keine eindeutige Lösung. Also wird die Lösung nicht eindeutig durch die Werte von u, u_x, u_y auf der Kurve mit Tangentenvektor $\mathbf{v}$ bestimmt. Kurven mit dieser Eigenschaft heissen Charakteristiken. Da $\mathbf{n} = (-v_2, v_1)$ zu $\mathbf{v}$ senkrecht steht, haben wir folgende

Definition. Sei $AC - B^2 < 0$. Eine Kurve in der x-y-Ebene heisst *Charakteristik* für die hyperbolische PDG (30) falls ihr Normalenvektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ in jedem Punkt der Gleichung

$$An_1^2 + 2Bn_1n_2 + Cn_2^2 = 0$$

genügt.

Der Wert der Lösung und ihrer ersten Ableitungen auf Charakteristiken bestimmen nicht die Lösung in der Umgebung der Charakteristiken. Also kann sich gewissermassen die Lösung sich qualitativ unabhängig verhalten auf beiden Seite einer Charakteristik. Dieses Phänomen kennen wir aus folgendem Beispiel.

Beispiel 10.D. Die Charakteristiken der Gleichung $u_{xx} - u_{yy} = 0$ ($A = C = 1$, $B = 0$) sind die Kurven, deren Normalenvektor $\mathbf{n}$ der Gleichung

$$n_1^2 - n_2^2 = 0$$

genügt. Also $n_1 = \pm n_2$. Das sind die Geraden $x \pm y = \text{const}$. Wenn wir y mit der Zeit t identifizieren, ist diese Gleichung die Wellengleichung. Die Charakteristiken $x \pm t = \text{const}$ sind die Linien, entlang welcher die Wellen sich fortpflanzen, wie wir bei der d'Alembert Lösung gesehen haben. Betrachten wir z. B. eine sich nach rechts bewegende Welle $u(x,t) = F(x-t)$ wobei $F(x) = 0$ für $x < 0$ und $F(x) \neq 0$ für $x > 0$, so sehen wir tatsächlich, dass die Charakteristik $x - t = 0$ die Region in der x-t-Ebene wo $u(x,t) \neq 0$ von der Region wo $u(x,t) = 0$ trennt.

Weiter sehen wir, dass ein Anfangswertproblem für eine hyperbolische PDG nur wohl gestellt sein kann, wenn die Kurve, wo die Anfangsbedingung gegeben ist, keine Charakteristik ist.

Beispiel 10.E. Betrachte das Anfangswertproblem für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_{xt} &= 0 \qquad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), \\ u_t(x,0) &= g(x) \qquad . \end{aligned}$$

Hier gilt $A = C = 0, B = 1$. Also ist die Gleichung für Normalenvektoren zu Charakteristiken $n_1 n_2 = 0$. Die Kurve, wo die Anfangsbedingungen gegeben sind, ist die x-Achse. Ein Normalenvektor dazu ist $\mathbf{n} = (0,1)$. Also ist diese Kurve eine Charakteristik, und das Anfangswertproblem ist *nicht wohl gestellt*. Tatsächlich hat zum Beispiel für $f = g = 0$ das Anfangswertproblem nebst der Lösung $u(x,t) = 0$ auch die Lösung $u(x,t) = t^2$ (oder allgemeiner $u(x,t) = F(t)$, für jede Funktion F mit $F(0) = F'(0) = 0$). Also ist die Lösung nicht eindeutig.

10.2.3. *Charakteristiken für PDG erster Ordnung.* Wir wollen hier den Zusammenhang mit den Charakteristiken studieren, die wir früher bei PDG erster Ordnung eingeführt haben. Wir beschränken uns auf den linearen Fall. Also betrachten wir eine lineare PDG erster Ordnung

$$Au_x + Bu_y + Cu + D = 0.$$

Hier lautet die Frage: Nehmen wir an, u sei auf einer Kurve bekannt. Kann man aus der Gleichung die Lösung in einer Umgebung der Kurve bestimmen? Wir wollen also in diesem Fall die ersten partiellen Ableitungen in einem Punkt (x_0, y_0) aus der Gleichung bestimmen. Das System (33), (34) wird durch

$$\begin{aligned} Au_x + Bu_y &= -Cu - D \\ v_1 u_x + v_2 u_y &= D_{\mathbf{v}} u \end{aligned}$$

ersetzt. Daraus lassen sich u_x, u_y bestimmen falls $Av_2 - Bv_1 \neq 0$. Bei Charakteristiken gilt dann $Av_2 - Bv_1 = 0$. Zum Vergleich mit der früheren Definition, nehmen wir an, die Kurve sei durch eine parametrische Darstellung $s \mapsto (x(s), y(s))$ gegeben. Der Tangentenvektor ist dann $\mathbf{v} = (dx/ds, dy/ds)$. Die Gleichung für die Charakteristik ist dann $Ady/ds = Bdx/ds$ oder

$$\frac{dx}{dy} = \frac{A}{B}.$$

Diese Gleichung stimmt mit derjenige im vorherigen Kapitel überein, wenn wir y durch t ersetzen.

Index

Literatur

[1] R. Haberman, *Elementary applied partial differential equations,* Prentice Hall, 1998

[2] M. D. Greenberg, *Advanced engineering mathematics,* Prentice Hall 1998, Kap. 17-20

[3] N. Hungerbühler, *Einführung in partielle Differentialgleichungen für Ingenieure, Chemiker und Naturwissenschaftler,* vdf 1997

[4] J. Ockendon, S. Howison, A. Lacey and A. Movchan *Applied partial differential equations*, Oxford University Press, 1999

[5] E. C. Zachmanoglou and D. W. Thoe, *Introduction to partial differential equations and applications*, Dover, 1986