

PROBLEMA DI BASILEA, NUMERI DI BERNOULLI E SERIE DI FOURIER

GIOVANNI FELDER

1. INTRODUZIONE

I numeri di Bernoulli

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

formano una successione di numeri razionali che si incontra in matematica nei più svariati contesti, dalla topologia alla teoria dei numeri e all'analisi numerica.

Per esempio in trigonometria i numeri di Bernoulli (di indice pari) appaiono nei coefficienti dello sviluppo in serie di potenze delle funzioni tangente e cotangente. Per la cotangente abbiamo

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{x} \left(B_0 - \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_4}{4!}x^4 - \frac{B_6}{6!}x^6 + \dots \right), \quad 0 < |x| < 2\pi. \quad (1)$$

Vedremo come questi numeri ci aiuteranno a rispondere a tre domande, apparentemente non legate tra loro.

A. Somme di potenze. Le seguenti somme di potenze dei primi n numeri interi positivi sono date da *polinomi* valutati in n :

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 + \dots + 1 &= n, \\ 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 &= \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Quest'ultima formula è attribuita ad Archimede. È vero che, per qualsiasi esponente, la somma delle potenze dei primi n interi positivi dipende da n in modo polinomiale? Se sì, come si trovano questi polinomi?

B. Il problema di Basilea. Questo problema, reso popolare da Jakob Bernoulli nel 1689, dopo che Leibniz aveva (ri)scoperto la formula $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \dots = \pi/4$ (1682), chiede di calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Leonhard Euler diede la risposta $\pi^2/6$ nel 1735 e studiò le serie

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n},$$

oggi chiamati valori zeta (zeta values), per $n = 2, 3, 4, \dots$

§. 2. Deductus sum autem nuper omnino inopinato ad elegantem summae huius seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ expressionem, quae a circuli quadratura pendet, ita, ut si huius seriei vera summa haberetur, inde simul circuli quadratura sequeretur. Inveni enim summae huius seriei sextuplum aequale esse quadrato peripheriae circuli, cuius diameter est 1; seu posita istius seriei summa $=s$, tenebit $\sqrt{6s}$ ad 1 rationem peripheriae ad diametrum. Huius autem seriei summam nuper ostendi proxime esse 1,6449340668482264364, ex cuius numeri sextuplo, si extrahatur radix quadrata, reipsa prodit numerus 3,141592653589793238 exprimens circuli peripheriam, cuius diameter est 1. Iisdem porro vestigiis, quibus hanc summam sum consecutus, incedens huius seriei $1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \dots$ summam quoque a quadratura circuli pendere deprehendi. Summa nempe eius per 90 multiplicata dat biquadratum peripheriae circuli, cuius diameter est 1. Atque simili ratione etiam sequentium serierum, in quibus exponentes dignitatum sunt numeri pares, summas determinare potui.

FIGURA 1. In *De summis serierum reciprocarum* [4] Eulero dà la soluzione del problema di Basilea (eulerarchive.maa.org)

C. Integrazione numerica. Un classico metodo di approssimazione numerica degli integrali definiti è la regola dei trapezi: si approssima l'integrale con l'area di un poligono composto di trapezi rettangoli di larghezza δ come nella Fig. 1. L'errore è di ordine δ^2 . E' possibile migliorare la convergenza e correggere la regola dei trapezi per ottenere un errore dell'ordine δ^p con $p > 2$ quando $\delta \rightarrow 0$?

Studieremo queste questioni dal punto di vista delle serie di Fourier. Considereremo le serie di Fourier dei polinomi di Bernoulli, i cui coefficienti sono proporzionali a potenze inverse di esponente fissato. Saremo portati a toccare (da lontano) anche altri temi, come la musica sintetica, l'ampiezza dei segnali filtrati e i diagrammi di Feynman nella cromodinamica quantistica.

Nel capitolo 2 daremo la risposta di Jakob Bernoulli alla domanda A e introdurremo i polinomi di Bernoulli. Questo capitolo utilizza solo matematica elementare. Il capitolo 3 presuppone la teoria delle serie di Fourier, di cui ricordiamo il teorema fondamentale di Dirichlet. Calcoleremo le serie di Fourier dei polinomi di Bernoulli sull'intervallo $[0,1]$ il che ci porterà alla soluzione del problema di Basilea, la domanda B, e alle sue generalizzazioni. Nel capitolo 4 discuteremo la formula di Eulero-Maclaurin, utile per calcolare serie a partire da integrali e approssimare integrali definiti con somme di Riemann, rispondendo alla domanda C. Un caso

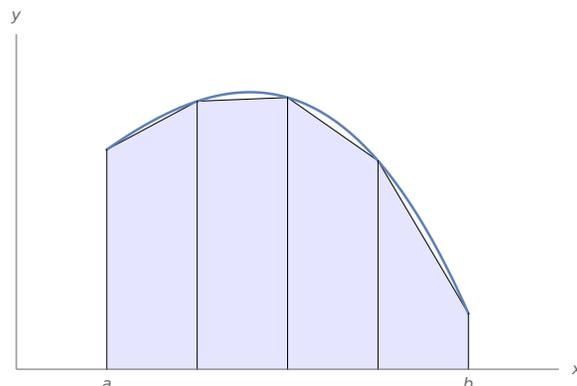


FIGURA 2. La regola dei trapezi

particolare ci permetterà di dimostrare la formula di Bernoulli che dà la risposta alla domanda A. In questo capitolo si presuppone solo la conoscenza dell'integrale di Riemann e dell'integrazione per parti, con l'eccezione della stima dell'errore che utilizza il capitolo precedente. Nel capitolo 5 tratteremo il fenomeno di Gibbs, in cui si studiano le oscillazioni delle somme parziali delle serie di Fourier nei punti di discontinuità.

Prima di cominciare una nota storica: il calcolo dei numeri di Bernoulli è l'oggetto del primo programma scritto nella storia dell'informatica. La matematica inglese Ada Lovelace lo scrisse nella nota G alla sua traduzione del 1842 del libro di Luigi Menabrea sulla "macchina analitica" di Babbage (Fig. 3), e scelse il compito di calcolare i numeri di Bernoulli con la macchina analitica «essendo questo (nella forma in cui lo dedurremo) un esempio piuttosto complicato delle sue capacità» [5]. La macchina analitica non fu mai realizzata, ma la lista di istruzioni per operazioni su numeri assegnati a unità di memoria è un prototipo di programmazione per computer.

2. NUMERI E POLINOMI DI BERNOULLI

2.1. Somme di potenze e numeri di Bernoulli. Jakob Bernoulli introdusse la successione dei numeri che portano il suo nome nel libro *Ars conjectandi* pubblicato postumo nel 1713 mentre cercava una formula generale per la somma

$$1^a + 2^a + 3^a + \dots + n^a$$

dei primi n interi positivi elevati a una potenza data, che generalizzasse le formule conosciute per i primi esponenti come

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

Bernoulli mostrò che per ogni esponente a naturale fissato, la somma $1^a + 2^a + \dots + n^a$ può essere scritta come un *polinomio* di argomento n di grado $a + 1$. Notò che i coefficienti di questo polinomio sono dati da coefficienti binomiali moltiplicati per dei numeri che non dipendono dall'esponente, oggi chiamati numeri di Bernoulli:

$$\sum_{k=1}^n k^a = \frac{1}{a+1} (B_0 n^{a+1} - \binom{a+1}{1} B_1 n^a + \binom{a+1}{2} B_2 n^{a-1} - \dots + (-1)^a \binom{a+1}{a} B_a n). \quad (2)$$

Diagram for the computation by the Engine of the Numbers of Bernoulli. See Note G. (page 722 et seq.)

Number of Operation.	Nature of Operation.	Variables acted upon.	Variables receiving results.	Indication of change in the value on any Variable.	Statement of Results.	Data.												Working Variables.												Result Variables.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
						V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅	V ₆	V ₇	V ₈	V ₉	V ₁₀	V ₁₁	V ₁₂	V ₁₃	V ₁₄	V ₁₅	V ₁₆	V ₁₇	V ₁₈	V ₁₉	V ₂₀	V ₂₁	V ₂₂	V ₂₃	V ₂₄	V ₂₅	V ₂₆	V ₂₇	V ₂₈	V ₂₉	V ₃₀	V ₃₁	V ₃₂	V ₃₃	V ₃₄	V ₃₅	V ₃₆	V ₃₇	V ₃₈	V ₃₉	V ₄₀	V ₄₁	V ₄₂	V ₄₃	V ₄₄	V ₄₅	V ₄₆	V ₄₇	V ₄₈	V ₄₉	V ₅₀	V ₅₁	V ₅₂	V ₅₃	V ₅₄	V ₅₅	V ₅₆	V ₅₇	V ₅₈	V ₅₉	V ₆₀	V ₆₁	V ₆₂	V ₆₃	V ₆₄	V ₆₅	V ₆₆	V ₆₇	V ₆₈	V ₆₉	V ₇₀	V ₇₁	V ₇₂	V ₇₃	V ₇₄	V ₇₅	V ₇₆	V ₇₇	V ₇₈	V ₇₉	V ₈₀	V ₈₁	V ₈₂	V ₈₃	V ₈₄	V ₈₅	V ₈₆	V ₈₇	V ₈₈	V ₈₉	V ₉₀	V ₉₁	V ₉₂	V ₉₃	V ₉₄	V ₉₅	V ₉₆	V ₉₇	V ₉₈	V ₉₉	V ₁₀₀	V ₁₀₁	V ₁₀₂	V ₁₀₃	V ₁₀₄	V ₁₀₅	V ₁₀₆	V ₁₀₇	V ₁₀₈	V ₁₀₉	V ₁₁₀	V ₁₁₁	V ₁₁₂	V ₁₁₃	V ₁₁₄	V ₁₁₅	V ₁₁₆	V ₁₁₇	V ₁₁₈	V ₁₁₉	V ₁₂₀	V ₁₂₁	V ₁₂₂	V ₁₂₃	V ₁₂₄	V ₁₂₅	V ₁₂₆	V ₁₂₇	V ₁₂₈	V ₁₂₉	V ₁₃₀	V ₁₃₁	V ₁₃₂	V ₁₃₃	V ₁₃₄	V ₁₃₅	V ₁₃₆	V ₁₃₇	V ₁₃₈	V ₁₃₉	V ₁₄₀	V ₁₄₁	V ₁₄₂	V ₁₄₃	V ₁₄₄	V ₁₄₅	V ₁₄₆	V ₁₄₇	V ₁₄₈	V ₁₄₉	V ₁₅₀	V ₁₅₁	V ₁₅₂	V ₁₅₃	V ₁₅₄	V ₁₅₅	V ₁₅₆	V ₁₅₇	V ₁₅₈	V ₁₅₉	V ₁₆₀	V ₁₆₁	V ₁₆₂	V ₁₆₃	V ₁₆₄	V ₁₆₅	V ₁₆₆	V ₁₆₇	V ₁₆₈	V ₁₆₉	V ₁₇₀	V ₁₇₁	V ₁₇₂	V ₁₇₃	V ₁₇₄	V ₁₇₅	V ₁₇₆	V ₁₇₇	V ₁₇₈	V ₁₇₉	V ₁₈₀	V ₁₈₁	V ₁₈₂	V ₁₈₃	V ₁₈₄	V ₁₈₅	V ₁₈₆	V ₁₈₇	V ₁₈₈	V ₁₈₉	V ₁₉₀	V ₁₉₁	V ₁₉₂	V ₁₉₃	V ₁₉₄	V ₁₉₅	V ₁₉₆	V ₁₉₇	V ₁₉₈	V ₁₉₉	V ₂₀₀	V ₂₀₁	V ₂₀₂	V ₂₀₃	V ₂₀₄	V ₂₀₅	V ₂₀₆	V ₂₀₇	V ₂₀₈	V ₂₀₉	V ₂₁₀	V ₂₁₁	V ₂₁₂	V ₂₁₃	V ₂₁₄	V ₂₁₅	V ₂₁₆	V ₂₁₇	V ₂₁₈	V ₂₁₉	V ₂₂₀	V ₂₂₁	V ₂₂₂	V ₂₂₃	V ₂₂₄	V ₂₂₅	V ₂₂₆	V ₂₂₇	V ₂₂₈	V ₂₂₉	V ₂₃₀	V ₂₃₁	V ₂₃₂	V ₂₃₃	V ₂₃₄	V ₂₃₅	V ₂₃₆	V ₂₃₇	V ₂₃₈	V ₂₃₉	V ₂₄₀	V ₂₄₁	V ₂₄₂	V ₂₄₃	V ₂₄₄	V ₂₄₅	V ₂₄₆	V ₂₄₇	V ₂₄₈	V ₂₄₉	V ₂₅₀	V ₂₅₁	V ₂₅₂	V ₂₅₃	V ₂₅₄	V ₂₅₅	V ₂₅₆	V ₂₅₇	V ₂₅₈	V ₂₅₉	V ₂₆₀	V ₂₆₁	V ₂₆₂	V ₂₆₃	V ₂₆₄	V ₂₆₅	V ₂₆₆	V ₂₆₇	V ₂₆₈	V ₂₆₉	V ₂₇₀	V ₂₇₁	V ₂₇₂	V ₂₇₃	V ₂₇₄	V ₂₇₅	V ₂₇₆	V ₂₇₇	V ₂₇₈	V ₂₇₉	V ₂₈₀	V ₂₈₁	V ₂₈₂	V ₂₈₃	V ₂₈₄	V ₂₈₅	V ₂₈₆	V ₂₈₇	V ₂₈₈	V ₂₈₉	V ₂₉₀	V ₂₉₁	V ₂₉₂	V ₂₉₃	V ₂₉₄	V ₂₉₅	V ₂₉₆	V ₂₉₇	V ₂₉₈	V ₂₉₉	V ₃₀₀	V ₃₀₁	V ₃₀₂	V ₃₀₃	V ₃₀₄	V ₃₀₅	V ₃₀₆	V ₃₀₇	V ₃₀₈	V ₃₀₉	V ₃₁₀	V ₃₁₁	V ₃₁₂	V ₃₁₃	V ₃₁₄	V ₃₁₅	V ₃₁₆	V ₃₁₇	V ₃₁₈	V ₃₁₉	V ₃₂₀	V ₃₂₁	V ₃₂₂	V ₃₂₃	V ₃₂₄	V ₃₂₅	V ₃₂₆	V ₃₂₇	V ₃₂₈	V ₃₂₉	V ₃₃₀	V ₃₃₁	V ₃₃₂	V ₃₃₃	V ₃₃₄	V ₃₃₅	V ₃₃₆	V ₃₃₇	V ₃₃₈	V ₃₃₉	V ₃₄₀	V ₃₄₁	V ₃₄₂	V ₃₄₃	V ₃₄₄	V ₃₄₅	V ₃₄₆	V ₃₄₇	V ₃₄₈	V ₃₄₉	V ₃₅₀	V ₃₅₁	V ₃₅₂	V ₃₅₃	V ₃₅₄	V ₃₅₅	V ₃₅₆	V ₃₅₇	V ₃₅₈	V ₃₅₉	V ₃₆₀	V ₃₆₁	V ₃₆₂	V ₃₆₃	V ₃₆₄	V ₃₆₅	V ₃₆₆	V ₃₆₇	V ₃₆₈	V ₃₆₉	V ₃₇₀	V ₃₇₁	V ₃₇₂	V ₃₇₃	V ₃₇₄	V ₃₇₅	V ₃₇₆	V ₃₇₇	V ₃₇₈	V ₃₇₉	V ₃₈₀	V ₃₈₁	V ₃₈₂	V ₃₈₃	V ₃₈₄	V ₃₈₅	V ₃₈₆	V ₃₈₇	V ₃₈₈	V ₃₈₉	V ₃₉₀	V ₃₉₁	V ₃₉₂	V ₃₉₃	V ₃₉₄	V ₃₉₅	V ₃₉₆	V ₃₉₇	V ₃₉₈	V ₃₉₉	V ₄₀₀	V ₄₀₁	V ₄₀₂	V ₄₀₃	V ₄₀₄	V ₄₀₅	V ₄₀₆	V ₄₀₇	V ₄₀₈	V ₄₀₉	V ₄₁₀	V ₄₁₁	V ₄₁₂	V ₄₁₃	V ₄₁₄	V ₄₁₅	V ₄₁₆	V ₄₁₇	V ₄₁₈	V ₄₁₉	V ₄₂₀	V ₄₂₁	V ₄₂₂	V ₄₂₃	V ₄₂₄	V ₄₂₅	V ₄₂₆	V ₄₂₇	V ₄₂₈	V ₄₂₉	V ₄₃₀	V ₄₃₁	V ₄₃₂	V ₄₃₃	V ₄₃₄	V ₄₃₅	V ₄₃₆	V ₄₃₇	V ₄₃₈	V ₄₃₉	V ₄₄₀	V ₄₄₁	V ₄₄₂	V ₄₄₃	V ₄₄₄	V ₄₄₅	V ₄₄₆	V ₄₄₇	V ₄₄₈	V ₄₄₉	V ₄₅₀	V ₄₅₁	V ₄₅₂	V ₄₅₃	V ₄₅₄	V ₄₅₅	V ₄₅₆	V ₄₅₇	V ₄₅₈	V ₄₅₉	V ₄₆₀	V ₄₆₁	V ₄₆₂	V ₄₆₃	V ₄₆₄	V ₄₆₅	V ₄₆₆	V ₄₆₇	V ₄₆₈	V ₄₆₉	V ₄₇₀	V ₄₇₁	V ₄₇₂	V ₄₇₃	V ₄₇₄	V ₄₇₅	V ₄₇₆	V ₄₇₇	V ₄₇₈	V ₄₇₉	V ₄₈₀	V ₄₈₁	V ₄₈₂	V ₄₈₃	V ₄₈₄	V ₄₈₅	V ₄₈₆	V ₄₈₇	V ₄₈₈	V ₄₈₉	V ₄₉₀	V ₄₉₁	V ₄₉₂	V ₄₉₃	V ₄₉₄	V ₄₉₅	V ₄₉₆	V ₄₉₇	V ₄₉₈	V ₄₉₉	V ₅₀₀	V ₅₀₁	V ₅₀₂	V ₅₀₃	V ₅₀₄	V ₅₀₅	V ₅₀₆	V ₅₀₇	V ₅₀₈	V ₅₀₉	V ₅₁₀	V ₅₁₁	V ₅₁₂	V ₅₁₃	V ₅₁₄	V ₅₁₅	V ₅₁₆	V ₅₁₇	V ₅₁₈	V ₅₁₉	V ₅₂₀	V ₅₂₁	V ₅₂₂	V ₅₂₃	V ₅₂₄	V ₅₂₅	V ₅₂₆	V ₅₂₇	V ₅₂₈	V ₅₂₉	V ₅₃₀	V ₅₃₁	V ₅₃₂	V ₅₃₃	V ₅₃₄	V ₅₃₅	V ₅₃₆	V ₅₃₇	V ₅₃₈	V ₅₃₉	V ₅₄₀	V ₅₄₁	V ₅₄₂	V ₅₄₃	V ₅₄₄	V ₅₄₅	V ₅₄₆	V ₅₄₇	V ₅₄₈	V ₅₄₉	V ₅₅₀	V ₅₅₁	V ₅₅₂	V ₅₅₃	V ₅₅₄	V ₅₅₅	V ₅₅₆	V ₅₅₇	V ₅₅₈	V ₅₅₉	V ₅₆₀	V ₅₆₁	V ₅₆₂	V ₅₆₃	V ₅₆₄	V ₅₆₅	V ₅₆₆	V ₅₆₇	V ₅₆₈	V ₅₆₉	V ₅₇₀	V ₅₇₁	V ₅₇₂	V ₅₇₃	V ₅₇₄	V ₅₇₅	V ₅₇₆	V ₅₇₇	V ₅₇₈	V ₅₇₉	V ₅₈₀	V ₅₈₁	V ₅₈₂	V ₅₈₃	V ₅₈₄	V ₅₈₅	V ₅₈₆	V ₅₈₇	V ₅₈₈	V ₅₈₉	V ₅₉₀	V ₅₉₁	V ₅₉₂	V ₅₉₃	V ₅₉₄	V ₅₉₅	V ₅₉₆	V ₅₉₇	V ₅₉₈	V ₅₉₉	V ₆₀₀	V ₆₀₁	V ₆₀₂	V ₆₀₃	V ₆₀₄	V ₆₀₅	V ₆₀₆	V ₆₀₇	V ₆₀₈	V ₆₀₉	V ₆₁₀	V ₆₁₁	V ₆₁₂	V ₆₁₃	V ₆₁₄	V ₆₁₅	V ₆₁₆	V ₆₁₇	V ₆₁₈	V ₆₁₉	V ₆₂₀	V ₆₂₁	V ₆₂₂	V ₆₂₃	V ₆₂₄	V ₆₂₅	V ₆₂₆	V ₆₂₇	V ₆₂₈	V ₆₂₉	V ₆₃₀	V ₆₃₁	V ₆₃₂	V ₆₃₃	V ₆₃₄	V ₆₃₅	V ₆₃₆	V ₆₃₇	V ₆₃₈	V ₆₃₉	V ₆₄₀	V ₆₄₁	V ₆₄₂	V ₆₄₃	V ₆₄₄	V ₆₄₅	V ₆₄₆	V ₆₄₇	V ₆₄₈	V ₆₄₉	V ₆₅₀	V ₆₅₁	V ₆₅₂	V ₆₅₃	V ₆₅₄	V ₆₅₅	V ₆₅₆	V ₆₅₇	V ₆₅₈	V ₆₅₉	V ₆₆₀	V ₆₆₁	V ₆₆₂	V ₆₆₃	V ₆₆₄	V ₆₆₅	V ₆₆₆	V ₆₆₇	V ₆₆₈	V ₆₆₉	V ₆₇₀	V ₆₇₁	V ₆₇₂	V ₆₇₃	V ₆₇₄	V ₆₇₅	V ₆₇₆	V ₆₇₇	V ₆₇₈	V ₆₇₉	V ₆₈₀	V ₆₈₁	V ₆₈₂	V ₆₈₃	V ₆₈₄	V ₆₈₅	V ₆₈₆	V ₆₈₇	V ₆₈₈	V ₆₈₉	V ₆₉₀	V ₆₉₁	V ₆₉₂	V ₆₉₃	V ₆₉₄	V ₆₉₅	V ₆₉₆	V ₆₉₇	V ₆₉₈	V ₆₉₉	V ₇₀₀	V ₇₀₁	V ₇₀₂	V ₇₀₃	V ₇₀₄	V ₇₀₅	V ₇₀₆	V ₇₀₇	V ₇₀₈	V ₇₀₉	V ₇₁₀	V ₇₁₁	V ₇₁₂	V ₇₁₃	V ₇₁₄	V ₇₁₅	V ₇₁₆	V ₇₁₇	V ₇₁₈	V ₇₁₉	V ₇₂₀	V ₇₂₁	V ₇₂₂	V ₇₂₃	V ₇₂₄	V ₇₂₅	V ₇₂₆	V ₇₂₇	V ₇₂₈	V ₇₂₉	V ₇₃₀	V ₇₃₁	V ₇₃₂	V ₇₃₃	V ₇₃₄	V ₇₃₅	V ₇₃₆	V ₇₃₇	V ₇₃₈	V ₇₃₉	V ₇₄₀	V ₇₄₁	V ₇₄₂	V ₇₄₃	V ₇₄₄	V ₇₄₅	V ₇₄₆	V ₇₄₇	V ₇₄₈	V ₇₄₉	V ₇₅₀	V ₇₅₁	V ₇₅₂	V ₇₅₃	V ₇₅₄	V ₇₅₅	V ₇₅₆	V ₇₅₇	V ₇₅₈	V ₇₅₉	V ₇₆₀	V ₇₆₁	V ₇₆₂	V ₇₆₃	V ₇₆₄	V ₇₆₅	V ₇₆₆	V ₇₆₇	V ₇₆₈	V ₇₆₉	V ₇₇₀	V ₇₇₁	V ₇₇₂	V ₇₇₃	V ₇₇₄	V ₇₇₅	V ₇₇₆	V ₇₇₇	V ₇₇₈	V ₇₇₉	V ₇₈₀	V ₇₈₁	V ₇₈₂	V ₇₈₃	V ₇₈₄	V ₇₈₅	V ₇₈₆	V ₇₈₇	V ₇₈₈	V ₇₈₉	V ₇₉₀	V ₇₉₁	V ₇₉₂	V ₇₉₃	V ₇₉₄	V ₇₉₅	V ₇₉₆	V ₇₉₇	V ₇₉₈	V ₇₉₉	V ₈₀₀	V ₈₀₁	V ₈₀₂	V ₈₀₃	V ₈₀₄	V ₈₀₅	V ₈₀₆	V ₈₀₇	V ₈₀₈	V ₈₀₉	V ₈₁₀	V ₈₁₁	V ₈₁₂	V ₈₁₃	V ₈₁₄	V ₈₁₅	V ₈₁₆	V ₈₁₇	V ₈₁₈	V ₈₁₉	V ₈₂₀	V ₈₂₁	V ₈₂₂	V ₈₂₃	V ₈₂₄	V ₈₂₅	V ₈₂₆	V ₈₂₇	V ₈₂₈	V ₈₂₉	V ₈₃₀	V ₈₃₁	V ₈₃₂	V ₈₃₃	V ₈₃₄	V ₈₃₅	V ₈₃₆	V ₈₃₇	V ₈₃₈	V ₈₃₉	V ₈₄₀	V ₈₄₁	V ₈₄₂	V ₈₄₃	V ₈₄₄	V ₈₄₅	V ₈₄₆	V ₈₄₇	V ₈₄₈	V ₈₄₉	V ₈₅₀	V ₈₅₁	V ₈₅₂	V ₈₅₃	V ₈₅₄	V ₈₅₅	V ₈₅₆	V ₈₅₇	V ₈₅₈	V ₈₅₉	V ₈₆₀	V ₈₆₁	V ₈₆₂	V ₈₆₃	V ₈₆₄	V ₈₆₅	V ₈₆₆	V ₈₆₇	V ₈₆₈	V ₈₆₉	V ₈₇₀	V ₈₇₁	V ₈₇₂	V ₈₇₃	V ₈₇₄	V ₈₇₅	V ₈₇₆	V ₈₇₇	V ₈₇₈	V ₈₇₉	V ₈₈₀	V ₈₈₁	V ₈₈₂	V ₈₈₃	V ₈₈₄	V ₈₈₅	V ₈₈₆	V ₈₈₇	V ₈₈₈	V ₈₈₉	V ₈₉₀	V ₈₉₁	V ₈₉₂	V ₈₉₃	V ₈₉₄	V ₈₉₅	V ₈₉₆	V ₈₉₇	V ₈₉₈	V ₈₉₉	V ₉₀₀	V ₉₀₁	V ₉₀₂	V ₉₀₃	V ₉₀₄	V ₉₀₅	V ₉₀₆	V ₉₀₇	V ₉₀₈	V ₉₀₉	V ₉₁₀	V ₉₁₁	V ₉₁₂	V ₉₁₃	V ₉₁₄	V ₉₁₅	V ₉₁₆	V ₉₁₇	V ₉₁₈	V ₉₁₉	V ₉₂₀	V ₉₂₁	V ₉₂₂	V ₉₂₃	V ₉₂₄	V ₉₂₅	V ₉₂₆	V ₉₂₇	V ₉₂₈	V ₉₂₉	V ₉₃₀	V ₉₃₁	V ₉₃₂

Dimostreremo la formula (2) nell'esercizio 4.2 come caso particolare della formula di Eulero–Maclaurin.

2.2. Polinomi di Bernoulli. I polinomi di Bernoulli $B_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ sono polinomi unicamente definiti dalle proprietà seguenti:

- (i) $B_0(x) = 1$,
- (ii) $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$,
- (iii) $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$ per tutti gli $n \geq 1$.

È chiaro che queste proprietà determinano unicamente i polinomi: supponiamo per induzione di conoscere $B_{n-1}(x)$. Allora (ii) ci permette di trovare $B_n(x)$ come primitiva a meno di una costante. La condizione (iii) determina la costante. Per esempio, avremo

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

La proprietà seguente ci sarà utile.

Lemma 2.1. Per tutti gli $n \neq 1$ vale $B_n(1) = B_n(0)$.

Dimostrazione. Per $n = 0$, B_0 è costante e l'asserzione è ovvia. Sia quindi $n \geq 2$. Per il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale abbiamo

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(x)dx \stackrel{(ii)}{=} n \int_0^1 B_{n-1}(x)dx \stackrel{(iii)}{=} 0, \quad (n \geq 2).$$

□

Si noti che questa proprietà non vale per $n = 1$: $B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$.

Utilizzeremo la definizione seguente dei numeri di Bernoulli e vedremo che coincide con quella menzionata sopra.

Definizione 2.2. I numeri di Bernoulli sono i valori $B_n = B_n(0)$ in zero (termini noti) dei polinomi di Bernoulli.

Ecco i primi venti numeri di Bernoulli, partendo da $B_0 = 1$:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \frac{7}{6}, 0, -\frac{3617}{510}, 0, \frac{43867}{798}, 0.$$

Negli esercizi vedremo che $B_n = 0$ per n dispari ≥ 3 (Esercizio 2.3) e che i numeri B_n di indice n pari ≥ 2 hanno segno alternante e crescono asintoticamente come $\pm n!/(2\pi)^n$ (Esercizio 3.3).

Esercizi.

- 2.1 Dimostrare per induzione che $B_n(x)$ è un polinomio monico di grado n . (Un polinomio $p(x)$ di grado n si chiama monico se il coefficiente di x^n è uguale a 1.)
- 2.2 Dimostrare che $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$. Suggerimento: mostrare che i polinomi $(-1)^n B_n(1-x)$ sono soluzioni delle stesse relazioni di ricorrenza che determinano i $B_n(x)$.
- 2.3 Dimostrare che $B_n(0) = 0$ per $n \geq 3$ dispari. Suggerimento: utilizzare l'esercizio precedente con il Lemma 2.1.

- 2.4 Dimostrare che $B_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j x^{n-j}$. Suggerimento: il coefficiente di x^j in un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ si ricava dalla derivata di ordine j di p in zero con la formula di Taylor

$$a_j = \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j p(x)}{dx^j} \right|_{x=0}.$$

- 2.5 Possibile progetto di approfondimento: vediamo che le somme di potenze elencate in (3) sono date da polinomi della variabile n divisibili per $n^2(n+1)^2$ o per $n(n+1)(2n+1)$. È un fatto generale? Se sì come si può dimostrarlo? Gli esercizi 2.2 e 4.3 possono essere utili.

3. SERIE DI FOURIER E PROBLEMA DI BASILEA

3.1. Il teorema di Dirichlet. Ricordiamo il teorema di Fourier nella versione di Dirichlet (1829). Se per una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e per $L > 0$ vale che $f(x+L) = f(x)$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ diremo che f è periodica di periodo L . Una tale funzione è unicamente definita dalla sua restrizione a un intervallo semiaperto di lunghezza L , per esempio $[0, L)$ (v. esercizi).

Teorema 3.1. *Sia $L > 0$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata, monotona a tratti, periodica di periodo L . Siano $c_k = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-2\pi i k x / L} dx$ i suoi coefficienti di Fourier. Allora la serie di Fourier di f in $x \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x / L}$$

converge alla media $(f(x^+) + f(x^-))/2$ dei limiti destro e sinistro

$$f(x^\pm) = \lim_{y \rightarrow x^\pm} f(y).$$

In particolare converge a $f(x)$ nei punti dove f è continua. Inoltre la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso che non contiene punti di discontinuità di f .

“Monotona a tratti” (o come scrive Riemann “senza un’infinità di massimi e minimi”) significa che $[0, L]$ può essere scomposto in un numero finito di intervalli, in ognuno dei quali f è monotona crescente o decrescente. Le funzioni monotone a tratti e limitate possono avere discontinuità di prima specie (a salto), per le quali i limiti destro e sinistro esistono. Nel 1881 Jordan, dopo che Riemann precisò il concetto di integrale (1854) proprio per trattare rigorosamente le serie di Fourier, mostrò che il teorema di Dirichlet vale per la classe più generale di “funzioni a variazione limitata”.

3.2. Serie di Fourier dei polinomi di Bernoulli e problema di Basilea.

Applichiamo la teoria di Fourier ai polinomi di Bernoulli, visti come funzioni sull’intervallo $[0, 1)$ e estesi a funzioni periodiche $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di periodo 1. Si noti che queste funzioni periodiche sono continue per $n \neq 1$ visto che, per il Lemma 2.1, $B_n(1) = B_n(0)$ mentre $B_1(x)$ si estende a una funzione con discontinuità a salto (Fig. 4).

Il teorema di Dirichlet ci assicura che

$$B_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{n,k} e^{2\pi i k x}, \quad 0 < x < 1, \quad n \geq 0, \quad (5)$$

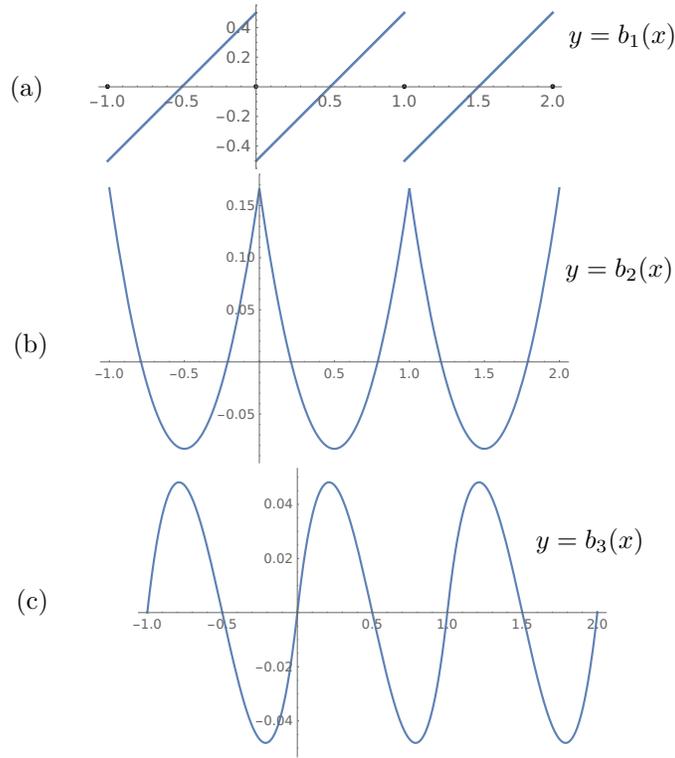


FIGURA 4. Le estensioni periodiche $b_1(x)$, $b_2(x)$, $b_3(x)$ dei polinomi di Bernoulli $B_1(x)$, $B_2(x)$, $B_3(x)$

dove $c_{n,k}$ è il k esimo coefficiente di Fourier di $B_n(x)$:

$$c_{n,k} = \int_0^1 B_n(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

La convergenza della serie a $B_n(x)$ vale anche per $x = 0, 1$ e $n \neq 0$ mentre se $n = 1$, la serie per $x = 0, 1$ converge a zero, che è la media tra i limiti destro e sinistro dell'estensione periodica di $B_1(x)$ (v. Fig.4 (a)).

Calcoliamo i coefficienti di Fourier $c_{n,k}$ dei polinomi di Bernoulli $B_n(x)$, visti come funzioni sull'intervallo $[0, 1]$. La definizione ci permette di determinarli ricorsivamente. Per le proprietà (i) e (iii) nella definizione di B_n ,

$$c_{n,0} = \int_0^1 B_n(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

mentre per $k \neq 0$ integriamo per parti:

$$c_{n,k} = B_n(x) \frac{e^{-2\pi i k x}}{(-2\pi i k)} \Big|_0^1 - \int_0^1 B'_n(x) \frac{e^{-2\pi i k x}}{(-2\pi i k)} dx, \quad (k \neq 0).$$

Il primo termine è zero per $n \geq 2$ visto che $B_n(1) = B_n(0)$ (Lemma 2.1) e con (ii) otteniamo

$$c_{n,k} = - \int_0^1 n B_{n-1}(x) \frac{e^{-2\pi i k x}}{(-2\pi i k)} dx = \frac{n c_{n-1,k}}{2\pi i k}, \quad (k \neq 0, n \geq 2).$$

Mentre per $n = 1$ si annulla il secondo termine e otteniamo

$$c_{1,k} = \frac{B_1(1) - B_1(0)}{(-2\pi i k)} = -\frac{1}{2\pi i k}, \quad (k \neq 0).$$

Abbiamo ottenuto per ogni $k \neq 0$ una formula di ricorrenza in n per $c_{n,k}$ che possiamo esprimere quindi in termini di $c_{1,k} = -1/(2\pi i k)$:

$$c_{n,k} = -\frac{n!}{(2\pi i k)^n}, \quad (n \geq 1, k \neq 0).$$

Il risultato è la formula

$$B_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{k^n}, \quad (n \geq 1),$$

che vale per $0 < x < 1$ se $n = 1$ e per $0 \leq x \leq 1$ per $n \geq 2$. Prima di procedere osserviamo che abbiamo risolto il problema di Basilea: ponendo $n = 2$ e $x = 0$ si ha

$$B_2 = -\frac{2!}{(2\pi i)^2} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

e visto che $B_2 = 1/6$ otteniamo la formula di Eulero $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.

Le serie di Fourier di $B_n(x)$ possono essere semplificate unendo i termini di indice k e $-k$:

Teorema 3.2. *Per tutti gli interi $n \geq 0$, $n \neq 1$ e per $0 \leq x \leq 1$ vale*

$$B_n(x) = \begin{cases} \frac{2(-1)^{n/2-1}n!}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k x)}{k^n}, & n \text{ pari,} \\ \frac{2(-1)^{(n+1)/2}n!}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k x)}{k^n}, & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Per $n = 1$ e $0 < x < 1$ abbiamo

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k x)}{k},$$

mentre la serie converge a 0 per $x = 0, 1$.

3.3. Valori della funzione zeta. Ponendo $x = 0$ otteniamo una generalizzazione della soluzione del problema di Basilea, che Eulero dedusse nel 1735, per quelli che oggi chiamiamo i valori della funzione zeta di Riemann per i numeri pari positivi:

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Per esempio, per $n = 2$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^4 = \pi^4/90$ o, come scrive Eulero (v. Fig. 1), la somma di questa serie «moltiplicata per 90 dà il biquadrato del perimetro del cerchio di diametro 1». Eulero cercò di calcolare anche $\zeta(n)$ per n dispari, senza

riuscirci.¹ Si convinse che comunque questi numeri non si possono ridurre alla «quadratura del cerchio», ovvero che, al contrario dei valori di zeta di argomento pari, non sono polinomi a coefficienti razionali valutati in π . Ancora oggi si sa pochissimo su questi numeri, che sono al centro della ricerca attuale in matematica e su cui varie questioni e congetture sono ancora aperte: per esempio si congettura che per tutti i numeri dispari $n \geq 3$, $\zeta(n)$ è trascendente (ovvero che non è soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti razionali). Tutto quello che si sa su questa questione è il notevole risultato di R. Apéry del 1979 che $\zeta(3)$ è irrazionale, cioè che non è soluzione di un'equazione polinomiale di grado 1, e l'estensione di W. Zudilin del 2001: almeno uno dei numeri $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ è irrazionale. Recentemente questi numeri e le loro generalizzazioni (valori zeta multipli) sono tornati al centro dell'attenzione per le loro applicazioni alla fisica della particelle, dove appaiono nel calcolo dei diagrammi di Feynman per ottenere le ampiezze di diffusione, cfr. [2].

3.4. Funzioni di Bernoulli. Se consideriamo le serie di Fourier del Teorema 3.2 per tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ otteniamo funzioni periodiche che coincidono con i polinomi di Bernoulli nell'intervallo $(0, 1)$. Chiameremo queste funzioni *funzioni di Bernoulli*. Le prime sono rappresentate nella Fig. 4.

Definizione 3.3. La funzione di Bernoulli $b_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) è la funzione data dalla serie di Fourier

$$b_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{k^n}.$$

Poniamo inoltre $b_0(x) = 1$.

Per $n \geq 2$ abbiamo quindi (Esercizio 3.1):

$$b_n(x) = B_n(x - [x]),$$

dove $[x]$ è la parte intera di $x \in \mathbb{R}$. Queste funzioni soddisfano le stesse proprietà (i)-(iii) dei polinomi di Bernoulli in ognuno degli intervalli aperti $(i, i + 1)$, $i \in \mathbb{Z}$ dove le funzioni sono derivabili infinite volte:

$$b_0(x) = 1, \quad b'_n(x) = n b_{n-1}(x), \quad \int_i^{i+1} b_n(x) dx = 0, \quad n \geq 1.$$

Esercizi.

- 3.1 Sia $L > 0$. Dimostrare che data una funzione $F: [0, L) \rightarrow \mathbb{R}$ definita sull'intervallo semiaperto $[0, L)$, esiste un'unica funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la cui restrizione a $[0, L)$ coincide con F e tale che $f(x + L) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.
- 3.2 La parte intera di $x \in \mathbb{R}$ è il numero intero $[x]$ tale che $[x] \leq x < [x] + 1$. Dimostrare che la funzione f dell'esercizio precedente è data dalla formula $f(x) = F(x - L[x/L])$.
- 3.3 Dimostrare che $B_{2k} > 0$ per $k \geq 1$ dispari e $B_{2k} < 0$ per $k \geq 2$ pari. Per tutti gli $n \geq 2$ pari,

$$c_1 \frac{n!}{(2\pi)^n} \leq |B_n| \leq c_2 \frac{n!}{(2\pi)^n}, \quad (n \geq 2 \text{ pari})$$

con $c_1 = 2$, $c_2 = \pi^2/3$.

¹Ma calcolò altre serie con esponenti dispari come $1 - 1/3^n + 1/5^n - 1/7^n + \dots$ per n dispari, generalizzando il risultato di Leibniz citato nella domanda B, v. Esercizio 3.4.

3.4 Dimostrare:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{(2\pi)^n}{4n!} (B_n(1/2) - B_n(0)), \quad (n \geq 2 \text{ pari}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^n} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{(2\pi)^n}{2n!} B_n(1/4), \quad (n \geq 1 \text{ dispari}).$$

Dedurre la rappresentazione di pi greco

$$\pi = \frac{192}{61} \left(\frac{1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} + \frac{1}{11^7} + \dots}{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \dots} \right),$$

proposta da Eulero alla fine di [4] ($B_6(x) = x^6 - 3x^5 + 5x^4/2 - x^2/2 + 1/42$,
 $B_7(x) = x^7 - 7x^6/2 + 7x^5/2 - 7x^3/2 + x/6$).

4. LA FORMULA DI EULERO–MACLAURIN

4.1. **Somme e integrali.** Nella sua ricerca della soluzione del problema di Basilea, Eulero cominciò a sviluppare metodi per calcolare numericamente la serie $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/j^2$, che converge molto lentamente (se si sommano solo i primi n termini l'errore è dell'ordine $1/n$). Un'idea è quella di approssimare la somma con un integrale $\int_1^{\infty} 1/x^2 dx = 1$, ma si può essere piú precisi. Il risultato, trovato indipendentemente da Maclaurin, è una formula che lega somme e integrali, utile sia per calcolare somme quando si conoscono gli integrali che per calcolare integrali in termini di somme. In particolare un'applicazione dà le correzioni alla regola dei trapezi nell'integrazione numerica e una stima dell'errore.

La formula di Eulero–Maclaurin all'ordine $p \geq 0$ per una funzione derivabile un numero sufficiente di volte sull'intervallo $[a, b]$ con $a \leq b$ interi è

$$\sum_{i=a}^{b-1} f(i) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^p \frac{B_k}{k!} (f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)) + R_p,$$

dove $f^{(n)}$ denota la derivata n esima di f . Il termine di resto è

$$R_p = (-1)^{p-1} \frac{1}{p!} \int_a^b b_p(x) f^{(p)}(x) dx.$$

La serie di Fourier ci permette di stimare $b_p(x)$. Siccome $|e^{2\pi i n x}| = 1$, abbiamo

$$|b_p(x)| \leq \frac{p!}{(2\pi)^p} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{p!}{(2\pi)^p} 2\zeta(p),$$

e quindi

$$|R_p| \leq \frac{2\zeta(p)}{(2\pi)^p} \int_a^b |f^{(p)}(x)| dx.$$

I valori $\zeta(p)$ sono limitati: $\zeta(2) = \pi^2/6 \geq \zeta(3) \geq \zeta(4) \geq \dots \geq 1$. Il termine di resto diventa piccolo se le derivate di f diventano piccole. Questo è il caso per $f(x) = 1/x^m$, $m \geq 2$.

Eulero presentò questi risultati il 13 ottobre 1735 all'Accademia di San Pietroburgo e come applicazione calcolò la somma dei reciproci dei quadrati con 20 cifre dopo la virgola [3]:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \approx 1,64493406684822643647.$$

Poche settimane dopo, il 3 dicembre dello stesso anno, Eulero diede la soluzione $\pi^2/6$ del problema di Basilea [4]. Prima di darne la dimostrazione, scrive, riferendosi alla serie $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2$ (v. Fig. 1):

Di questa serie mostrai recentemente che la somma è circa 1,6449340668482264364, dal cui sestuplo, se se ne estrae la radice quadrata, viene in effetti il numero 3,141592653589793238, che esprime il perimetro di un cerchio di diametro 1.

4.2. Dimostrazione della formula di Eulero–Maclaurin. L'idea è di scomporre l'integrale in una somma di integrali, uno per ogni intervallo $[i, i + 1]$, e integrare per parti, utilizzando le proprietà delle funzioni di Bernoulli. Il contributo dell'intervallo $[i, i + 1]$ è

$$\begin{aligned} \int_i^{i+1} f(x)dx &= \int_i^{i+1} f(x)b_0dx \\ &= f(x)b_1(x)|_i^{i+1} - \int_i^{i+1} f'(x)b_1(x)dx \\ &= \frac{f(i+1) + f(i)}{2} - \int_i^{i+1} f'(x)b_1(x)dx. \end{aligned}$$

La somma su i da a a $b - 1$ dà

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)}{2} + \sum_{i=a+1}^{b-1} f(i) + \frac{f(b)}{2} - \int_a^b f'(x)b_1(x)dx$$

che è equivalente alla formula di Eulero–Maclaurin per $p = 1$ (si utilizzi $B_1 = -1/2$).

Per ottenere approssimazioni ulteriori integriamo ancora per parti l'ultimo termine:

$$\begin{aligned} - \int_i^{i+1} f'(x)b_1(x)dx &= - f'(x)\frac{b_2(x)}{2}\Big|_i^{i+1} + \int_i^{i+1} f''(x)\frac{b_2(x)}{2}dx \\ &= -\frac{B_2}{2}(f'(i+1) - f'(i)) + \int_i^{i+1} f''(x)\frac{b_2(x)}{2}dx, \end{aligned}$$

perché $b_2(i) = b_2(i+1) = B_2$. Sommando su i otteniamo la formula per $p = 2$ nella forma

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)}{2} + \sum_{i=a+1}^{b-1} f(i) + \frac{f(b)}{2} - \frac{B_2}{2}(f'(b) - f'(a)) + \int_a^b f''(x)\frac{b_2(x)}{2}dx.$$

Lasciamo a chi legge il compito di estendere questa dimostrazione al caso generale (Esercizio 4.1).

Per uno studio più approfondito ma accessibile si veda l'articolo di T. Apostol [1]

Esercizi.

- 4.1 Completare la dimostrazione per induzione della formula di Eulero–Maclaurin integrando per parti il termine di resto e utilizzando il fatto che $b_n(i) = b_n(i+1)$ per $n \geq 2$.
- 4.2 Dimostrare la formula di Bernoulli (2). Suggerimento: si applichi la formula di Eulero–Maclaurin di ordine $a \geq 1$ alla funzione $f(x) = x^a$ per ottenere la versione equivalente

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^a = \frac{1}{a+1} \sum_{k=0}^a \binom{a+1}{k} B_k n^{a-k+1}, \quad a = 1, 2, 3, \dots$$

- 4.3 Dimostrare: per $a \geq 1$ vale

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^a = \frac{1}{a+1} (B_{a+1}(n) - B_{a+1}(0)).$$

Suggerimento: riscrivere la formula di Bernoulli servendosi dell'esercizio 2.4.

- 4.4 Riprodurre il calcolo di Eulero della serie $\sum_1^\infty 1/j^2$ con 20 cifre dopo la virgola: mostrare che la formula di Eulero–Maclaurin per $f(x) = 1/x^2$ e $b \rightarrow \infty$ diventa

$$\sum_{j=a}^\infty \frac{1}{j^2} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^p (-1)^k B_k a^{-k-1} + R_p.$$

Eulero scelse $a = 10$ e $p = 24$, ed aggiunse quindi

$$\sum_{j=10}^\infty \frac{1}{j^2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} - \frac{1}{3000000} + \dots + B_{24} 10^{-25} + R_{24}$$

alla somma $1 + 1/4 + 1/9 + \dots + 1/81$ dei primi nove termini che calcolò a parte. Dimostrare che per il resto R_{24} vale $|R_{24}| \leq 2\zeta(24) 23! (2\pi)^{-24} 10^{-24} \approx 3.6 \cdot 10^{-21}$. Quindi si ha la precisione richiesta trascurando il termine di resto.

- 4.5 Siano $a < b$ numeri reali ed n, q interi positivi. Sia $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivate continue fino all'ordine $2q+1$ e poniamo $a_j = a + jh$, $j = 0, \dots, n$, dove $\delta = (b-a)/n$. Mostrare che

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{g(a_0)\delta}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} g(a_i)\delta + \frac{g(a_n)\delta}{2} - \sum_{k=1}^q \delta^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)) + S_{2q+1}, \quad (6)$$

dove

$$|S_{2q+1}| \leq \delta^{2q+1} \frac{2\zeta(2q+1)}{(2\pi)^{2q+1}} \int_a^b |g^{(2q+1)}(x)| dx.$$

(Applicare la formula di Eulero–Maclaurin all'ordine $p = 2q+1$ alla funzione $x \mapsto f(x) = g(a+x\delta)$ e utilizzare il fatto che $B_k = 0$ per k dispari.)

La prima riga in (6) è l'approssimazione data della regola dei trapezi: l'intervallo $[a, b]$ è diviso in n intervalli $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$ di uguale lunghezza $a_{i+1} - a_i = \delta$ che formano un'altezza di trapezi rettangoli le cui

basi sono i segmenti che collegano $(a_i, 0)$ a $(a_i, g(a_i))$ (v. Fig. 1). La regola dei trapezi dice di prendere la somma delle aree $(g(a_i) + g(a_{i+1}))\delta/2$ di questi trapezi come approssimazione dell'integrale, con un errore dell'ordine δ^2 (per funzioni differenziabili). La formula di Eulero–Maclaurin dà correzioni alla regola dei trapezi proporzionali a δ^{2j} , $j = 1, 2, \dots, q$ e ha un errore dell'ordine δ^{2q+1} , essendo inferiore a $2\zeta(2) \cdot (\delta/(2\pi))^{2q+1} \int_a^b |g^{(2q+1)}(x)| dx$.

5. L'ONDA A DENTE DI SEGA E IL FENOMENO DI GIBBS

L'onda a dente di sega di periodo 1 è definita dalla serie di Fourier

$$b_1(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}.$$

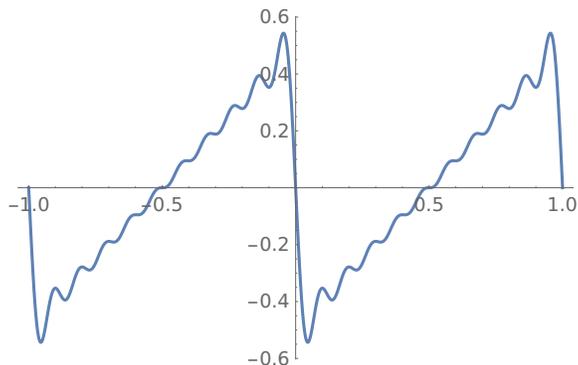
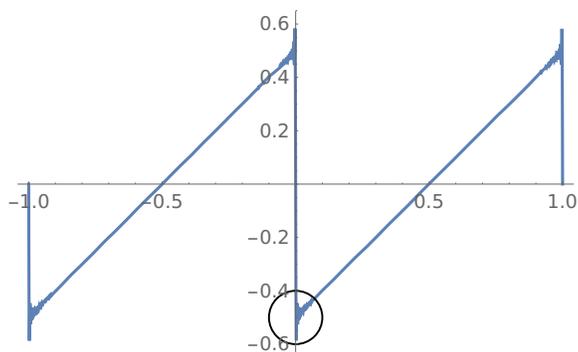
della prima funzione di Bernoulli. È la funzione dispari di periodo 1 tale che $b_1(x) = x - \frac{1}{2}$ per $0 < x < 1$, v. Fig. 4 (a). Un'applicazione di questa funzione è nella musica sintetica: nella tecnica di sintesi sottrattiva si sottopone un segnale, la cui ampiezza in funzione del tempo è dato da una serie di Fourier, a dei filtri che attenuano selettivamente determinate frequenze. Per produrre elettronicamente un suono che imiti il suono di uno strumento e di cui si conoscono le proporzioni delle varie frequenze si filtra il segnale dato dall'onda a dente di sega lasciando passare solo le frequenze volute nelle proporzioni desiderate. L'onda a dente di sega, i cui coefficienti di Fourier c_k decrescono lentamente per $k \rightarrow \infty$, si presta bene per questo tipo di operazione.

Il fenomeno di Gibbs, così chiamato perché il fisico statunitense J. Willard Gibbs lo descrisse nella rivista *Nature* nel 1899 (ma che fu scoperto nel 1848 dal matematico inglese Henry Wilbraham), concerne la convergenza della serie di Fourier di una funzione con discontinuità a salto. Gibbs notò che le somme parziali di queste serie di Fourier hanno vicino al salto un'oscillazione di ampiezza sistematicamente più grande del salto. Nel caso dell'onda a dente di sega, l' N esima somma parziale è

$$s_N(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\sin(2\pi kx)}{k}.$$

Dalla rappresentazione grafica di questa funzione (Fig. 5, 6) vediamo che il massimo si trova a quasi il 20% al disopra dell'estremo superiore $1/2$ della funzione $b_1(x)$ alla quale la successione $s_N(x)$ converge (punto per punto) e che questo rimane vero anche per N grande. Nelle applicazioni, prendere la somma parziale simula l'attenuazione dei coefficienti di Fourier di un segnale trasmesso attraverso un canale che ammette frequenze in una certa banda limitata. La conseguenza è che, contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, il segnale attenuato può superare in ampiezza il segnale originario ed eccedere la capacità del canale.

Per capire questo fenomeno in modo quantitativo analizziamo il comportamento di $s_N(x)$ per x positivo vicino a 0 (Fig. 5) e cerchiamo di calcolare il valore della differenza $s_N(x) - b_1(x) = s_N(x) - (x - 1/2)$ nel primo punto di estremo locale.

FIGURA 5. La somma parziale s_N per $N = 10$ FIGURA 6. La somma parziale s_N per $N = 200$

Per questo calcoliamo la derivata

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(s_N(x) - x + \frac{1}{2} \right) &= -1 - 2 \sum_{k=1}^N \cos(2\pi kx) \\ &= -\frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}. \end{aligned}$$

Quest'ultima identità si può trovare scrivendo $2 \cos(2\pi kx) = z^k + z^{-k}$ con $z = \exp 2\pi i x$, oppure dimostrare per induzione in N . Notiamo che la derivata si annulla per $x = 1/(2N+1), 2/(2N+1), 3/(2N+1), \dots$. Il primo estremo è assunto nel punto $x = 1/(2N+1)$. Per calcolare il valore estremo (in questo caso un minimo)

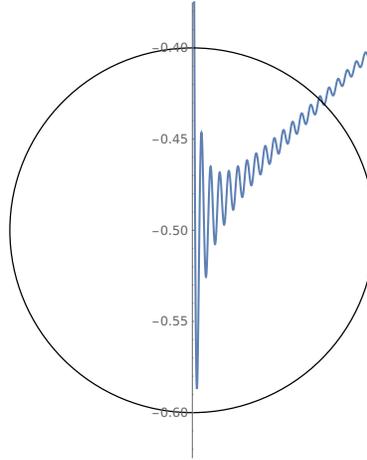


FIGURA 7. La somma parziale s_{200} per $x > 0$ vicino a 0 (particolare della Fig. 6)

scriviamo $s_N(a) - b_1(a) = s_n(0) - b_1(0^+) + \int_0^a \frac{d}{dx}(s_n(x) - b_1(x)) dx$ per $a = 1/(2N+1)$:

$$\begin{aligned}
 s_N\left(\frac{1}{2N+1}\right) - b_1\left(\frac{1}{2N+1}\right) &= \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{2N+1}} \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)} dx \\
 &= \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(2N+1) \sin(\pi t/(2N+1))} dt \\
 &= \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \frac{\pi t/(2N+1)}{\sin(\pi t/(2N+1))} dt \\
 &= \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} dt + O(1/N) \\
 &= -0.08948987223608363512 + O(1/N)
 \end{aligned}$$

Il primo minimo è quindi circa 0.09 al disotto dell'estremo inferiore $-1/2$ di $b_1(x)$ e l'oscillazione di $s_N(x)$ (differenza tra massimo e minimo) in un intorno di 0 per N arbitrariamente grande supera del 18% circa l'oscillazione 1 di $b_1(x)$.

Il fenomeno per cui l'oscillazione della somma parziale s_N per N grande eccede del 18% il salto della funzione data nell'intorno di un punto di discontinuità si generalizza a funzioni che soddisfano le condizioni di Dirichlet: per vederlo si scrive una tale funzione come somma di una funzione continua e una opportuna combinazione lineare di traslazioni ai punti di discontinuità di onde a dente di sega. La serie di Fourier della funzione continua converge uniformemente e il fenomeno di Gibbs è dettato dalle funzioni a onda di sega della combinazione lineare.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Tom M. Apostol, An Elementary View of Euler's Summation Formula, The American Mathematical Monthly, Vol. 106, No. 5 (1999), 409–418
- [2] David Broadhurst, Feynman's sunshine numbers, <https://arxiv.org/abs/1004.4238>
- [3] L. Euler, Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, (1741), 9–22, <http://eulerarchive.maa.org/pages/E047.html>

- [4] L. Euler, De summis serierum reciprocarum, Commentarii adademiae scientiarum Petropolitanae 7 (1740), 123–134,
<http://eulerarchive.maa.org/pages/E041.html>
- [5] L. F. Menabrea, Sketch of the Analytical Engine invented by Charles Babbage, with Notes upon the Memoir by the Translator Ada Augusta, Countess of Lovelave. Bibliothèque Universelle de Genève, 1842
<https://www.fourmilab.ch/babbage/sketch.html>

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, ETH ZURIGO, 8092 ZURIGO