HILBERTIANA

FÜNF AUFSÄTZE

VON

DAVID HILBERT

1964
WISSENSCHAFTLICHE BUCHGESELLSCHAFT
DARMSTADT

Neubegründung der Mathematik.

Erste Mitteilung[1].

[Abhandl. aus dem Math. Seminar d. Hamb. Univ. Bd. 1, S. 157—177 (1922).]

Die Grundlagen der Mathematik sind seit langem von den verschiedensten Autoren auf die mannigfaltigste Art untersucht worden: dabei wurden glänzende Gedankenreihen entwickelt und bedeutsame bleibende Ergebnisse erzielt. Wenn ich jetzt eine neue tiefergehende Behandlung des Problems für erforderlich halte und in Angriff nehme, so geschieht dies weniger, um einzelne mathematische Theorien zu befestigen, als deshalb, weil meiner Meinung nach alle bisherigen Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik noch keinen Weg erkennen lassen, der es ermöglicht, jede die Grundlagen betreffende Frage so zu formulieren, daß eine eindeutige Antwort darauf erfolgen muß. Das ist es aber, was ich verlange: es soll in mathematischen Angelegenheiten prinzipiell keine Zweifel, es soll keine Halbwahrheiten und auch nicht Wahrheiten von prinzipiell verschiedener Art geben können. So muß es — um gleich einen fernen schwierigen Programmpunkt als Beispiel zu nehmen — möglich sein, Zermelos Auswahlpostulat derart zu formulieren, daß es im selben Sinne und ebenso zuverlässig gültig ist wie die arithmetische Behauptung $2+2=4$. Ich bin der Meinung, daß die Grundlagen der Mathematik der vollen Klarheit und Erkenntnis fähig sind und daß das Problem der Begründung unserer Wissenschaft ein schwieriges, aber ein in endgültiger Weise lösbares ist. In welchem Sinne und mit welchen Mitteln ich die Lösung zu erreichen glaube, kurz zu kennzeichnen, soll der Zweck dieser vorläufigen Mitteilungen sein.

Gegenwärtig liegt noch ein besonders aktuelles Interesse für diesen Gegenstand vor. Angesehene und hochverdiente Mathematiker, Weyl und Brouwer, suchen die Lösung des Problems auf einem meiner Meinung nach falschen Wege.

Weyl behauptet in seiner Kritik der bisherigen Begründung des Zahlbegriffs, daß in dem üblichen Verfahren ein Zirkel (circulus vitiosus) vorliege.

[1] Diese Mitteilung ist der wesentliche Inhalt der Vorträge, die ich im Frühjahr dieses Jahres in Kopenhagen auf Einladung der dortigen Mathematischen Gesellschaft und im Sommer in Hamburg auf Einladung des Mathematischen Seminars der Universität daselbst gehalten habe.

Diesen Zirkel findet er darin, daß zur Definition reeller Zahlen Einteilungen benutzt werden, welche sich danach bestimmen, ob es reelle Zahlen von einer vorgeschriebenen Beschaffenheit gibt. Meiner Meinung nach verhält sich aber die Sache so: Wenn man die üblichen Definitionen der reellen Zahl durch Dedekindschen Schnitt, Zahlfolge oder Fundamentalreihe zugrunde legt, so zeigt es sich, daß in der Auffassung der Mathematiker dabei verschiedene methodische Standpunkte nebeneinander bestehen. Der Standpunkt, den Weyl wählt und von dem aus er seinen Zirkel aufweist, ist keineswegs einer von diesen, sondern scheint mir vielmehr künstlich zurechtgemacht. Weyl begründet die Berechtigung seines ihm eigentümlichen Standpunktes damit, daß dabei das konstruktive Prinzip gewahrt bleibe; meiner Meinung nach hätte er eben, weil er zu einem Zirkel gelangte, daraus erkennen müssen, daß sein Standpunkt und damit das konstruktive Prinzip in seiner Fassung und Anwendung unbrauchbar und von ihm aus der Weg in die Analysis ungangbar ist.

Die üblichen von den Mathematikern eingenommenen Standpunkte beruhen keineswegs auf dem konstruktiven Prinzip und weisen auch den Weylschen Zirkel nicht auf; es sind wesentlich zwei Standpunkte, die in Frage kommen:

Erstens sagt man etwa: eine reelle Zahl ist eine Einteilung der rationalen Zahlen, die die Dedekindsche Schnitteigenschaft besitzt; dabei ist der Begriff der Einteilungen der rationalen Zahlen seinem Inhalte nach scharf und seinem Umfange nach genau begrenzt. Der bekannte Einwand gegen diesen Standpunkt besteht darin, daß der Begriff einer Einteilung der rationalen Zahlen auf eins hinausläuft mit dem Begriff der Menge; der allgemeine Begriff der Menge aber hat in der Tat zu Paradoxien Anlaß gegeben. Wenn Weyl sich diesen Einwand in welcher Form auch immer zu eigen macht, so ist zunächst zu erwidern, daß er nicht zwingend ist. Der Umstand, daß der Begriff der Menge im allgemeinsten Sinne nicht ohne weiteres zulässig ist, schließt keineswegs aus, daß der Begriff einer Menge von ganzen Zahlen korrekt ist. Und die Paradoxien der Mengenlehre können nicht als Beweis dafür angesehen werden, daß der Begriff der Menge von ganzen Zahlen zu Widersprüchen führt. Im Gegenteil: alle unsere mathematischen Erfahrungen sprechen für die Korrektheit und Widerspruchsfreiheit dieses Begriffs.

Wenn man aber geltend macht, es entspräche nicht den Anforderungen der mathematischen Strenge, daß beim Aufbau der mathematischen Wissenschaft eine solche Voraussetzung stillschweigend gemacht werde, so verweise ich auf den zweiten Standpunkt zur Begründung des Zahlbegriffs, der diesem Vorwurf nicht ausgesetzt ist, nämlich auf die axiomatische Begründungsmethode; diese charakterisiert sich etwa folgendermaßen. Das Kontinuum der reellen Zahlen ist ein System von Dingen, die durch bestimmte Beziehungen, sogenannte Axiome, miteinander verknüpft sind. Insbesondere treten an Stelle der Definition der reellen Zahl durch den Dekekindschen Schnitt die zwei Stetigkeitsaxiome, nämlich das Archimedische Axiom und das sogenannte Vollständigkeitsaxiom. Die Dedekindschen Schnitte können dann zwar auch zur Festlegung der einzelnen reellen Zahlen dienen, aber sie dienen nicht zur Definition des Begriffs der reellen Zahl. Vielmehr ist begrifflich eine reelle Zahl eben ein Ding unseres Systems.

Diese Begründung der Theorie des Kontinuums ist keineswegs im Gegensatz zur Anschauung. Der Begriff der extensiven Größe, wie wir ihn aus der Anschauung entnehmen, ist ein selbständiger gegenüber dem Begriff der Anzahl, und es ist daher durchaus der Anschauung entsprechend, wenn wir Anzahl und Maßzahl oder Größe grundsätzlich unterscheiden.

Der geschilderte Standpunkt ist vollends logisch vollkommen einwandfrei, und es bleibt nur dabei unentschieden, ob ein System der verlangten Art denkbar ist, d. h. ob die Axiome nicht etwa auf einen Widerspruch führen. Nun gibt es wohl kaum ein Gebiet innerhalb oder außerhalb der mathematischen Wissenschaft, das gründlicher erforscht ist als die reelle Analysis. Die Verfolgung der Schlußweisen, die auf dem Begriff der Zahlenmengen beruhen, hat man bis zum äußersten getrieben und nicht der Schatten einer Unstimmigkeit hat sich irgendwo ergeben: wenn Weyl dabei eine „innere Haltlosigkeit der Grundlagen, auf denen der Aufbau des Reiches ruht", bemerkt und sich wegen „der drohenden Auflösung des Staatswesens der Analysis" Sorge macht, so sieht er Gespenster. Vielmehr herrscht in der Analysis trotz der kühnsten und mannigfaltigsten Kombinationen unter Anwendung der raffiniertesten Mittel eine vollkommene Sicherheit des Schließens und eine offenkundige Einhelligkeit aller Ergebnisse. Jene Axiome, auf Grund deren diese Sicherheit und Einhelligkeit da ist, anzunehmen, ist daher berechtigt; diese Berechtigung streitig machen hieße von vornherein aller Wissenschaft die Möglichkeit ihres Betriebes nehmen: wenn irgendwo sonst, ist hier die Axiomatik angebracht.

Freilich entsteht das Problem, die Widerspruchsfreiheit der Axiome nachzuweisen; es ist dies ein bekanntes, auch von mir seit Jahrzehnten niemals außer Augen gelassenes Problem. Die vorliegende Mitteilung handelt von der Lösung dieses Problems.

Was Weyl und Brouwer tun, kommt im Prinzip darauf hinaus, daß sie die einstigen Pfade von Kronecker wandeln: sie suchen die Mathematik dadurch zu begründen, daß sie alles ihnen unbequem Erscheinende über Bord werfen und eine Verbotsdiktatur à la Kronecker errichten. Dies heißt aber, unsere Wissenschaft zerstückeln und verstümmeln, und wir laufen Gefahr, einen großen Teil unserer wertvollsten Schätze zu verlieren, wenn wir solchen Reformatoren folgen. Weyl und Brouwer verfehmen die allgemeinen Begriffe der Irrationalzahl, der Funktion, ja schon der zahlentheoretischen Funktion, die Cantorschen Zahlen höherer Zahlklassen usw.; der Satz, daß es unter unendlichvielen ganzen Zahlen stets eine kleinste gibt, und sogar das logische „Tertium non datur“ z. B. in der Behauptung: entweder gibt es nur eine endliche Anzahl von Primzahlen oder unendlichviele, sind Beispiele verbotener Sätze und Schlußweisen. Ich glaube, daß, so wenig es Kronecker damals gelang, die Irrationalzahl abzuschaffen — Weyl und Brouwer gestatten übrigens noch die Konservierung eines Torso —, ebensowenig werden Weyl und Brouwer heute durchdringen; nein: Brouwer ist nicht, wie Weyl meint, die Revolution, sondern nur die Wiederholung eines Putschversuches mit alten Mitteln, der seinerzeit, viel schneidiger unternommen, doch gänzlich mißlang und jetzt zumal, wo die Staatsmacht durch Frege, Dedekind und Cantor so wohl gerüstet und befestigt ist, von vornherein zur Erfolglosigkeit verurteilt ist.

Zusammenfassend möchte ich sagen: Wenn man von einer mathematischen Krise spricht, so darf man jedenfalls nicht, wie es Weyl tut, von einer neuen Krise sprechen. Der Circulus vitiosus ist von Weyl künstlich in die Analysis hineingetragen. Seine Darstellung der Unsicherheit der Resultate der heutigen Analysis entspricht nicht dem wirklichen Sachverhalt. Und was die von ihm und Brouwer so stark betonten konstruktiven Tendenzen angeht, so hat eben Weyl meiner Meinung nach den richtigen Weg zur Realisierung dieser Tendenzen verfehlt. Erst der hier in Verfolgung der Axiomatik eingeschlagene Weg wird, wie ich glaube, den konstruktiven Tendenzen, soweit sie natürlich sind, völlig gerecht.

Das Ziel, die Mathematik sicher zu begründen, ist auch das meinige; ich möchte der Mathematik den alten Ruf der unanfechtbaren Wahrheit, der ihr durch die Paradoxien der Mengenlehre verloren zu gehen scheint, wiederherstellen; aber ich glaube, daß dies bei voller Erhaltung ihres Besitzstandes möglich ist. Die Methode, die ich dazu einschlage, ist keine andere als die axiomatische; ihr Wesen ist dieses.

Um ein Teilgebiet einer Wissenschaft zu erforschen, basiert man es auf eine möglichst geringe Anzahl von möglichst einfachen, anschaulichen und faßlichen Prinzipien, die man als Axiome aufstellt und sammelt. Dabei hindert nichts, auch beweisbare oder unserer Überzeugung nach beweisbare Sätze als Axiome aufzunehmen. Ja, wie die Geschichte zeigt, ist dies Verfahren bisweilen sogar sehr am Platze: Beispiele dafür sind Legendres Primzahlpostulat in der Theorie der quadratischen Reste, Riemanns Vermutung über die Nullstellen von $\zeta(s)$, der Wurzelexistenzsatz in der Algebra, endlich die sogenannte Ergodenhypothese, ein mathematischer Satz, von dessen Beweis wir noch heute weit entfernt sind und der trotzdem Grundlage für die statistische Mechanik geworden ist.

Die axiomatische Methode ist tatsächlich und bleibt das unserem Geiste angemessene unentbehrliche Hilfsmittel einer jeden exakten Forschung, auf welchem Gebiete es auch sei: sie ist logisch unanfechtbar und zugleich fruchtbar; sie gewährleistet dabei der Forschung die vollste Bewegungsfreiheit. Axiomatisch verfahren heißt in diesem Sinne nichts anderes als mit Bewußtsein denken: während es früher ohne die axiomatische Methode naiv geschah, daß man an gewisse Zusammenhänge wie an Dogmen glaubte, so hebt die Axiomenlehre diese Naivität auf, läßt uns jedoch die Vorteile des Glaubens.

Aber es handelt sich jetzt um noch Wichtigeres: Gerade durch die Ausbildung, die ich der axiomatischen Methode glaube geben zu können, werden wir einsehen, wie sie uns dazu führt, über die Prinzipien des Schließens in der Mathematik volle Klarheit zu erlangen. Wie schon erwähnt, können wir nämlich von vornherein niemals der Widerspruchsfreiheit unserer Axiome sicher sein, sofern wir nicht den Nachweis dafür besonders führen. Die Axiomatik zwingt uns daher, zu diesem schwierigen erkenntnistheoretischen Problem Stellung zu nehmen. Der Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome gelingt in vielen Fällen, z. B. in der Geometrie, der Thermodynamik, der Strahlungstheorie und anderen physikalischen Disziplinen, dadurch, daß man den Nachweis auf die Frage der Widerspruchsfreiheit der Axiome der Analysis zurückführt; diese Frage ihrerseits aber ist ein bisher ungelöstes Problem.

Es gab bisher kaum einen ernsten Versuch, die Widerspruchsfreiheit der Axiome, sei es in der Zahlentheorie, der Analysis oder in der Mengenlehre, darzutun[1].

Kronecker prägte den Wahlspruch: Die ganze Zahl schuf der liebe Gott, alles andere ist Menschenwerk. Demgemäß verpönte er — der klassische Verbotsdiktator —, was ihm nicht ganze Zahl war; andererseits lag es ihm und seiner Schule deshalb auch fern, über die ganze Zahl selbst weiter nachzudenken.

Poincaré war von vornherein von der Unmöglichkeit eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome überzeugt. Nach ihm ist das Prinzip der vollständigen Induktion eine Eigenschaft unseres Geistes, d. h. in der Sprache Kroneckers: vom lieben Gott geschaffen. Sein Einwand, dieses Prinzip könnte nicht anders als selbst durch vollständige Induktion bewiesen werden, ist unberechtigt und wird durch meine Theorie widerlegt.

Von philosophischer Seite ist wohl die Wichtigkeit unserer Frage nach der Widerspruchsfreiheit der Axiome erkannt; ich finde aber auch in dieser Literatur nirgends eine offensichtliche Förderung der Lösung des Problems im mathematischen Sinne.

---

[1] Betreffs des früheren Ansatzes von Hilbert selbst und desjenigen von J. König vgl. S. 199f. — Zur Stellungnahme Hilberts zu Kronecker und Poincaré vgl. S. 203, 1. Absatz. Anm. d. H.

Dagegen wird unsere Frage in ihrem Wesen berührt durch die älteren Bestrebungen, Zahlentheorie und Analysis auf Mengenlehre sowie diese auf reine Logik zu gründen.

FREGE hat die Begründung der Zahlenlehre auf reine Logik, DEDEKIND auf Mengenlehre als ein Kapitel der reinen Logik versucht: beide haben ihr Ziel nicht erreicht. FREGE hatte die gewohnten Begriffsbildungen der Logik in ihrer Anwendung auf Mathematik nicht vorsichtig genug gehandhabt: so hielt er den Umfang eines Begriffs für etwas ohne weiteres Gegebenes, derart, daß er dann diese Umfänge uneingeschränkt wieder als Dinge selbst nehmen zu dürfen glaubte. Er verfiel so gewissermaßen einem extremen Begriffsrealismus. Ähnlich erging es DEDEKIND; sein klassischer Irrtum bestand darin, daß er das System aller Dinge als Ausgang nahm. So glänzend und bestechend DEDEKINDS Idee, die endliche Zahl auf das Unendliche zu begründen, erschien, heute wird die Ungangbarkeit dieses Weges — nicht zum mindesten auch durch meine nachfolgenden Ausführungen — außer Zweifel gesetzt.

Die scharfsinnigen Untersuchungen von FREGE und DEDEKIND haben trotzdem die wertvollsten Früchte gezeitigt; FREGE und DEDEKIND haben die moderne Kritik der Analysis inauguriert, und diese, getragen von Männern wie CANTOR, ZERMELO und RUSSELL, „mündet" nicht, wie WEYL behauptet, „in Chaos und Leersinn": vielmehr verdanken wir ihr einmal tiefgehende auf axiomatischer Grundlage ruhende Theorien — insbesondere die von ZERMELO und die von RUSSELL — und andererseits die sachgemäße Entwicklung des sogenannten Logikkalkuls, dessen Grundideen sich immer mehr und mehr als unentbehrliches Hilfsmittel bei logisch-mathematischen Untersuchungen herausstellen.

Dies ist in meiner Auffassung ungefähr der heutige Stand der Frage hinsichtlich der Grundlagen der Mathematik. Hiernach kann ein befriedigender Abschluß der Untersuchungen über diese Grundlagen nur durch die Lösung des Problems von der Widerspruchsfreiheit der Axiome der Analysis erzielt werden. Gelingt uns dieser Nachweis, so stellen wir damit fest, daß die mathematischen Aussagen in der Tat unanfechtbare und endgültige Wahrheiten sind — eine Erkenntnis, die auch wegen ihres allgemeinen philosophischen Charakters von größter Bedeutung für uns ist.

Wir wenden uns der Lösung dieses Problems zu.

Wie wir sahen, hat sich das abstrakte Operieren mit allgemeinen Begriffsumfängen und Inhalten als unzulänglich und unsicher herausgestellt. Als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und die Betätigung logischer Operationen muß vielmehr schon etwas in der Vorstellung gegeben sein: gewisse außerlogische diskrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich für uns da als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt. Indem ich diesen Standpunkt einnehme, sind mir — im genauen Gegensatz zu FREGE und DEDEKIND — die Gegenstände der Zahlentheorie die Zeichen selbst, deren Gestalt unabhängig von Ort und Zeit und von den besonderen Bedingungen der Herstellung des Zeichens sowie von geringfügigen Unterschieden in der Ausführung sich von uns allgemein und sicher wiedererkennen läßt[1]. Hierin liegt die feste philosophische Einstellung, die ich zur Begründung der reinen Mathematik — wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen — für erforderlich halte: *am Anfang* — so heißt es hier — *ist das Zeichen.*

Wir wenden uns zunächst mit dieser philosophischen Einstellung der elementaren Zahlenlehre zu und überlegen, ob und bis wieweit auf dieser rein anschaulichen Basis der konkreten Zeichen die Wissenschaft der Zahlentheorie zustande kommen würde. Wir beginnen also mit folgenden Erklärungen der Zahlen.

Das Zeichen 1 ist eine Zahl.

Ein Zeichen, das mit 1 beginnt und mit 1 endigt, so daß dazwischen auf 1 immer + und auf + immer 1 folgt, ist ebenfalls eine Zahl, z. B. die Zeichen

$$1+1,$$
$$1+1+1.$$

Diese Zahlzeichen, die Zahlen sind und die Zahlen vollständig ausmachen, sind selbst Gegenstand unserer Betrachtung, haben aber sonst keinerlei *Bedeutung*[2]. Außer diesen Zeichen wenden wir noch andere Zeichen an, die etwas *bedeuten* und zur Mitteilung dienen, z. B. das Zeichen 2 zur Abkürzung für das Zahlzeichen $1+1$ oder das Zeichen 3 zur Abkürzung für das Zahlzeichen $1+1+1$; ferner wenden wir die Zeichen $=$, $>$ an, die zur Mitteilung von Behauptungen dienen. So soll denn $2+3=3+2$ keine Formel sein[3], sondern nur zur Mitteilung der Tatsache dienen, daß $2+3$ und $3+2$

[1] In diesem Sinne nenne ich Zeichen von derselben Gestalt auch kurz „dasselbe Zeichen".

[2] Die Ausdrucksweise, von „Zeichen ohne Bedeutung" zu sprechen, hat bei den Philosophen Anstoß erregt. [Vgl. z. B. die Note von ALOYS MÜLLER: „Über Zahlen als Zeichen" und die Erwiderung darauf von P. BERNAYS, beide Math. Ann. Bd. 90 (1923).] In den späteren Hilbertschen Abhandlungen über die Grundlagen der Mathematik ist der Terminus „Zahlzeichen" durch „Ziffer" ersetzt worden. Anm. d. H.

[3] Hilbert braucht hier das Wort „Formel" im engeren Sinne, nämlich für die Formeln der formalisierten Mathematik. Man könnte hier aber natürlich ebenso wie von Zeichen mit Bedeutung auch von Formeln mit Bedeutung sprechen. Anm. d. H.

mit Rücksicht auf die benutzten Abkürzungen dasselbe Zahlzeichen, nämlich das Zahlzeichen $1+1+1+1+1$ sind. Ebensowenig ist alsdann $3>2$ eine Formel, sondern dient vielmehr nur zur Mitteilung der Tatsache, daß das Zeichen 3, d. h. $1+1+1$, über das Zeichen 2, d. h. $1+1$, hinausragt oder daß das letztere Zeichen ein Teilstück des ersteren ist.

Wir verwenden zur Mitteilung auch Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ für Zahlzeichen. Dann ist auch $\mathfrak{b}>\mathfrak{a}$ nicht etwa eine Formel, sondern nur die Mitteilung, daß das Zahlzeichen $\mathfrak{b}$ über das Zahlzeichen $\mathfrak{a}$ hinausragt. Und ebenso wäre vom gegenwärtigen Standpunkte aus $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$ nur die Mitteilung der Tatsache, daß das Zahlzeichen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ dasselbe ist wie $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$. Und dabei kann dann das inhaltliche Zutreffen dieser Mitteilung folgendermaßen eingesehen werden. Es sei — wie wir annehmen dürfen — $\mathfrak{b}>\mathfrak{a}$, d. h. das Zahlzeichen $\mathfrak{b}$ rage über $\mathfrak{a}$ hinaus: dann läßt sich $\mathfrak{b}$ zerlegen in der Gestalt $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{c}$ zur Mitteilung einer Zahl diene; man hat dann nur $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+\mathfrak{c}+\mathfrak{a}$ zu beweisen, d. h., daß $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$ dasselbe Zahlzeichen ist, wie $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}+\mathfrak{a}$. Dies ist aber der Fall, sobald $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$ dasselbe Zeichen wie $\mathfrak{c}+\mathfrak{a}$, d. h. $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}+\mathfrak{a}$ ist. Hierin ist aber gegenüber der ursprünglichen Mitteilung mindestens eine 1 durch das Abspalten von $\mathfrak{a}$ fortgeschafft worden und dies Verfahren des Abspaltens kann so lange fortgesetzt werden, bis die zu vertauschenden Summanden miteinander übereinstimmen. Denn ein jedes Zahlzeichen $\mathfrak{a}$ ist ja aus den Zeichen 1 und + in der vorhin erklärten Weise aufgebaut; es kann daher durch Abspalten und Auslöschen der einzelnen Zeichen auch wieder abgebaut werden.

Bei der solcherart betriebenen Zahlentheorie gibt es keine Axiome, und also sind auch keinerlei Widersprüche möglich. Wir haben eben konkrete Zeichen als Objekte, operieren mit diesen und machen über sie inhaltliche Aussagen. Und was insbesondere den soeben ausgeführten Beweis für $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$ betrifft, so ist dieser Beweis, wie ich noch besonders hervorheben möchte, ebenso lediglich ein auf dem Auf- und Abbau der Zahlzeichen beruhendes Verfahren und seinem Wesen nach verschieden von demjenigen Prinzip, welches als Prinzip der vollständigen Induktion oder Schluß von $\mathfrak{n}$ auf $\mathfrak{n}+1$ in der höheren Arithmetik eine so hervorragende Rolle spielt. Letzteres Prinzip ist vielmehr, wie wir später erkennen werden, ein weitertragendes formales, einer höheren Stufe angehöriges Prinzip, das seinerseits eines Beweises bedürftig und fähig ist.

Sicherlich können wir durch diese anschauliche inhaltliche Art der Behandlung, wie wir sie geschildert und angewandt haben, in der Zahlentheorie noch erheblich weiter vorwärtskommen. Aber freilich läßt sich nicht die ganze Mathematik auf solche Art erfassen. Schon beim Übertritt zum Standpunkt der höheren Arithmetik und Algebra, z. B. wenn wir Behauptungen über unendlichviele Zahlen oder Funktionen gewinnen wollen, versagt jenes inhaltliche Verfahren. Denn für unendlichviele Zahlen können wir nicht Zahlzeichen hinschreiben oder Abkürzungen einführen; wir würden, sobald wir diese Schwierigkeit nicht bedenken, zu denjenigen Ungereimtheiten gelangen, die FREGE in seinen kritischen Ausführungen über die hergebrachten Definitionen der Irrationalzahl mit Recht rügt. Und die Analysis läßt sich durch ein solches konkretes Verfahren, wie es eben für die elementare Zahlenlehre angewandt wurde, schon deshalb nicht aufbauen, weil wir bloß durch derartige inhaltliche Mitteilungen das Wesen der Analysis gar nicht erschöpfen, sondern vielmehr eigentliche, wirkliche Formeln zu ihrem Aufbau brauchen.

Wir können aber einen entsprechenden Standpunkt gewinnen, indem wir uns auf eine höhere Stufe der Betrachtung begeben, von der aus die Axiome, Formeln und Beweise der mathematischen Theorie selbst Gegenstand einer inhaltlichen Untersuchung sind. Dazu müssen aber zunächst die üblichen inhaltlichen Überlegungen der mathematischen Theorie durch Formeln und Regeln ersetzt bzw. durch Formalismen nachgebildet werden, d. h. es muß eine strenge Formalisierung der ganzen mathematischen Theorien einschließlich ihrer Beweise durchgeführt werden, so daß die mathematischen Schlüsse und Begriffsbildungen — nach dem Muster des Logikkalkuls — in das Gebäude der Mathematik als formale Bestandteile einbezogen sind. Die Axiome, Formeln und Beweise, aus denen dieses formale Gebäude besteht, sind genau das, was bei dem vorhin geschilderten Aufbau der elementaren Zahlenlehre die Zahlzeichen waren, und mit jenen erst werden, wie mit den Zahlzeichen in der Zahlenlehre, inhaltliche Überlegungen angestellt, d. h. das eigentliche Denken ausgeübt: dadurch werden die inhaltlichen Überlegungen, die selbstverständlich niemals völlig entbehrt oder ausgeschaltet werden können, an eine andere Stelle, gewissermaßen auf ein höheres Niveau verlegt, und zugleich wird in der Mathematik eine strenge und systematische Trennung zwischen den Formeln und formalen Beweisen einerseits und den inhaltlichen Überlegungen andererseits möglich.

In der gegenwärtigen Mitteilung ist es meine Aufgabe, zu zeigen, wie dieser Grundgedanke in vollkommen strenger und einwandfreier Weise durchgeführt werden kann und daß damit zugleich unser Problem des Nachweises der Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik und Analysis gelöst wird.

Für die konkret-inhaltliche Zahlentheorie kamen wir, wie eben gezeigt, mit den Zeichen 1, + aus. Zum Aufbau der Gesamtmathematik werden wir weitere verschiedene Arten von Zeichen einführen und deren Handhabung erklären. Wir unterscheiden:

I. *Individualzeichen* (meist griechische Buchstaben):

1. 1, + (Bestandteile der Zahlzeichen),

2. $\varphi(*)$, $\psi(*)$, $\sigma(*, *)$ $\delta(*, *)$ $\mu(*, *)$ (individuelle Funktionen mit Leerstellen, individuelle Funktionenfunktionen),

3. $=$ (gleich), $\neq$ (ungleich), $>$ (größer) (mathematische Zeichen),
4. Z (Zahl sein), Φ (Funktion sein),
5. $\rightarrow$ („folgt", ein logisches Zeichen),
6. ( ) (Allzeichen).

II. *Variable* (lateinische Buchstaben):

1. $a, b, c, d, p, q, r, s, t$ (Grundvariable),
2. $f(*)$, $g(*)$ (variable Funktionen, variable Funktionenfunktionen),
3. $A, B, C, D, S, T, U, V, W$ (variable Formeln).

III. *Zeichen zur Mitteilung* (deutsche Buchstaben):

1. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$ (Funktionale),
2. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{K}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ (Formeln).

Zunächst sind zur Handhabung dieser Zeichen einige Erklärungen erforderlich.

Nebeneinander stehende Zeichen heißen eine Zeile, untereinander stehende Zeilen heißen eine Figur.

Individualzeichen (I) und Variable (II) sind allein diejenigen Zeichen, die im Kalkul vorkommen und das formale Gebäude ausmachen, während die letzte Gattung von Zeichen (III) nur zur Mitteilung bei den inhaltlichen Überlegungen dienen. Wir wollen im allgemeinen als Individualzeichen (I) griechische, als Variable (II) lateinische und als Zeichen zur Mitteilung (III) stets deutsche Buchstaben wählen. Letztere Zeichen (III) sollen auch gelegentlich und provisorisch als *Kurzzeichen* dienen; dabei ist Kurzzeichen ein Zeichen, welches lediglich zur kürzeren Schreibweise da ist und ein bestimmtes anderes Zeichen *bedeutet*. Es sei jedoch ausdrücklich bemerkt, daß die Einführung von Kurzzeichen zum Aufbau der Mathematik nicht nötig ist, sondern daß wir der Zeichen III nur zur Mitteilung im eigentlichen Sinne, d. h. bei dem inhaltlichen Operieren an den formalen Beweisen bedürfen.

Ein Zahlzeichen, eine Grundvariable, eine individuelle oder eine variable Funktion, deren Leerstellen mit Zahlzeichen, Grundvariablen oder Funktionen[1] ausgefüllt sind, desgleichen eine individuelle oder variable Funktionenfunktion, deren Leerstellen ausgefüllt sind, heißt ein *Funktional*. Ein Funktional kann stets selbst in eine entsprechende Leerstelle eingesetzt werden; sind dadurch die Leerstellen einer Funktion oder einer Funktionenfunktion sämtlich ausgefüllt, so heißt die entstehende Zeile wiederum ein Funktional. Ein Funktional ist also ein zusammengesetztes Zeichen, das aus den Zeichen I 1., 2., II 1., 2. besteht, dagegen nicht die Zeichen I 3., 4., 5., 6., II 3. enthält.

Stellt man zu beiden Seiten des Zeichens $=$ oder des Zeichens $\neq$ ein

[1] Diese Angaben lassen sich mit Hilfe des Begriffs der *Gattung* eines Funktionals präzisieren. Man muß dabei jede Leerstelle auf eine bestimmte Gattung beziehen. Anm. d. H.

Funktional, so heißt die entstehende Zeile eine *Primformel*; desgleichen entsteht eine Primformel, wenn man die Leerstelle des logischen Zeichens Z durch ein Funktional ausfüllt. Wenn also $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Funktionale bedeuten, so sind

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$
$$Z(\mathfrak{a})$$

Primformeln.

Wenn man zu beiden Seiten eines Folgezeichens eine Primformel oder eine variable Formel (II 3.)[1] stellt, so entsteht eine *Folgeformel*. Stellt man an beide Seiten eines Folgezeichens eine Primformel, eine variable Formel oder eine Folgeformel, so heißt die entstehende Zeile wiederum eine *Formel*. Und allgemein soll

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$$

eine Formel sein, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ variable oder bereits vorher aufgestellte Formeln sind.

Gewisse Formeln, die als die Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden *Axiome* genannt.

Bei der Behandlung der Axiome und beim Operieren mit ihnen sind zunächst folgende allgemeine Regeln zu beachten:

Individualzeichen bleiben unersetzbar; für Grundvariable dürfen Funktionale beliebig eingesetzt werden[2].

Klammern werden in üblicher Weise gebraucht, um Bestandteile von Zeichen abzusondern; sie dienen zur Kennzeichnung von Leerstellen und beim Einsetzen von Zeilen zur Sicherheit und Eindeutigkeit.

Das Allzeichen I 6. ist ein logisches Zeichen: eine Klammer mit einer Variablen darin; der dahinter stehende Formelabschnitt, der diese Variable im allgemeinen enthält, wird durch eine besondere Klammer abgegrenzt und dadurch als der Wirkungsbereich jenes Allzeichens kenntlich gemacht. Für das Allzeichen gelten noch folgende besondere Regeln:

Eine Variable in einer Formel heiße „frei", wenn sie nicht in einem Allzeichen dieser Formel steht; vor eine Formel darf stets ein Allzeichen mit einer freien Variablen darin vorgesetzt werden, so daß die ganze Formel der Wirkungsbereich dieses Allzeichens wird. Umgekehrt darf ein Allzeichen, dessen Wirkungsbereich die ganze übrige Formel ist, stets fortgelassen werden.

Eine in einem Allzeichen stehende Variable darf darin und zugleich in dem zugehörigen Wirkungsbereich durch irgend eine andere daselbst nicht vorkommende Variable ersetzt werden.

[1] Die betreffende Variable kann noch ein oder mehrere Funktionale als Argumente bei sich haben. So ist z. B. $C(1, a)$ eine variable Formel.

[2] Hier wäre noch die Einsetzungsregel für die Formelvariablen einzuschalten (vgl. Hilbert-Bernays: Grundlagen d. Math. I, § 4, S. 89f. und 98). Anm. d. H.

Zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Allzeichen, deren Wirkungsbereiche sich gleich weit erstrecken, dürfen miteinander vertauscht werden.

Wenn ein Bestandteil einer Formel

$$(b)\,(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(b))$$

lautet, wo $\mathfrak{A}$ die Variable b nicht enthält, so darf (b) hinter das Zeichen $\rightarrow$ gesetzt werden, so daß die Formel

$$\mathfrak{A} \rightarrow (b)\,\mathfrak{B}(b)$$

entsteht[1].

Wir wollen nun zunächst zeigen[2], wie wir zu den Sätzen des elementaren Rechnens von unserem neuen formalen Standpunkte aus gelangen. Dazu haben wir eine Tabelle von Axiomen nötig, die folgendermaßen beginnt:

1. $a = a$,
2. $1 + (a + 1) = (1 + a) + 1$,
3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$,
4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$,
5. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$.

Ferner bedienen wir uns beim Schließen des Schlußschemas

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}.$$

Alsdann lassen sich die formalen Beweise für die Zahlengleichungen, wie folgendes spezielle Beispiel zeigt, führen:

Aus Axiom 1. gewinnen wir durch Einsetzen

$$1 = 1,$$

ferner mit Benutzung des Kurzzeichens 2 für $1 + 1$ und des Kurzzeichens 3 für $2 + 1$

$$2 = 2 \tag{1}$$

und

$$3 = 3. \tag{2}$$

[1] Auch der umgekehrte Prozeß darf, wenn $\mathfrak{A}$ die Variable b nicht enthält, ausgeführt werden. — Das Operieren mit dem Zeichen $\rightarrow$ geschieht mittels des „Schlußschemas" (s. S. 169) und der „Axiome des logischen Schließens" (S. 175). Anm. d. H.

[2] Die hier folgenden Betrachtungen greifen auf ein früheres Stadium der Beweistheorie zurück, in welchem die Untersuchung sich zunächst auf einen ganz engen Formalismus beschränkte, der dann schrittweise verschiedene Erweiterungen erfuhr. Dieser Gedankengang wird im folgenden dargestellt und hernach — auf S. 174ff. — der Übergang von jenem provisorischen Ansatz zu dem in der vorliegenden Abhandlung intendierten Formalismus vollzogen. Anm. d. H.

Aus Axiom 2. ergibt sich ferner durch Einsetzen

$$1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1$$

oder

$$1 + 2 = 2 + 1$$

oder

$$1 + 2 = 3. \tag{3}$$

Aus Axiom 5. bekommen wir durch Einsetzen

$$3 = 3 \rightarrow (1 + 2 = 3 \rightarrow 3 = 1 + 2),$$

wegen (2) folgt hieraus mittels des Schlußschemas die Formel

$$1 + 2 = 3 \rightarrow 3 = 1 + 2$$

und endlich wegen (3) mittels des Schlußschemas die Formel

$$3 = 1 + 2.$$

Dies ist somit eine aus unseren bisherigen Axiomen beweisbare Formel.

Da wir aus den bisherigen Axiomen noch nicht alle Formeln, die wir brauchen, bekommen, so steht uns der Weg offen, noch weitere Axiome hinzuzufügen. Zuvor ist jedoch eine Festsetzung, was ein Beweis ist, und eine genaue Anweisung über den Gebrauch der Axiome nötig.

Ein *Beweis* ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen vermöge des Schlußschemas

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}},$$

wobei jedesmal jede der Prämissen, d. h. der betreffenden Formeln $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$, entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der *Endformel* $\mathfrak{T}$ eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht.

Eine Formel soll *beweisbar* heißen, wenn sie entweder ein Axiom ist bzw. durch Einsetzen aus einem Axiom entsteht oder die Endformel eines Beweises ist bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht. Somit ist der Begriff „beweisbar" relativ bezüglich des zugrunde liegenden Axiomensystems zu verstehen. Dieser Relativismus ist naturgemäß und notwendig; aus ihm entspringt auch keinerlei Schaden, da das Axiomensystem beständig erweitert und der formale Aufbau, unserer konstruktiven Tendenz entsprechend, immer vollständiger wird.

Um unsere Ziele zu erreichen, müssen wir die Beweise als solche zum Gegenstande unserer Untersuchung machen; wir werden so zu einer Art *Beweistheorie* gedrängt, die von dem Operieren mit den Beweisen selbst handelt. Für die konkret-anschauliche Zahlentheorie, die wir zuerst betrieben, waren die Zahlen das Gegenständliche und Aufweisbare, und die Beweise der Sätze über die Zahlen fielen schon in das gedankliche Gebiet. Bei unserer jetzigen Untersuchung ist der Beweis selbst etwas Konkretes und Aufweisbares; die inhaltlichen Überlegungen erfolgen erst an dem Beweise. Wie der Physiker seinen Apparat, der Astronom seinen Standort untersucht, wie der Philosoph Vernunftkritik übt, so hat meiner Meinung nach der Mathematiker seine Sätze erst durch eine Beweiskritik sicherzustellen, und dazu bedarf er dieser Beweistheorie.

Vergegenwärtigen wir uns nun insbesondere unsere Absicht, die Widerspruchsfreiheit der Axiome nachzuweisen. Von dem gegenwärtigen Standpunkte aus scheint dieses Problem zunächst sinnlos, da ja nur „beweisbare" Formeln entstehen, die gewissermaßen Äquivalente für lauter positive Behauptungen sind und demnach keinerlei Widerspruch erzeugen: wir könnten eben $1 = 1$ auch $1 = 1 + 1$ als Formel gelten lassen, falls sie sich durch unsere Schlußregeln als eine beweisbare Formel ergäbe. Soll aber unser Formalismus den vollen Ersatz bieten für die frühere wirkliche, aus Schlüssen und Behauptungen bestehende Theorie, so muß auch der inhaltliche Widerspruch sein formales Äquivalent finden. Damit dies der Fall ist, müssen wir neben der Gleichheit die Ungleichheit wie jene gewissermaßen als positive Aussage nehmen und durch ein neues Zeichen $\neq$ mittels neuer Axiome einführen, mit denen dann nach unseren Regeln wie früher operiert wird. Und dann erklären wir ein Axiomensystem als *widerspruchsfrei*, wenn vermöge desselben

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$$

niemals zugleich beweisbare Formeln sind, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Funktionale bedeuten.

Diesen allgemeinen Ausführungen entsprechend stellen wir das neue Axiom auf

6. $$a + 1 \neq 1;$$

dagegen schalten wir zunächst der Einfachheit halber das Axiom 2. aus: sodann besteht die erste Probe eines wirklichen Nachweises der Widerspruchsfreiheit in unserer neuen Beweistheorie darin, daß wir nunmehr folgenden Satz beweisen:

Das Axiomensystem, das aus den fünf Axiomen

1. $a = a$,
3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$,
4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$,
5. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$,
6. $a + 1 \neq 1$

besteht, ist widerspruchsfrei.

Der Beweis dieses Satzes geschieht in mehreren Schritten; zunächst beweisen wir folgendes:

Hilfssatz. Eine beweisbare Formel kann höchstens zweimal das Zeichen $\rightarrow$ enthalten.

In der Tat: es sei uns im Gegensatz zu dieser Behauptung ein Beweis für eine Formel mit mehr als zwei Zeichen $\rightarrow$ vorgelegt; dann gehen wir diesen Beweis durch bis zu einer Formel, die zum ersten Male diese Eigenschaft besitzt, d. h. derart, daß keine im Beweise dieser Formel vorausgehende Formel mehr als zweimal $\rightarrow$ aufweist. Diese Formel kann aus einem Axiom direkt durch Einsetzung nicht entstanden sein; denn für die in den Axiomen auftretenden Substituenden a, b, c dürfen nur Funktionale eingesetzt werden und diese bringen keine neuen Zeichen $\rightarrow$ mit sich. Jene Formel kann aber auch nicht als Endformel $\mathfrak{T}$ eines Schlusses erscheinen; denn dann wäre die zweite Prämisse dieses Schlusses $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$ eine frühere Formel mit mehr als zwei Zeichen $\rightarrow$ und folglich die in Rede stehende Formel $\mathfrak{T}$ nicht eine erste mit dieser Eigenschaft.

Ferner beweisen wir:

Hilfssatz. Eine Formel $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist nur dann beweisbar, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dasselbe Zeichen sind.

Zum Beweise unterscheiden wir wieder die beiden Fälle. Erstens die Formel entstehe direkt durch Einsetzen aus einem Axiom; dann käme dafür nur Axiom 1. selbst in Betracht und die Behauptung unseres Satzes ist in diesem Falle offenbar zutreffend. Zweitens nehmen wir einen Beweis als vorliegend an mit der Endformel $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht dasselbe Zeichen sind und wo überdies nicht schon an früherer Stelle im Beweise eine solche Formel vorkommt. In unserem Schlußschema müßte alsdann $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ übereinstimmen und $\mathfrak{S}$ eine beweisbare Formel sein; die zweite Prämisse hätte also die Gestalt

$$\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}. \tag{4}$$

Diese Formel müßte nun ihrerseits entweder durch Einsetzung aus einem Axiom oder als Endformel eines Beweises hervorgehen. Im ersteren Falle kämen nur die Axiome 3. und 4. in Betracht: handelte es sich um Axiom 3., so müßte $\mathfrak{a}$ von der Gestalt $\mathfrak{a}' + 1$ und $\mathfrak{b}$ von der Gestalt $\mathfrak{b}' + 1$ und $\mathfrak{S}$ müßte die Formel $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$ sein. Wären nun $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ dieselben Zeichen, so müßten auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dieselben Zeichen sein — gegen unsere Annahme. Wären aber andererseits $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ nicht dieselben Zeichen, so wäre ja $\mathfrak{S}$, d. h. $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$, eine im Beweise vor $\mathfrak{T}$ vorkommende Formel von der in Rede stehenden verlangten Art — was wiederum nicht sein darf; handelte es sich aber um Axiom 4., so müßte $\mathfrak{S}$ die Formel $\mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{b} + 1$ sein, in der dann zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens sicher nicht dasselbe Zeichen stände; dies ist wiederum unmöglich, da $\mathfrak{S}$ im Beweise voransteht. Es bleibt demnach nur die Möglichkeit übrig, daß (4) die Endformel eines Beweises ist, dessen letzter Schluß die Gestalt

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{U}\\ \mathfrak{U} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b})\end{array}}{\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}}$$

haben müßte. Hierin untersuchen wir wiederum das Zustandekommen der zweiten Prämisse

$$\mathfrak{U} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b})\,. \tag{5}$$

Wäre dieselbe direkt durch Einsetzen aus einem Axiom erhalten, so käme dafür nur Axiom 5. in Betracht und $\mathfrak{S}$ müßte alsdann von der Gestalt $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{U}$ von der Gestalt $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ sein. Wäre nun $\mathfrak{c}$ dasselbe wie $\mathfrak{b}$, so wäre $\mathfrak{U}$ nichts anderes als $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ und diese Formel wäre also im Beweise schon an früherer Stelle da, als angenommen worden ist. Wäre aber $\mathfrak{c}$ nicht dasselbe wie $\mathfrak{b}$, so ist ja die Formel $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ eine im Beweise frühere Formel von der für $\mathfrak{T}$ ursprünglich verlangten Eigenschaft. Es bleibt demnach nur die Möglichkeit offen, daß (5) Endformel eines Schlusses ist; dann müßte aber die zweite Prämisse dieses Schlusses eine Formel mit mindestens drei Zeichen $\rightarrow$ sein, und dies wäre nach dem vorhin bewiesenen Satze keinenfalls eine beweisbare Formel.

Damit ist unser zweiter Hilfssatz ebenfalls als zutreffend erkannt.

Wir haben vorhin ein Axiomensystem als widerspruchsfrei erklärt, wenn vermöge desselben

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$$

niemals zugleich beweisbare Formeln sind. Da nun nach dem eben bewiesenen Satze $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ nur dann eine beweisbare Formel ist, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dasselbe Zeichen sind, so läuft jetzt der Nachweis für die Widerspruchsfreiheit unserer Axiome darauf hinaus, zu zeigen, daß auf Grund unseres Axiomensystems niemals eine beweisbare Formel von der Gestalt

$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a} \tag{6}$$

zustande kommen kann. Wir zeigen dies wie folgt.

Um eine das Zeichen $\neq$ enthaltende Formel von der Gestalt (6) durch Einsetzung direkt aus einem Axiom zu gewinnen, wäre notwendig, Axiom 6. heranzuziehen; eine aus Axiom 6. durch Einsetzung entstehende Formel hat aber stets die Gestalt

$$\mathfrak{a}' + 1 \neq 1$$

und hierin ist $\mathfrak{a}' + 1$ gewiß nicht dasselbe Zeichen wie 1. Sollte andererseits (6) als Endformel eines Schlusses zustande kommen, so müßte die zweite Prämisse dieses Schlusses die Gestalt

$$\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a} \tag{7}$$

haben und, da eine solche Formel sicher nicht direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entstehen kann, so müßte auch diese Formel (7) durch einen Schluß entstanden sein. Die zweite Prämisse dieses Schlusses wäre alsdann

$$\mathfrak{T} \to (\mathfrak{S} \to a \neq a)$$

und auch diese Formel müßte aus gleichem Grunde durch einen Schluß hervorgehen, dessen zweite Prämisse notwendig die Gestalt

$$\mathfrak{U} \to (\mathfrak{T} \to (\mathfrak{S} \to a \neq a))$$

haben würde. Eine solche Formel kann aber, da sie sicher mehr als drei Zeichen $\to$ enthält, nach dem ersten vorhin bewiesenen Hilfssatze sicher keine beweisbare Formel sein. Damit entfällt auch die Möglichkeit, daß (6) eine beweisbare Formel ist, und der Nachweis für die Widerspruchsfreiheit unseres Axiomensystems ist völlig gelungen.

Ein nächstes Ziel wäre es, die entsprechende Untersuchung zu führen, nachdem wir das vorhin ausgeschaltete Axiom 2. wieder aufgenommen haben. Es gelingt auch in der Tat, wie ich hier nur mitteilen möchte, auf diesem Wege die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems nachzuweisen, das aus den Axiomen

1. $a = a$,
2. $1 + (a + 1) = (1 + a) + 1$,
3. $a = b \to a + 1 = b + 1$,
4. $a + 1 = b + 1 \to a = b$,
5. $a = c \to (b = c \to a = b)$,
6. $a + 1 \neq 1$

besteht.

Wir haben bisher außer dem Zeichen $\to$ und dem Allzeichen kein anderes logisches Zeichen eingeführt und insbesondere für die logische Operation „*nicht*" die Formalisierung vermieden. Dieses Verhalten gegenüber der Negation ist für unsere Beweistheorie charakteristisch: ein formales Äquivalent für die fehlende Negation liegt lediglich in dem Zeichen $\neq$, durch dessen Einführung die Ungleichheit gewissermaßen ebenso positiv ausgedrückt und behandelt wird, wie die Gleichheit, deren Gegenstück sie ist. Inhaltlich kommt die Negation nur im Nachweise der Widerspruchsfreiheit zur Anwendung, und zwar nur, insoweit es unserer Grundeinstellung entspricht. Mit Rücksicht auf diesen Umstand bringt uns, wie ich glaube, unsere Beweistheorie zugleich auch eine erkenntnistheoretische wichtige Einsicht in die Bedeutung und das Wesen der Negation.

Der logische Begriff „*alle*" kommt in unserer Theorie durch die darin auftretenden Variablen und diejenigen Regeln zur Geltung, die wir über das Operieren mit ihnen und mit dem Allzeichen festgesetzt haben.

Derjenige logische Begriff, der dann schließlich noch der Formalisierung bedarf, ist der Begriff *„es gibt"*, ein Begriff, der bekanntlich in der formalen Logik bereits durch die Negation und den Begriff „alle" ausdrückbar ist. Da aber in unserer Beweistheorie die Negation keine direkte Darstellung haben darf, so wird hier die Formalisierung von „es gibt" dadurch erreicht, daß man individuelle Funktionszeichen mittels einer Art impliziten Definition einführt, indem gewissermaßen das, „was es gibt", durch eine Funktion wirklich hergestellt wird. Das einfachste Beispiel dafür ist folgendes:

Um auszudrücken: wenn a nicht 1 ist, so „gibt es" eine Zahl, die a vorausgeht, führen wir das Funktionszeichen $\delta(*)$ mit einer Leerstelle als Individualzeichen ein und stellen als Axiom die Formel auf

7. $$a \neq 1 \;\rightarrow\; a = \delta(a) + 1 \,.$$

Es gelingt dann wiederum, wie ich hier nur erwähne, durch inhaltliche Überlegungen nachzuweisen, daß das aus den Axiomen 1.—7. bestehende Axiomensystem widerspruchsfrei ist.

Obwohl diese Darlegungen nur die ersten Anfänge meiner Beweistheorie enthalten, läßt sich aus ihnen doch die allgemeine Tendenz und Richtung erkennen, in der die Neubegründung der Mathematik geschehen soll. Zwei Gesichtspunkte treten besonders dabei hervor.

Erstens: Alles, was bisher die eigentliche Mathematik ausmacht, wird nunmehr streng formalisiert, so daß *die eigentliche Mathematik* oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an beweisbaren Formeln wird. Die Formeln dieses Bestandes unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß außer den mathematischen Zeichen noch das Zeichen $\rightarrow$, das Allzeichen und die Zeichen für Aussagen darin vorkommen. Dieser Umstand entspricht einer seit langem[1] von mir vertretenen Überzeugung, daß wegen der engen Verknüpfung und Untrennbarkeit arithmetischer und logischer Wahrheiten ein simultaner Aufbau der Arithmetik und formalen Logik notwendig ist.

Zweitens: Zu dieser eigentlichen Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine *Metamathematik*, hinzu, die zur Sicherung jener dient, indem sie sie vor dem Terror der unnötigen Verbote sowie der Not der Paradoxien schützt. In dieser Metamathematik kommt — im Gegensatz zu den rein formalen Schlußweisen der eigentlichen Mathematik — das inhaltliche Schließen zur Anwendung, und zwar zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome.

Die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft geschieht hiernach beständig wechselnd auf zweierlei Art: durch Gewinnung neuer „beweis-

---

[1] Vgl. meinen Vortrag „Über den Zahlbegriff", Jber. dtsch. Math.-Ver. Bd. 8, 1900, S. 180—184, abgedruckt als Anhang VI meiner „Grundlagen der Geometrie".

barer" Formeln aus den Axiomen mittels formalen Schließens und durch Hinzufügung neuer Axiome nebst dem Nachweis ihrer Widerspruchsfreiheit mittels inhaltlichen Schließens.

Den gewonnenen Prinzipien und soeben gekennzeichneten Tendenzen folgend, gehen wir nun an die Aufgabe heran, die Neubegründung der Mathematik durchzuführen.

Unser bisheriger Bestand an Axiomen sind lediglich die vorhin genannten Axiome 1.—7. Diese Axiome sind rein arithmetischen Charakters; die beweisbaren Formeln, die sich aus ihnen ergeben, bieten noch keinerlei Grundlage für die Theorie der reellen Zahl und machen sogar nur einen kleinen Teil der Arithmetik aus. Ein Blick auf diese bisherigen Axiome 1.—7. zeigt uns, daß darin nur solche Variable (kleine lateinische Buchstaben ohne Leerstellen) vorkommen, die Grundvariable sind. Aber bereits zur Begründung der Arithmetik reichen Axiome von solcher Art keineswegs aus. Vielmehr sind eine Reihe von Axiomen notwendig, die variable Formeln (große lateinische Buchstaben) enthalten, und zwar stellen wir zunächst folgende zwei arithmetische Axiome mit je einer variablen Formel auf:

Axiom der mathematischen Gleichheit.

8. $a = b \to (A(a) \to A(b))$.

Axiom der vollständigen Induktion.

9. $(a)(A(a) \to A(a+1)) \to \{A(1) \to (Z(b) \to A(b))\}$.

Außerdem bedürfen wir noch eines Bestandes solcher Axiome, die den gewöhnlichen logischen Schlußweisen entsprechen; es sind dies folgende vier Axiome mit variablen Formeln:

Axiome des logischen Schließens.

10. $A \to (B \to A)$,
11. $\{A \to (A \to B)\} \to (A \to B)$,
12. $\{A \to (B \to C)\} \to \{B \to (A \to C)\}$,
13. $(B \to C) \to \{(A \to B) \to (A \to C)\}$.

Ferner brauchen wir noch zwei Axiome für die mathematische Ungleichheit, die uns als Äquivalent für gewisse bei inhaltlichen Überlegungen unentbehrliche Schlußweisen dienen, nämlich die folgenden Axiome:

Axiome der mathematischen Ungleichheit.

14. $a \neq a \to A$,
15. $(a = b \to A) \to \{(a \neq b \to A) \to A\}$.

Wie schon erwähnt, bilden die Axiome 1.—7. nur einen Teil der zum Aufbau notwendigen arithmetischen Axiome. Zu ihrer Vervollständigung bedarf es vor allem der Einführung des logischen Funktionszeichens Z (ganze rationale positive Zahl sein). Andererseits ist eine einschränkende Abänderung des Axioms 6. nötig. Indem wir zugleich — um mit der üblichen Schreibweise in Einklang zu kommen — statt des Funktionszeichens $\delta(*)$ das Zeichen $* - 1$ gebrauchen, ferner die Axiome 2., 7. generalisieren bzw. ergänzen, dagegen die Axiome 3., 4., 5. ausschalten, weil sie nunmehr beweisbare Formeln werden, gelangen wir schließlich dazu, an Stelle der früheren Axiome 2.—7. die folgenden zu nehmen:

Arithmetische Axiome.

16. $Z(1)$,
17. $Z(a) \to Z(a+1)$,
18. $Z(a) \to (a \neq 1 \to Z(a-1))$,
19. $Z(a) \to (a+1 \neq 1)$,
20. $(a+1)-1 = a$,
21. $(a-1)+1 = a$,
22. $a+(b+1) = (a+b)+1$,
23. $a-(b+1) = (a-b)-1$.

Wenn wir dieses Axiomensystem 1., 8.—23. zugrunde legen[1], so gelingt es lediglich durch Anwendung unserer Regeln, d. h. auf dem formalen Wege, den gesamten Bestand an Formeln und Sätzen der Arithmetik zu gewinnen.

Das erste nunmehr zu erstrebende wichtige Ziel ist es, für dieses Axiomensystem 1., 8.—23. die Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Dieser Beweis gelingt in der Tat, und damit ist insbesondere die Schlußweise der vollständigen Induktion (Axiom 9.), wie sie der Arithmetik charakteristisch ist, gesichert[2].

Aber der wesentlichste Schritt bleibt noch zu tun übrig, nämlich der Nachweis der Anwendbarkeit des logischen Prinzips „*tertium non datur*" in dem Sinne der Erlaubnis, auch bei unendlichvielen Zahlen, Funktionen oder Funktionenfunktionen schließen zu dürfen, daß eine Aussage entweder für alle diese Zahlen, Funktionen bzw. Funktionenfunktionen gilt oder daß notwendig unter ihnen eine Zahl, Funktion bzw. Funktionenfunktion vorkommt, für die die Aussage nicht gilt. Erst durch den Nachweis der Anwendbarkeit dieses Prinzips ist die Begründung der Theorie der reellen Zahlen geleistet und die Brücke zur Analysis und Mengenlehre geschlagen.

Dieser Nachweis gelingt nun im Sinne und auf Grund der dargelegten Grundgedanken, indem ich gewisse Funktionenfunktionen τ und α durch

---

[1] Es muß noch ein Schema der Einführung von Funktionen durch *Rekursionsgleichungen* hinzugenommen werden. Anm. d. H.

[2] Wie sich herausgestellt hat, ist der erwähnte Beweis nur bei Ausschluß des Allzeichens und Ersetzung des Axioms 9. durch das Induktions*schema* bündig. Anm. d. H.

Aufstellung von Axiomensystemen einführe und die Widerspruchsfreiheit dieser Axiomensysteme nachweise[1].

Das einfachste Beispiel einer dem dargelegten Zwecke dienenden Funktionenfunktion ist die Funktionenfunktion $\varkappa(f)$, wo das Argument f eine variable zahlentheoretische Funktion der Grundvariablen a ist, so daß

$$Z(a) \to \{f(a) \neq 1 - 1 \to Z(f(a))\}$$

gilt, und wo dann $\varkappa(f) = 1 - 1$ sein soll, falls f für alle a den Wert 1 hat, während sonst $\varkappa(f)$ das kleinste ganzzahlige Argument bedeuten soll, für welches f nicht 1 ist. Das Axiomensystem für dieses $\varkappa(f)$ lautet:

24. $(\varkappa(f) = 1 - 1) \to (Z(a) \to f(a) = 1)$,
25. $(\varkappa(f) \neq 1 - 1) \to Z\,\varkappa(f)$,
26. $(\varkappa(f) \neq 1 - 1) \to (f(\varkappa(f)) \neq 1)$,
27. $Z\,a \to \{Z(\varkappa(f) - a) \to f(\varkappa(f) - a) = 1\}$.

In ähnlicher Weise läßt sich ein gewisses Paar zusammengehöriger Funktionenfunktionen τ und α einführen, durch die die vollständige Begründung der Theorie der reellen Zahlen und insbesondere der Nachweis der Existenz der oberen Grenze für jede beliebige Menge reeller Zahlen möglich wird.

Zum Schluß dieser ersten Mitteilung möchte ich noch bemerken, daß mich bei der Durchführung und Ausarbeitung der hier dargelegten Ideen P. Bernays aufs wesentlichste unterstützt hat.

---

[1] Hilbert nimmt hier Bezug auf seinen Ansatz zur Behandlung der transfiniten Funktionen im Widerspruchsfreiheitsbeweis. Es steht jedoch noch dahin, ob man auf diesem Wege zu dem gewünschten Ziel gelangen kann; vgl. hierzu S. 210—213. Anm. d. H.