

LINEARE ALGEBRA I

WS 00/01

Übungsblatt 13: Determinanten und charakteristisches Polynom

61. Eine $n \times n$ -Matrix heisst *zirkulär*, wenn jede Zeile der Matrix eine zyklische Vertauschung der vorhergehenden Zeile ist. Z.B. sind die folgenden Matrizen zirkulär:

$$M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

Finde notwendige und hinreichende Bedingungen für die Zahlen a, b bzw. a, b, c , so dass die Matrix M_2 bzw. M_3 regulär ist.

62. Sei $\psi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ eine lineare Abbildung und sei

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix von ψ bezüglich der Standardbasis von \mathbb{C}^3 .

- (a) Welches sind die Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenwerte von ψ ?
(b) Finde eine Basis in \mathbb{C}^3 , so dass die Matrix von ψ bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt hat (d.h. nur die Einträge auf der Diagonale sind ungleich Null).

63. Seien A, B zwei $n \times n$ -Matrizen wobei B regulär ist.

Zeige, dass gilt: $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(BAB^{-1})$.

Hinweis: Betrachte die Matrix B als eine Basistransformationsmatrix.

- 2⁶. Sei $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Basis von \mathbb{R}^2 und seien x_1, x_2 zwei Vektoren aus \mathbb{R}^2 bzgl. der Basis v_1, v_2 . Sei ferner Δ eine Determinantenfunktion in \mathbb{R}^2 .

- (a) Zeige, dass

$$\frac{|\Delta(x_1, x_2)|}{|\Delta(v_1, v_2)|}$$

dem Flächeninhalt des von den Vektoren x_1 und x_2 aufgespannten Parallelogramms entspricht.

- (b) Formuliere und beweise die analoge Aussage im \mathbb{R}^3 .
(c) Definiere in analoger Weise das Volumen eines n -dimensionalen Parallelepipeds im \mathbb{R}^n (aufgespannt durch die Vektoren x_1, \dots, x_n).

Schöne Semesterferien!