

# LINEARE ALGEBRA I

WS 00/01

Übungsblatt 9: Lineare Abbildungen und Matrizen

---

41. Sei  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Abbildung für die gilt:

$$\begin{aligned}\Phi((1, 0, 1)) &:= (-8, 34, 17) \\ \Phi((1, -1, 0)) &:= (8, -34, 17) \\ \Phi((-1, 0, 0)) &:= (-8, -34, -17) \\ \Phi((1, -1, 1)) &:= (-8, -34, -17)\end{aligned}$$

Begründe warum  $\Phi$  keine *lineare* Abbildung sein kann.

42. Seien  $v_1 = (1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)$  und  $v_3 = (1, 1, 1)$ , dann ist  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ . Seien  $\varphi$  und  $\psi$  zwei lineare Abbildungen von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}^3$  für die gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) &:= (-8, 34, 17) \\ \varphi(v_2) &:= (8, -34, 17) \\ \varphi(v_3) &:= (-8, -34, -17)\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\psi(v_1) &:= (-8, -34, 17) \\ \psi(v_2) &:= (8, 34, 17) \\ \psi(v_3) &:= (-8, 34, -17)\end{aligned}$$

wobei die Bildvektoren in der Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  geschrieben sind. Ferner sei  $x = 2v_1 - 3v_2 + v_3$ .

(a) Bestimme die Matrix von  $\varphi$  bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Bestimme  $\psi(v_2)$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$  von  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Bestimme  $4\psi(x)$  bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$ .

(c) Bestimme  $(3\varphi + \psi)(2x)$  bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$ .

43. Sei  $\varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  in den Standardbasen von  $\mathbb{R}^5$  und  $\mathbb{R}^3$  wie folgt definiert:

$$\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) := (x_1, x_3, x_5)$$

(a) Zeige, dass  $\varphi$  eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimme die Matrix von  $\varphi$  bezüglich der Standardbasen von  $\mathbb{R}^5$  und  $\mathbb{R}^3$ .

(c) Bestimme die Matrix von  $\varphi$  bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  und der Basis  $\mathcal{B}_5$  von  $\mathbb{R}^5$ , definiert wie folgt:

$$\mathcal{B}_5 = \{(1, 0, -1, 0, 1), (1, 2, -1, 0, 1), (1, 0, -1, 2, 1), \\ (-1, 2, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 2, -1)\}$$

44. Sei die lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  durch folgende Matrix  $A$  gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sei weiter  $x^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $x = (1, 2, 3)$ .

Berechne: (a)  $Ax^t$  (b)  $xA$  (c)  $xAx^t$  (d)  $xA^2x^t$

45. Seien  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  zwei lineare Abbildungen. Bezüglich den Standardbasen von  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^4$  entsprechen  $\varphi$  bzw.  $\psi$  den Matrizen  $A$  bzw.  $B$ , wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechne die folgenden Matrizen:

(a)  $BA$  (b)  $BA^2$  (c)  $BA^{-1}$