

Halbeisen/Hungerbühler/Läuchli

# Mit harmonischen Verhältnissen zu Kegelschnitten

Perlen der klassischen Geometrie

Dezember 2015

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Bianca Alton et al.

Satz: ???

Herstellung: ???

# Vorwort

## An wen wendet sich dieses Buch?

In erster Linie richtet sich dieses Buch an alle, die sich an klassischer Geometrie erfreuen. Insbesondere ist das Buch gedacht für Lehrpersonen der Sekundarstufe II, für interessierte Schülerinnen und Schüler, sowie für alle interessierten Laien. Da kaum Vorkenntnisse in Geometrie vorausgesetzt werden, eignet sich das Buch auch zum Selbststudium.

## Warum wurde dieses Buch geschrieben?

Im Zuge der Schulzeitverkürzung in allen deutschsprachigen Ländern und durch den Wegfall von Mathematikstunden wurde nicht selten die Geometrie drastisch gekürzt. Da elementare Geometrie auch im Fachstudium nicht vorkommt, und in der Lehrdiplomausbildung lediglich unter dem Aspekt der Fachdidaktik behandelt wird, besteht die Gefahr, dass langfristig grundlegende Kenntnisse in klassischer Geometrie verloren gehen. Um dieser Entwicklung entgegenzuwirken, haben wir in diesem Buch versucht, die Schönheit der griechischen Geometrie deutlich zu machen und zu zeigen, dass Geometrie mehr denn je ein Grundpfeiler für den Aufbau von mathematischem Verständnis ist.

Der ästhetische Aspekt erschliesst sich durch die Klarheit der Einsichten sowie die Entdeckung überraschender Zusammenhänge. Harmonische Verhältnisse spielen dabei immer wieder eine zentrale Rolle und ziehen sich daher wie ein roter Faden durch das ganze Buch. Es werden durchgängig elementar zugängliche Beweise angeboten, so dass sich im Aufbau keine Lücken in der Theorie ergeben, welche uns bis zu den Kegelschnitten führt.

## Aufbau des Buches

Der grösste Teil des Buches widmet sich dem sorgfältigen Aufbau der Theorie, beginnend mit dem Satz von Thales bis hin zur Theorie der Kegelschnitte und den klassischen Sätzen von Pascal und Brianchon. Nach der Theorie werden in jedem Kapitel in den Anmerkungen die Resultate in ihren historischen Kontext gestellt und mit Literaturangaben unterlegt. Daneben findet man jeweils am Ende der Kapitel einige weiterführende Resultate sowie ausgewählte Aufgaben. Diese Resultate und Aufgaben ergänzen und vertiefen die Theorie, sind aber nicht notwendig für das weitere Verständnis des Textes. Am Schluss dieses Buches haben wir ein Kapitel mit "Kleinodien" angefügt, in welchem, aufbauend auf dem Haupttext, diverse Sätze der klassischen und neueren Geometrie behandelt werden.

Um auch Personen ohne Vorkenntnisse in Geometrie den Einstieg ins Thema zu ermöglichen, enthält das Buch einen Anhang mit elementaren Resultaten zur zentralen Streckung,

den Strahlensätzen und einigen Folgerungen. Auch hier werden durchwegs elementare Beweise angegeben, so dass sich dieser Abschnitt auch für den direkten Einsatz in der Schule eignet.

## Dank

Das vorliegende Buch ist mit grosszügiger finanzieller Unterstützung der ETH (Eidgenössische Technische Hochschule) Zürich entstanden. Für diese Unterstützung möchten wir der ETH ganz herzlich danken. Weiter danken möchten wir dem Kanton Thurgau, der einem der Autoren während der Entstehung des Buches ein Weiterbildungssemester gewährt hat.

Die meisten Figuren wurden zuerst mit GeoGebra gezeichnet und dann als PSTricks ins Manuskript eingefügt. Danken möchten wir deshalb auch den Entwicklern dieser kostenlosen, phantastischen Geometrie-Software.

Die drei letzten Bilder zu den Dandelinschen Kugeln im Abschnitt 7.5 sind mit der Software Mathematica™ der Firma Wolfram Research (Wolfram Research, Inc., 100 Trade Center Drive, Champaign, IL 61820-7237, USA) unter der ETH Lizenz erzeugt worden.

Einen speziellen Dank möchten wir auch Frau Kristine Barro für die sorgfältige Durchsicht des Textes aussprechen. Danken möchten wir schliesslich auch all jenen, die uns in diesem Buchprojekt unterstützt haben.

# Inhaltsverzeichnis

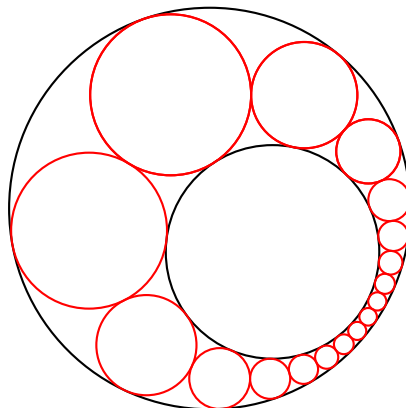
<b>Einleitung</b> .....	1
<b>1 Peripheriewinkelsatz</b> .....	5
1.1 Satz von Thales .....	5
1.2 Tangenten an Kreise .....	7
1.3 Peripheriewinkelsatz .....	9
1.4 Satz von Pascal für Kreise .....	13
<i>Weitere Resultate und Aufgaben</i> .....	15
<i>Anmerkungen</i> .....	25
<b>2 Sehnen, Sekanten und Chordalen</b> .....	27
2.1 Sehnen- und Sekantensatz .....	27
2.2 Chordalen .....	32
<i>Weitere Resultate und Aufgaben</i> .....	38
<i>Anmerkungen</i> .....	42
<b>3 Harmonische Geradenbüschel</b> .....	43
3.1 Harmonische Teilung einer Strecke .....	43
3.2 Harmonische Punkte und Geraden .....	45
3.3 Harmonische Verhältnisse am Dreieck .....	48
3.4 Harmonische Verhältnisse am Viereck .....	50
3.5 Sätze von Ceva und Menelaos .....	54
<i>Weitere Resultate und Aufgaben</i> .....	59
<i>Anmerkungen</i> .....	63
<b>4 Harmonische Punkte am Kreis</b> .....	65
4.1 Apolloniuskreise .....	65
4.2 Pol und Polare .....	70
4.3 Harmonische Punkte und Polaren .....	72
4.4 Satz von Brianchon für Kreise .....	76
<i>Weitere Resultate und Aufgaben</i> .....	77
<i>Anmerkungen</i> .....	80
<b>5 Ein Apollonisches Berührungsproblem</b> .....	83
5.1 Berührungsprobleme von Apollonius .....	83
5.2 Konstruktion eines Berührungskreises .....	84
5.3 Begründung der Konstruktion .....	86
<i>Weitere Resultate und Aufgaben</i> .....	92
<i>Anmerkungen</i> .....	97
<b>6 Inversion am Kreis</b> .....	99
6.1 Die Inversion am Kreis als Abbildung der Ebene .....	99
6.2 Die stereographische Projektion .....	100
6.3 Eigenschaften der Inversion am Kreis .....	104

6.4	Steiner-Ketten von Kreisen	107
	<i>Weitere Resultate und Aufgaben</i>	110
	<i>Anmerkungen</i>	115
<b>7</b>	<b>Kegelschnitte</b>	117
7.1	Die Zentralprojektion	117
7.2	Zentralprojektionen von Geraden	118
	7.2.1 Harmonische Verhältnisse	120
	7.2.2 Satz von Desargues	121
7.3	Zentralprojektionen von Kreisen	122
	7.3.1 Pol und Polare	122
	7.3.2 Die Kegelschnittarten	124
	7.3.3 Ellipsen	126
	7.3.4 Hyperbeln	132
	7.3.5 Parabeln	135
7.4	Die Sätze von Pascal und Brianchon	139
7.5	Die Dandelin-Kugeln	147
	<i>Weitere Resultate und Aufgaben</i>	150
	<i>Anmerkungen</i>	154
<b>8</b>	<b>Kleinodien</b>	155
8.1	Konstruktionen mit Lineal oder Zirkel alleine	155
8.2	Der Satz von Moss und verwandte Resultate	158
8.3	Konjugierte Punkte im Dreieck	160
8.4	Doppelverhältnisse	165
8.5	Der Satz von Carnot für Kegelschnitte und verwandte Resultate	168
8.6	Bemerkungen zur Polarentheorie	176
8.7	Der Satz von Morley und die Morley-Konfiguration	182
	<i>Aufgaben</i>	186
	<i>Anmerkungen</i>	188
<b>9</b>	<b>Anhang: Zentrische Streckung und Strahlensätze</b>	189
9.1	Verhältnisse und Flächenumwandlungen	189
9.2	Zentrische Streckung	191
9.3	Die Strahlensätze	193
9.4	Folgerungen aus den Strahlensätzen	198
	<i>Anmerkungen</i>	207
	<b>Literaturverzeichnis</b>	211
	<b>Index</b>	213

# Einleitung

Das Buch behandelt die klassische Geometrie der Kreise und Kegelschnitte aus der Perspektive der griechischen Mathematik. Vielleicht hätte Apollonius es in ähnlicher Weise geschrieben. Obwohl auch Aspekte der Mathematik des 17. und 18. Jahrhunderts vorgestellt werden, etwa die Sätze von Pascal und Brianchon oder die Theorie der Polaren und Chordalen, bleiben die Beweise elementar zugänglich und dennoch rigoros. Auf diese Weise stossen wir bis ins 19. Jahrhundert vor, als Poncelet die projektive Geometrie aus der affinen Geometrie löste und damit zu neuen Ufern aufbrach. Bei der Auswahl der Inhalte haben wir stets die Perlen der Elementargeometrie im Blick und bei der Darstellung steht die Ästhetik einfacher und eleganter Überlegungen im Vordergrund, wobei die harmonischen Verhältnisse eine wesentliche Rolle spielen.

Das Buch beginnt mit dem Satz von Thales bzw. mit dem Peripheriewinkelsatz, der bis zum Satz von Pascal für Kreise ausgelotet wird. Im zweiten Kapitel führen die Winkelbetrachtungen am Kreis zum Sehnen- und Sekantensatz, auf denen anschliessend die Theorie der Chordalen aufbaut. Das dritte Kapitel beleuchtet harmonische Verhältnisse, welche an Drei- und Vierecken auftreten. Diese Überlegungen münden in einer gemeinsamen Betrachtung der Sätze von Ceva und Menelaos. Im vierten Kapitel werden die bisherigen Ergebnisse kombiniert zur Theorie harmonischer Punkte am Kreis: Vom Apolloniuskreis gelangen wir über die Polarentheorie zum Satz von Brianchon am Kreis. Das fünfte Kapitel ist der Apollonischen Berührungsaufgabe gewidmet, nämlich einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt. Es zeigt sich, dass dieses Problem im Lichte der Chordalentheorie eine sehr elegante, einfache und überraschende Lösung besitzt. Das sechste Kapitel behandelt die Inversion am Kreis, mit welcher wir unter anderem den schönen Schliessungssatz von Steiner über sogenannte Kreis-Ketten, wie in der nachstehenden Figur dargestellt, beweisen werden.



Das siebte Kapitel hat zum Ziel, mit Hilfe der Zentralprojektion die Tür zur Theorie der Kegelschnitte aufzustossern. Auch hier spielen harmonische Verhältnisse wieder eine zentrale Rolle. Die Sätze von Pascal und Brianchon für Kegelschnitte bilden den krönenden Abschluss des Haupttextes. In den “Kleinodien” sind schliesslich diverse Sätze der klassischen und neueren Geometrie zu finden, welche aufbauend auf dem Haupttext behandelt werden.

## Vorkenntnisse

Je nach Vorkenntnissen empfehlen wir den Leserinnen und Lesern im Anhang zunächst die Abschnitte zur zentrischen Streckung, den Strahlensätzen und einigen Folgerungen zu konsultieren, bevor sie sich dem ersten Kapitel widmen.

Ansonsten setzen wir nur Kenntnisse voraus, welche unmittelbar aus den Axiomen der euklidischen Geometrie (inklusive Parallelnaxiom) folgen. Zu diesen zählen unter anderem:

- Die Winkelsumme im Dreieck ist  $180^\circ$ .
- Die Stufen- und Wechselwinkel an Parallelen sind gleich gross.
- Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich gross.
- Ein Punkt, welcher denselben Abstand zu zwei Punkten hat, liegt auf deren Mittelsenkrechten.
- Eine Tangente an einen Kreis steht immer rechtwinklig zum Berührungsradius des Kreises.

Diese und weitere Sätze finden sich alle in den ersten Büchern von Euklids *Elementen* [15] oder, in moderner Form, bei Hilbert [22] und Hartshorne [19].

Bei unseren Konstruktionen mit Zirkel und Lineal setzen wir ebenfalls nur elementare Konstruktionstechniken voraus. Zu diesen gehören zum Beispiel *Lot fällen*, *Lot errichten* oder *Mittelpunkt einer Strecke konstruieren*.

## Terminologie

Die geometrischen Begriffe, welche in diesem Buch verwendet werden, wie zum Beispiel *Peripheriewinkel*, *Sehne*, *Sekante*, *Zentrale*, gehören zur klassischen Terminologie der euklidischen Geometrie. Wie üblich werden Punkte und Ebenen mit Grossbuchstaben sowie Strecken und Geraden mit Kleinbuchstaben bezeichnet. An einigen Stellen werden auch Streckenlängen mit Kleinbuchstaben bezeichnet, obwohl wir sonst durchgehend *Strecken* und *Streckenlängen* unterscheiden: Sind  $A$  und  $B$  zwei Punkte, so bezeichnet  $\overline{AB}$  die *Strecke* zwischen  $A$  und  $B$  und  $\overline{AB}$  die *Länge* dieser Strecke. Wie üblich bezeichnet  $AB$  die Gerade durch  $A$  und  $B$ . Wir möchten an dieser Stelle erwähnen, dass Strecken, Geraden und Ebenen zu sich selber parallel sind. Ebenso sind Strecken, welche auf einer Geraden liegen, zu dieser parallel. Der projektiven Geometrie entnehmen wir den Begriff *kollinear* um auszudrücken, dass mehrere Punkte auf einer Geraden liegen. Und *kopunktal* nennen wir Geraden, die durch einen Punkt gehen.



## Literaturüberblick

Die Literatur zur elementaren Geometrie und ihrer Geschichte ist ausserordentlich umfangreich. Um interessierten Leserinnen und Lesern die Orientierung zu erleichtern, geben wir hier einige Hinweise in Form einer kommentierten Literaturliste, die selbstverständlich keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erhebt:

### Zur Ergänzung

- Adams [1, 2]: Abgesehen von den Kegelschnitten waren die beiden Bücher von Adams am Anfang eine Art Modell für unser Buch.
- Scheid und Schwarz [35]: Auch von diesem Buch haben wir uns inspirieren lassen.
- Als Ergänzung zu unserem Buch möchten wir die *Kreisgeometrie* von Aumann [7] empfehlen, in dem zahlreiche klassische Resultate der Kreisgeometrie sehr schön dargestellt werden.

### Zu den Grundlagen der Geometrie

- Euklid [15], Hilbert [22], Hartshorne [19]: Für die Grundlagen und die Axiomatik der Geometrie können wir diese drei Bücher sehr empfehlen.

### Zu harmonischen Verhältnissen

- Steiner [39]: In diesem Buch beweist Steiner unter anderem die Konstruktion von harmonischen Punkten mit dem Lineal allein, woraus dann später z.B. die Konstruktion der Tangenten mit dem Lineal allein folgt.
- Steiner [38]: Hier findet man viele elegante Beweise für Sätze der Polarentheorie. Ferner ist dieses Buch ein schöner Zugang zu den Kegelschnitten.

### Zur Theorie der Kegelschnitte

- Apollonius [5]: Das Werk zeichnet sich aus durch elementare, klare und zugleich ästhetische Beweise, welche bis zur vollen Polarentheorie für Kegelschnitte vorstossen.
- Zeuthen [48]: Dieses Buch behandelt ausführlich Apollonius' Werk [5] und beschreibt auch, was Archimedes über die Kegelschnitte wusste.

### Zur Geschichte der Geometrie

- Unsere Quellen für historische Anmerkungen waren Tropfke [44] (Hauptreferenz), van der Waerden [45] (vor allem für die ersten Kapitel), aber auch Hauser [20], Ostermann und Wanner [32], sowie Scriba und Schreiber [37].



# 3 Harmonische Geradenbüschel

---

## Übersicht

3.1 Harmonische Teilung einer Strecke .....	43
3.2 Harmonische Punkte und Geraden .....	45
3.3 Harmonische Verhältnisse am Dreieck .....	48
3.4 Harmonische Verhältnisse am Viereck .....	50
3.5 Sätze von Ceva und Menelaos .....	54
Weitere Resultate und Aufgaben .....	59
Anmerkungen .....	63

---

In diesem Kapitel betrachten wir Verhältnisse von Strecken auf Geraden. Insbesondere untersuchen wir innere und äussere Teilungspunkte einer Strecke sowie Geradenbüschel welche durch die Streckenendpunkte und die Teilungspunkte gehen. Diese sogenannten *harmonischen Geradenbüschel* werden in den folgenden Kapiteln eine wichtige Rolle spielen.

## 3.1 Harmonische Teilung einer Strecke

**Innerer und äusserer Teilungspunkt.** Gegeben seien zwei Punkte  $P$  und  $Q$ . Ein Punkt  $T$  auf der Geraden  $PQ$  teilt die Strecke  $\overline{PQ}$  im Verhältnis  $m : n$ , falls gilt:

$$\overline{PT} : \overline{QT} = m : n$$

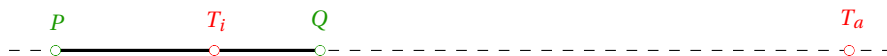
Zu jedem Verhältnis  $m : n$  – wobei  $m$  und  $n$  durch die Längen zweier Strecken gegeben sind – gibt es einen *inneren Teilungspunkt*  $T_i$  welcher auf der Strecke  $\overline{PQ}$  liegt. Falls  $m \neq n$  und  $m \neq 0$ , so gibt es immer auch einen *äusseren Teilungspunkt*  $T_a$  welcher ausserhalb von  $\overline{PQ}$  liegt.

Ist  $T_i$  der innere und  $T_a$  der äussere Teilungspunkt einer Strecke  $\overline{PQ}$ , so gilt:

$$\overline{PT_i} : \overline{QT_i} = m : n = \overline{PT_a} : \overline{QT_a}$$

**Harmonische Teilung einer Strecke.** Ist  $m \neq n$ , so sagen wir, dass die Strecke  $\overline{PQ}$  durch die Punkte  $T_i$  und  $T_a$  *harmonisch* im Verhältnis  $m : n$  geteilt wird.

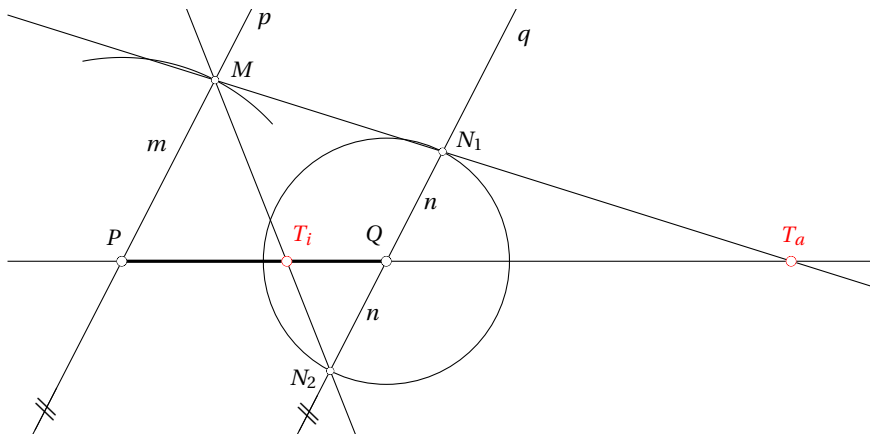
In der folgenden Figur wird die Strecke  $\overline{PQ}$  harmonisch im Verhältnis 3 : 2 geteilt:



**Bemerkungen:**

- Für  $m = n$  und damit  $m : n = 1$  existiert nur der innere Teilungspunkt, der zugleich Mittelpunkt der Strecke  $\overline{PQ}$  ist. Der äusserer Teilungspunkt liegt im Unendlichen.
- Strebt  $m : n$  gegen 0, so streben sowohl  $T_i$  als auch  $T_a$  gegen den Punkt  $P$ , das heisst im Grenzfall  $m : n = 0$  ist  $T_i = T_a = P$ .
- Strebt  $m : n$  gegen unendlich, so streben sowohl  $T_i$  als auch  $T_a$  gegen den Punkt  $Q$ , das heisst im Grenzfall  $m : n = \infty$  ist  $T_i = T_a = Q$ .

**Konstruktion der harmonischen Teilung von  $\overline{PQ}$  im Verhältnis  $m : n$**



1.  $m$  und  $n$  seien durch die Längen zweier Strecken gegeben.
2. Von  $P$  aus wird nun die Strecke der Länge  $m$  auf einer Hilfsgeraden  $p$  durch  $P$  abgetragen; damit erhalten wir  $M$ .
3. Durch  $Q$  wird eine Parallele  $q$  zu  $p$  gezeichnet.
4. Von  $Q$  aus wird die Strecke der Länge  $n$  beidseitig auf  $q$  abgetragen; damit erhalten wir  $N_1$  und  $N_2$ .
5. Die Schnittpunkte der Geraden  $PQ$  mit  $MN_1$  und  $MN_2$  sind  $T_a$  bzw.  $T_i$ .

Aus dem 2. **Strahlensatz** mit Streckungszentrum  $T_i$  beziehungsweise  $T_a$  folgt:

$$\overline{PT_i} : \overline{QT_i} = m : n = \overline{PT_a} : \overline{QT_a}$$

## 3.2 Harmonische Punkte und Geraden

**Harmonische Punkte.** Vier Punkte  $AB'A'B$  auf einer Geraden liegen *harmonisch*, wenn die Strecke  $\overline{AA'}$  durch die Punkte  $B'$  und  $B$  harmonisch geteilt wird. Etwas formaler ausgedrückt bedeutet dies:

$$\overline{AB'} : \overline{A'B'} = \overline{AB} : \overline{A'B}$$

Sind  $AB'A'B$  harmonische Punkte, so nennen wir  $A$  und  $A'$  bzw.  $B'$  und  $B$  *zugeordnete Punkte*.

Aus der Definition harmonischer Punkte folgt unmittelbar

### Satz 3.1

Teilen die Punkte  $B'$  und  $B$  die Strecke  $\overline{AA'}$  harmonisch, so teilen umgekehrt die Punkte  $A$  und  $A'$  die Strecke  $\overline{B'B}$  harmonisch.



**Beweis:** Weil  $AB'A'B$  harmonisch liegen, gilt  $\overline{AB'} : \overline{A'B'} = \overline{AB} : \overline{A'B}$ . Durch vertauschen der Innenglieder erhalten wir daraus  $\overline{AB'} : \overline{AB} = \overline{A'B'} : \overline{A'B}$ , was besagt, dass  $A$  und  $A'$  die Strecke  $\overline{B'B}$  harmonisch teilen. **q.e.d.**

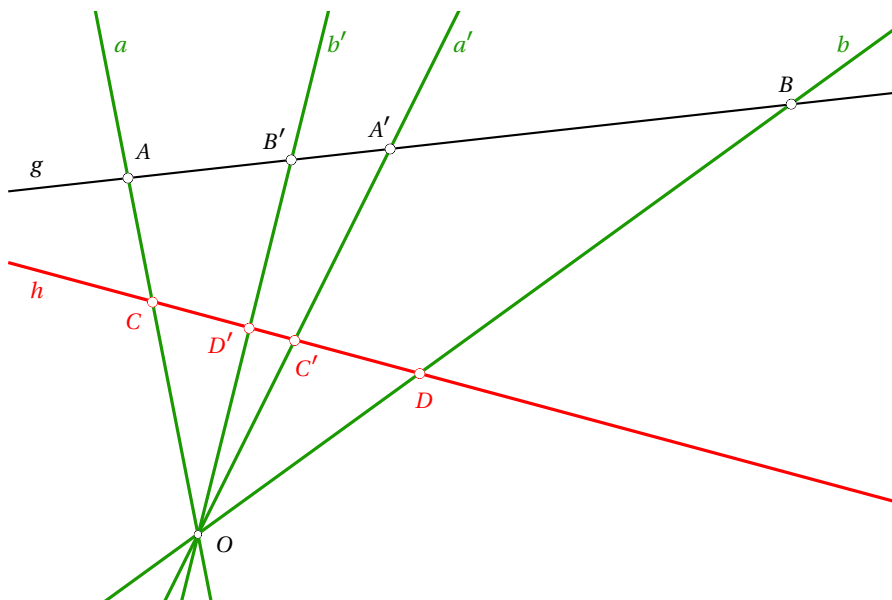
### Bemerkungen:

- Sind  $AB'A'B$  harmonische Punkte, so ist  $A'$  ein innerer und  $A$  ein äusserer Teilungspunkt der Strecke  $\overline{B'B}$ , und entsprechend ist  $B'$  ein innerer und  $B$  ein äusserer Teilungspunkt der Strecke  $\overline{AA'}$ .
- Sind von vier harmonischen Punkten  $AB'A'B$  drei Punkte gegeben, so lässt sich der vierte harmonische Punkt konstruieren: Die Konstruktionen wiederholen im Wesentlichen die obige Grundkonstruktion der harmonischen Teilung.

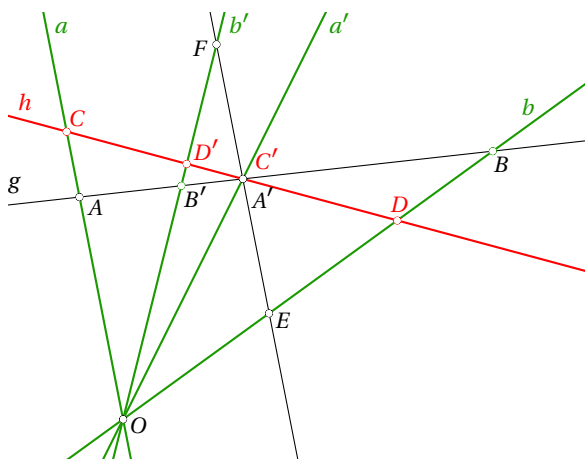
**Harmonisches Geradenbüschel.** Seien  $AB'A'B$  harmonische Punkte auf einer Geraden  $g$ . Verbindet man einen Punkt  $O$  ausserhalb von  $g$  mit jedem dieser vier Punkte, so erhält man ein Geradenbüschel  $a = OA$ ,  $a' = OA'$ ,  $b' = OB'$ ,  $b = OB$ . Diese vier Geraden  $ab'a'b$  nennen wir *harmonisches Geradenbüschel* und die Geraden  $a$  und  $a'$  bzw.  $b'$  und  $b$  nennen wir *zugeordnete Geraden*. Ist  $ab'a'b$  ein harmonisches Geradenbüschel, so existiert eine Gerade  $g$ , welche das Geradenbüschel in vier Punkten schneidet, so dass die vier Schnittpunkte harmonisch liegen. Die Frage stellt sich nun, ob auch die Schnittpunkte einer anderen Geraden  $h$  mit dem harmonischen Geradenbüschel harmonisch liegen. Falls die Gerade  $h$  parallel zu  $g$  ist, so liegen nach dem 3. **Strahlensatz** die Schnittpunkte von  $h$  mit dem Geradenbüschel ebenfalls harmonisch. Der folgende Satz zeigt nun, dass die Schnittpunkte beliebiger Geraden mit dem harmonischen Geradenbüschel immer harmonisch liegen.

**Satz 3.2**

Schneidet eine beliebige Gerade  $h$  ein harmonisches Geradenbüschel  $ab' a'b$  durch die harmonischen Punkte  $AB' A'B$  in den vier Punkten  $C, D', C', D$ , so liegen diese Schnittpunkte harmonisch.



**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass gilt:  $\overline{CD'} : \overline{C'D'} = \overline{CD} : \overline{C'D}$ . Aus dem **3. Strahlensatz** folgt, dass sich diese Verhältnisse nicht ändern, wenn wir die Gerade  $h$  parallel verschieben. Somit genügt es den Satz zu beweisen für den Fall, dass  $h$  durch den Punkt  $A'$  geht. Wir zeichnen nun eine Parallel zur Geraden  $a$  durch  $A'$ , welche die Geraden  $b'$  und  $b$  in  $E$  und  $F$  schneidet.



Wir zeigen zuerst, dass die Strecken  $\overline{A'E}$  und  $\overline{A'F}$  gleich lang sind: Mit dem **2. Strahlensatz** [Streckungszentrum  $B$ ] gilt einerseits

$$\frac{\overline{A'E}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{BA}},$$

andererseits gilt ebenfalls mit dem **2. Strahlensatz** [Streckungszentrum  $B'$ ]

$$\frac{\overline{A'F}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'A}}.$$

Da die Punkte  $AB'A'B$  harmonisch liegen, sind die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen gleich gross und folglich auch die linken Seiten. Das heisst wir haben

$$\overline{A'E} = \overline{A'F}.$$

Wie oben erhalten wir mit dem **2. Strahlensatz** die beiden Gleichungen

$$\frac{\overline{C'E}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{DC'}}{\overline{DC}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{C'F}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{D'C'}}{\overline{D'C}},$$

und weil  $\overline{C'E} = \overline{C'F}$  folgt somit  $\overline{DC'} : \overline{DC} = \overline{D'C'} : \overline{D'C}$ , beziehungsweise:

$$\overline{CD'} : \overline{C'D'} = \overline{CD} : \overline{C'D}$$

Für andere Lagen der Geraden  $h$  muss der Beweis der Situation angepasst werden, die Beweisideen bleiben aber dieselben. **q.e.d.**

### Satz 3.3

*Vier Geraden, welche sich in einem Punkt schneiden, bilden genau dann ein harmonisches Geradenbüschel, wenn jeweils drei Geraden aus einer Parallelen zur vierten Geraden (welche nicht mit dieser zusammenfällt) zwei gleich lange Streckenabschnitte ausschneiden.*

**Beweis:** Falls das Geradenbüschel harmonisch ist, so zeigt man analog zum obigen Beweis mit Hilfe der Strahlensätze, dass aus einer Parallelen zu einer der vier Geraden durch die anderen drei zwei gleich lange Streckenabschnitte ausgeschnitten werden.

Gilt umgekehrt in der Figur vom obigen Beweis  $\overline{C'F_1} = \overline{C'F_2}$ , so wird gemäss der Grundkonstruktion der harmonischen Teilung eine Gerade  $h$  durch das Geradenbüschel harmonisch geteilt. **q.e.d.**

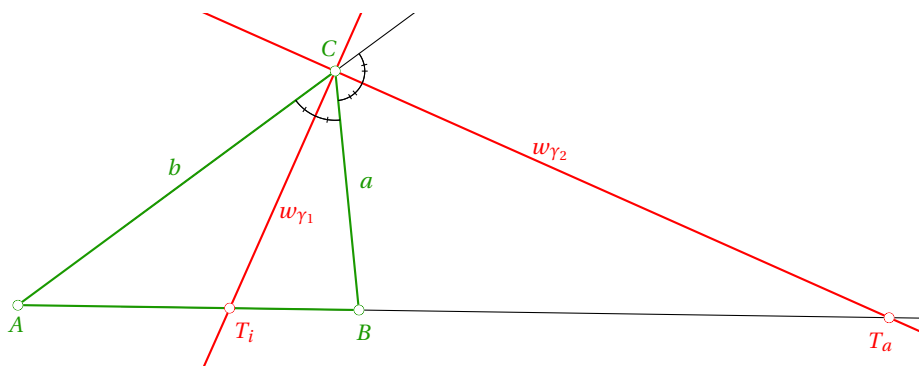
### 3.3 Harmonische Verhältnisse am Dreieck

In diesem Abschnitt betrachten wir harmonische Verhältnisse, welche im Zusammenhang mit Winkelhalbierenden auftreten.

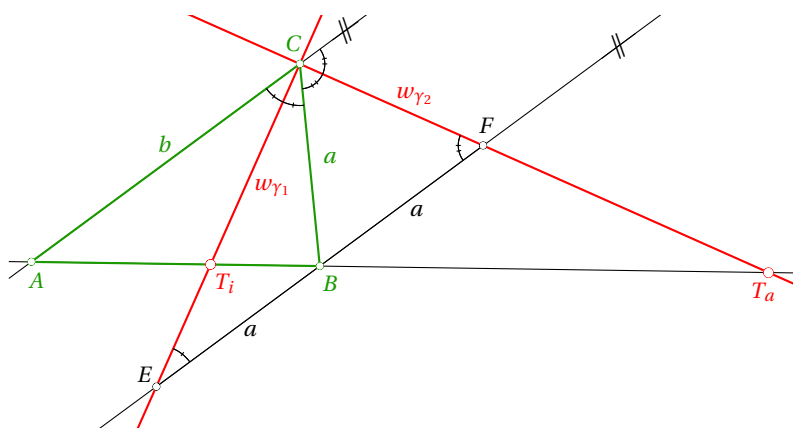
#### Satz 3.4

In einem Dreieck  $\triangle ABC$  sei  $w_{\gamma_1}$  die Winkelhalbierende des Winkels  $\gamma$  und  $w_{\gamma_2}$  die Winkelhalbierende des Ergänzungswinkels von  $\gamma$ . Sind  $T_i$  und  $T_a$  die Schnittpunkte von  $w_{\gamma_1}$  und  $w_{\gamma_2}$  mit  $\overline{AB}$ , dann sind  $T_i$  und  $T_a$  die Teilungspunkte der Strecke  $\overline{AB}$  im Verhältnis  $b : a$ , wobei  $b = \overline{AC}$  und  $a = \overline{BC}$ .

Anders ausgedrückt: In einem Dreieck teilen die Winkelhalbierenden die gegenüberliegende Seite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten (falls diese ungleich lang sind).



**Beweis:** Zuerst zeichnen wir durch  $B$  eine Parallele zu  $AC$ , welche die beiden Winkelhalbierenden in den Punkten  $E$  und  $F$  schneidet.



Da die Wechselwinkel an Parallelen gleich gross sind, sind die beiden Dreiecke  $\triangle CBE$  und  $\triangle CBF$  gleichschenkelig, und mit  $a = \overline{BE} = \overline{BC} = \overline{BF}$  folgt aus den Strahlensätzen die Behauptung. **q.e.d.**



Aus dem obigen Satz folgt unmittelbar

**Satz 3.5**

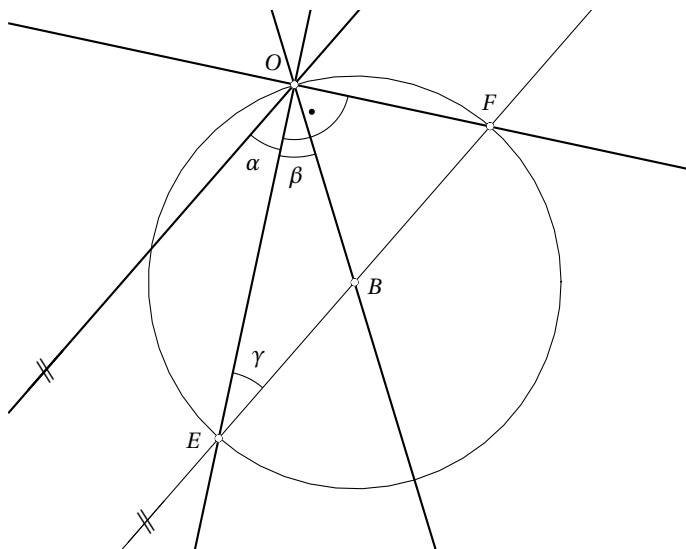
*Die beiden Winkelhalbierenden zweier sich schneidenden Geraden bilden mit diesen zusammen ein harmonisches Geradenbüschel.*

Da zwei Winkelhalbierenden eines Winkels und dessen Ergänzungswinkel immer senkrecht aufeinander stehen, erhalten wir folgende Umkehrung von **Satz 3.5**:

**Satz 3.6**

*Falls in einem harmonischen Geradenbüschel zwei zugeordnete Geraden aufeinander senkrecht stehen, halbieren diese die von den zwei anderen Geraden eingeschlossenen Winkel.*

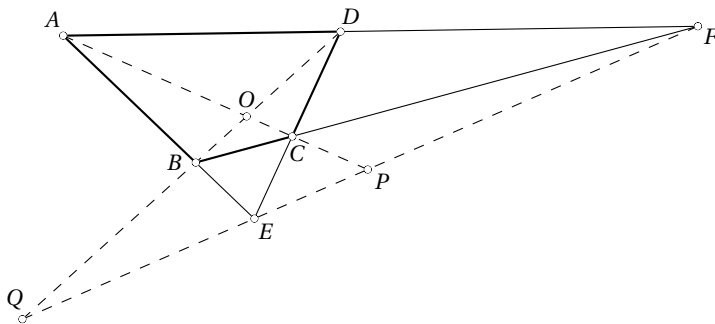
**Beweis:** Gegeben sei ein harmonisches Geradenbüschel, welches sich im Punkt  $O$  schneidet, bei dem zwei zugeordnete Geraden aufeinander senkrecht stehen. Wir wählen eine Parallele zu einer Geraden des harmonischen Geradenbüschels, welche die beiden senkrecht aufeinander stehenden Geraden in  $E$  und  $F$  schneidet; der Schnittpunkt mit der anderen Gerade sei  $B$ . Weiter zeichnen wir den Thaleskreis über  $EF$ , der nach dem **Satz von Thales 1.1** durch den Punkt  $O$  geht.



Weil das Dreieck  $\triangle EBO$  gleichschenkelig ist, gilt  $\gamma = \beta$ , und da Wechselwinkel an Parallelen gleich gross sind, gilt auch  $\gamma = \alpha$ . Somit ist  $\alpha = \beta$  und die Gerade  $OE$  halbiert den von den beiden anderen zugeordneten Geraden eingeschlossenen Winkel. **q.e.d.**

### 3.4 Harmonische Verhältnisse am Viereck

**Vollständiges Vierseit.** Schneiden sich in einem Viereck  $ABCD$  die gegenüberliegenden Seiten  $AB$  und  $CD$  in  $E$  sowie  $BC$  und  $DA$  in  $F$ , so entsteht ein *vollständiges Vierseit* mit den Ecken  $ABCDEF$ . Dieses vollständiges Vierseit hat die drei *Diagonalen*  $AC, BD, EF$ , auf denen jeweils zwei Eckpunkte und zwei Schnittpunkte mit den anderen Diagonalen liegen.

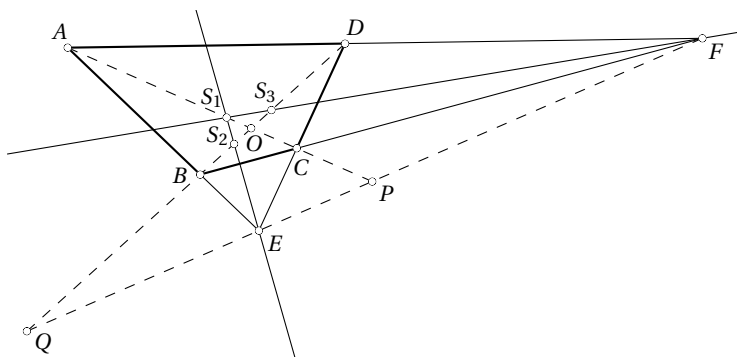


Auf jeder der drei Diagonalen liegen also vier Punkte, welche nach dem folgenden Satz harmonisch liegen:

**Satz 3.7**

*Im vollständigen Vierseit liegen die vier Punkte auf den Diagonalen jeweils harmonisch, und zwar sind jeweils die Eckpunkte und die Diagonalschnittpunkte zugeordnet.*

**Beweis:** Zuerst wählen wir den Punkt  $S_1$  auf der Geraden  $AC$  so, dass die Strecke  $\overline{AC}$  durch  $S_1$  und  $P$  harmonisch geteilt wird. Weiter seien  $S_2$  und  $S_3$  die Schnittpunkte von  $BD$  mit  $ES_1$  bzw. mit  $FS_1$ .



Weil  $AS_1CP$  harmonisch liegen, bilden die vier Geraden  $EA, ES_1, ED, EF$  ein harmonisches Geradenbüschel und nach **Satz 3.2** teilen folglich  $S_2$  und  $Q$  die Strecke  $\overline{BD}$  harmonisch.

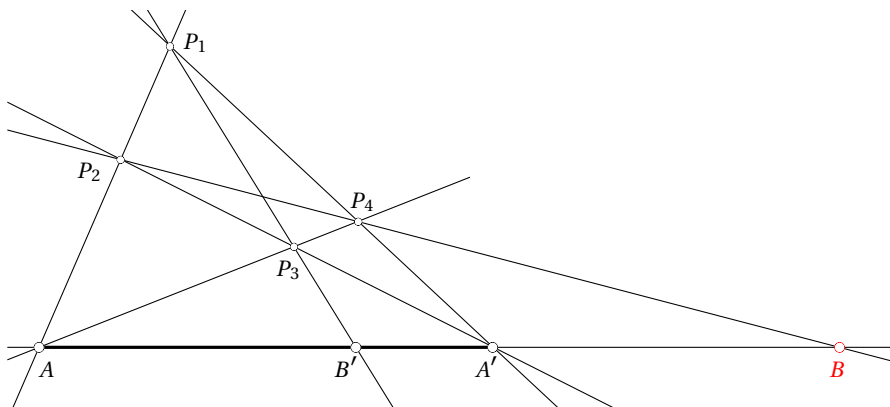
Weil auch die vier Geraden  $FA, FS_1, FB, FE$  ein harmonisches Geradenbüschel bilden, folgt wiederum mit **Satz 3.2**, dass  $S_3$  und  $Q$  die Strecke  $\overline{BD}$  ebenfalls harmonisch teilen.

Da nun der innere Teilungspunkt der Strecke  $\overline{BD}$  bei gegebenem äusseren Teilungspunkt  $Q$  eindeutig bestimmt ist (vergleiche mit der zweiten Konstruktion des vierten harmonischen Punktes), gilt  $S_2 = S_3$ , und nach Konstruktion der Punkte  $S_2$  und  $S_3$  erhalten wir  $O = S_1 = S_2 = S_3$ . Somit liegen sowohl  $AOCP$  wie auch  $QBOD$  harmonisch.

Weil nun die vier Geraden  $AQ$ ,  $AB$ ,  $AO$ ,  $AD$  ein harmonisches Geradenbündel bilden, welches von der Geraden  $EF$  geschnitten wird, liegen auch die vier Schnittpunkte  $QEPF$  harmonisch. **q.e.d.**

Der vorhergehende Satz erlaubt uns eine Konstruktion der harmonischen Teilung mit dem Lineal allein: Als Beispiel zeigen wir, wie aus drei gegebenen Punkten  $AB'A'$  der vierte harmonische Punkt  $B$  konstruiert werden kann.

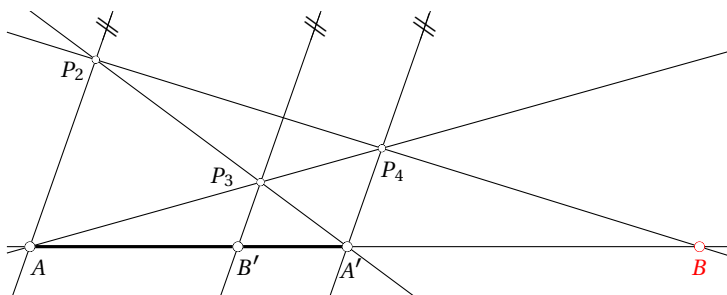
### Konstruktion eines vierten harmonischen Punktes mit dem Lineal allein



1. Wähle einen beliebigen Punkt  $P_1$  ausserhalb der Geraden  $AA'$  und auf der Strecke  $\overline{AP_1}$  einen Punkt  $P_2$ .
2. Sei  $P_3$  der Schnittpunkt von  $B'P_1$  mit  $A'P_2$  und  $P_4$  der Schnittpunkt von  $AP_3$  mit  $A'P_1$ .
3. Schliesslich sei  $B$  der Schnittpunkt von  $P_2P_4$  mit  $AA'$ .

Betrachten wir nun das vollständige Viereck  $P_1P_2P_3P_4AA'$ , so liegen nach **Satz 3.7** die Punkte  $AB'A'B$  harmonisch.

*Spezialfall.* Falls wir in der obigen Konstruktion den Punkt  $P_1$  im Unendlichen wählen sind  $AP_1$ ,  $B'P_1$ ,  $A'P_1$  parallel und wir erhalten folgende Situation:



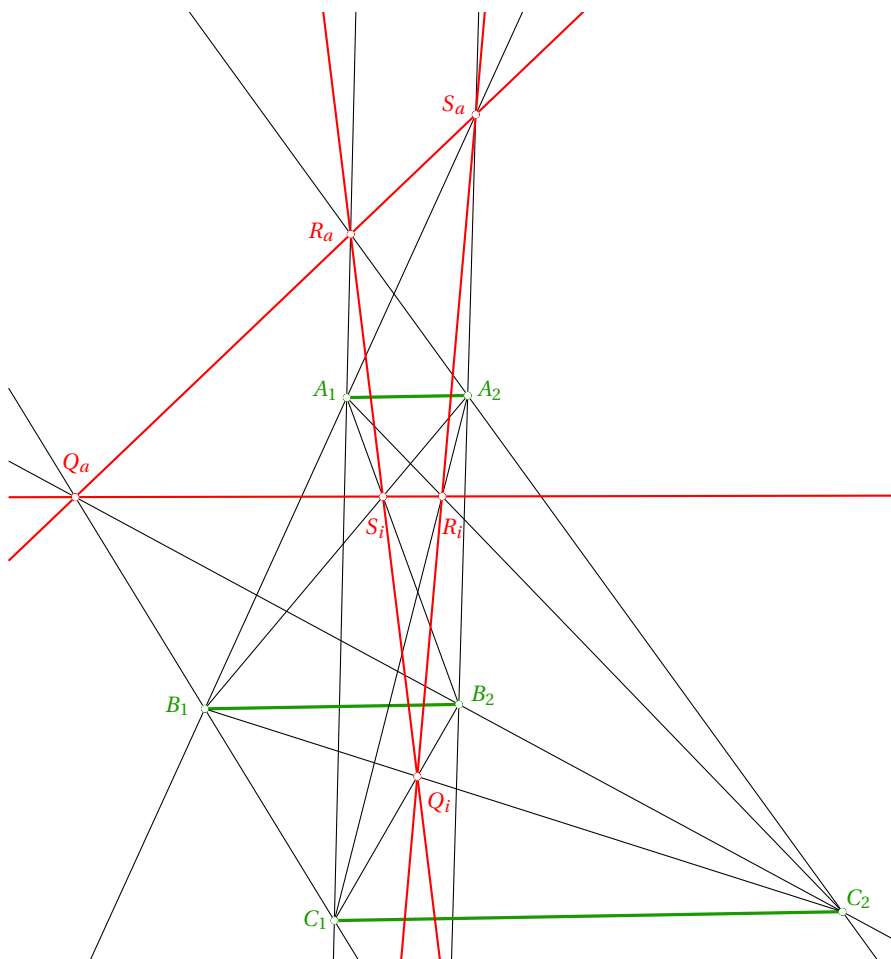
**Bemerkung:** Dieser Spezialfall, der sich auch direkt mit Hilfe der Strahlensätze begründen lässt, gibt uns eine weitere Konstruktion eines vierten harmonischen Punktes.

Als weitere Anwendung von **Satz 3.7** zeigen wir nun einen Spezialfall des **Satzes von Desargues 7.3**, welcher im Kapitel 7 dann allgemein bewiesen wird.

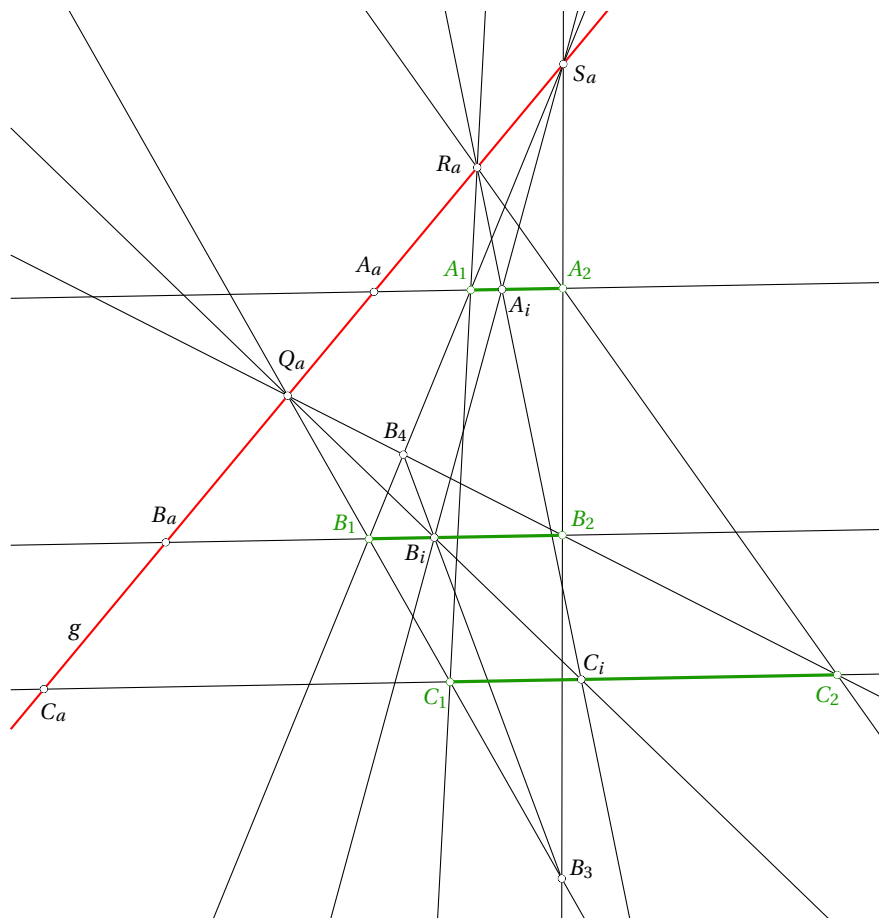
**Satz 3.8**

Gegeben seien drei verschieden lange parallele Strecken  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{B_1B_2}$ ,  $\overline{C_1C_2}$ . Schneidet man jeweils von zwei dieser Strecken die Verbindungsgeraden der Streckenendpunkte, so entstehen je ein innerer und ein äusserer Schnittpunkt. Es gilt nun:

- (a) Die drei äusseren Schnittpunkte  $Q_a, R_a, S_a$  liegen auf einer Geraden.  
 (b) Ein äusserer Schnittpunkt liegt mit jeweils zwei inneren Schnittpunkten auf einer Geraden; z.B. liegen  $Q_i, R_a, S_i$  auf einer Geraden.



**Beweis:** Wir beweisen nur Teil (a) des Satzes und überlassen den Beweis von Teil (b) dem Leser. Um zu zeigen, dass die drei äusseren Teilungspunkte  $Q_a$ ,  $R_a$ ,  $S_a$  auf einer Geraden liegen, legen wir eine Gerade  $g$  durch  $Q_a$  und  $S_a$ , und zeigen, dass  $R_a$  auf  $g$  liegt. Dazu nehmen wir an, dass das vollständige Vierseit  $B_1B_3B_2B_4Q_aS_a$  existiert (andernfalls kann ähnlich vorgegangen werden).



In diesem vollständigen Vierseit sind  $B_i$  und  $B_a$  zwei Diagonalschnittpunkte, welche nach **Satz 3.7** die Strecke  $\overline{B_1B_2}$  harmonisch teilen.

Nach dem **3. Strahlensatz**, mit den Streckungszentren  $S_a$  beziehungsweise  $Q_a$ , teilen sowohl  $A_i$  und  $A_a$  die Strecke  $\overline{A_1A_2}$ , wie auch  $C_i$  und  $C_a$  die Strecke  $\overline{C_1C_2}$ , harmonisch, und zwar im selben Verhältnis, wie  $B_i$  und  $B_a$  die Strecke  $\overline{B_1B_2}$  harmonisch teilen. Insbesondere gilt  $\overline{A_1A_i} : \overline{A_iA_2} = \overline{C_1C_i} : \overline{C_iC_2}$ , und somit muss, nach **Satz 9.4** im Anhang, die Gerade  $A_iC_i$  durch den Punkt  $R_a$  gehen.

Da die harmonischen Geradenbüschel  $R_aA_1$ ,  $R_aA_i$ ,  $R_aA_2$ ,  $R_aA_a$  und  $R_aC_1$ ,  $R_aC_i$ ,  $R_aC_2$ ,  $R_aC_a$  bis auf  $R_aA_a$  und  $R_aC_a$  übereinstimmen, muss auch diese letzte Gerade identisch sein. Da  $A_a$  und  $C_a$  auf  $g$  liegen, muss folglich auch  $R_a$  auf  $g$  liegen. **q.e.d.**

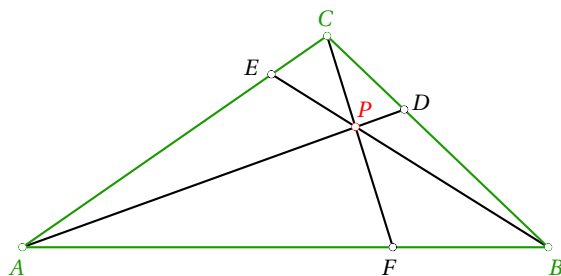
## 3.5 Sätze von Ceva und Menelaos

Zum Schluss dieses Kapitels möchten wir zwei klassische Sätze beweisen und mit Hilfe von vollständigen Vierseiten den Zusammenhang dieser beiden Sätze aufzeigen. Wir beginnen mit dem **Satz von Ceva 3.9**, welcher uns eine Bedingung liefert, wann sich drei Geraden in einem Punkt schneiden.

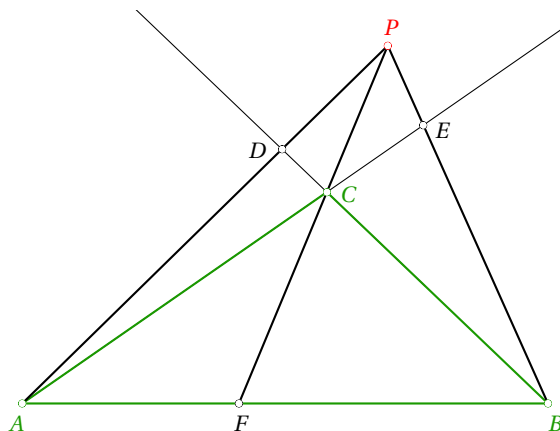
### Satz von Ceva 3.9

Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$  und drei Geraden durch die Eckpunkte des Dreiecks, welche die (verlängerten) Dreiecksseiten  $a, b, c$  in den drei Punkten  $D, E, F$  schneiden. Schneiden sich die drei Geraden  $AD, BE, CF$  in einem Punkt  $P$ , so gilt die Gleichung:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \overline{BF} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AE}$$



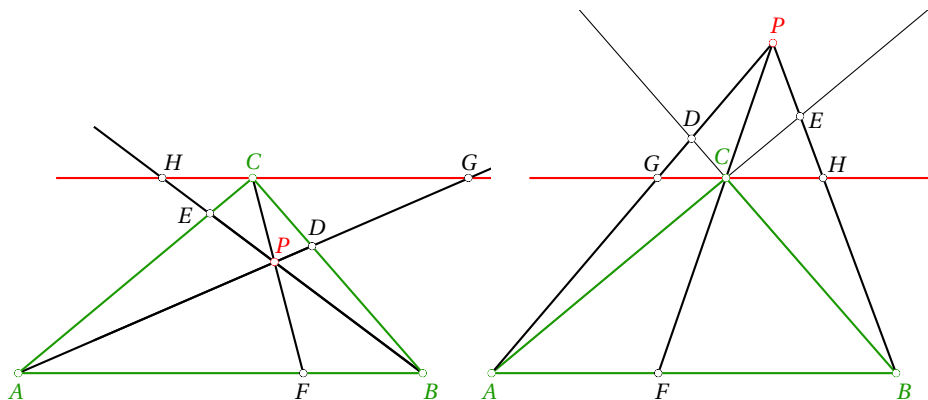
$P$  liegt innerhalb des Dreiecks



$P$  liegt ausserhalb des Dreiecks

Umgekehrt: Gilt die obige Gleichung, und liegen alle oder genau einer der Punkte  $D, E, F$  auf den Seiten  $a, b, c$  des Dreiecks, so schneiden sich die drei Geraden  $AD, BE, CF$  in einem Punkt.

**Beweis:** Zuerst nehmen wir an, dass sich die drei Geraden  $AD, BE, CF$  im Punkt  $P$  schneiden und zeichnen in beiden Figuren eine Parallele zu  $AB$  durch  $C$ . Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Geraden  $AD$  und  $BE$  seien  $G$  und  $H$ :



Mit dem 3. **Strahlensatz** [Streckungszentrum  $P$ ] erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}} \quad [P]$$

und mit dem 2. **Strahlensatz** [Streckungszentren  $D$  und  $E$ ] erhalten wir:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CG}} \quad [D]$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{AB}} \quad [E]$$

Aus den Gleichungen  $[D]$  und  $[E]$  folgt

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CG}} \cdot \frac{\overline{CH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CG}}$$

und mit Gleichung  $[P]$  folgt:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}$$

Somit haben wir:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1$$

Ist umgekehrt  $P$  der Schnittpunkt von  $AD$  und  $BE$ , so gelten immer noch die Gleichungen  $[D]$  und  $[E]$ , aber die Gleichung  $[P]$  gilt nur, wenn auch die Gerade  $CF$  durch  $P$  geht. Somit gilt die Gleichung

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1$$

nur dann, wenn sich die drei Geraden in einem Punkt schneiden.

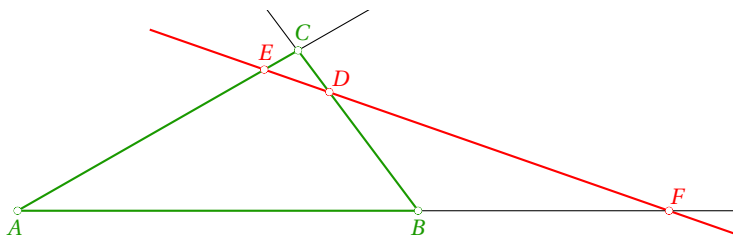
**q.e.d.**

Mit Hilfe von vollständigen Vierseiten lässt sich der **Satz von Ceva 3.9** auf eine auf den ersten Blick völlig andere Situation übertragen:

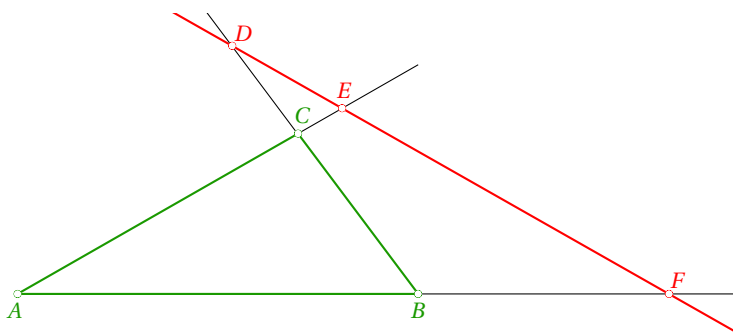
**Satz von Menelaos 3.10**

Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$  sowie drei Punkte  $D, E, F$  welche auf den (verlängerten) Dreiecksseiten  $a, b, c$  liegen. Liegen die drei Punkte  $D, E, F$  auf einer Geraden, so gilt die Gleichung:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \overline{BF} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AE}$$



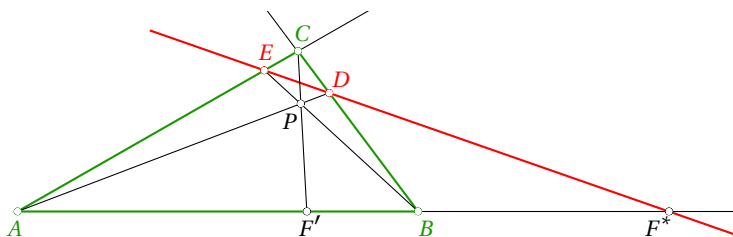
Das  $\triangle ABC$  wird von der Geraden geschnitten.



Die Gerade schneidet das Dreieck  $\triangle ABC$  nicht.

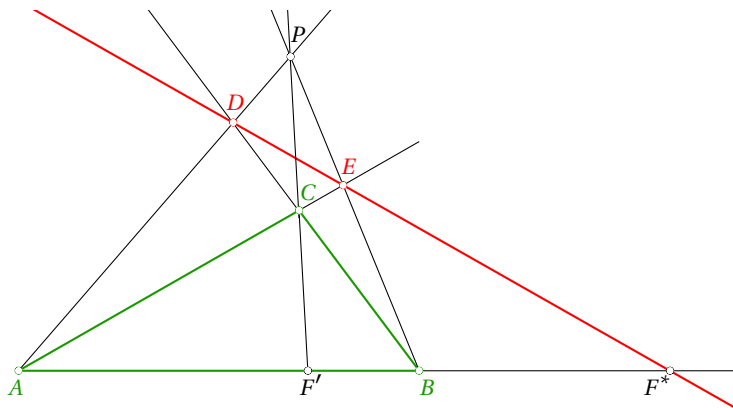
Umgekehrt: Gilt die obige Gleichung, und liegen keiner oder genau zwei der Punkte  $D, E, F$  auf den Seiten  $a, b, c$  des Dreiecks, so liegen die drei Punkte  $D, E, F$  auf einer Geraden.

**Beweis:** Von den drei Punkten  $D, E, F$  betrachten wir zunächst nur die beiden Punkte  $D$  und  $E$ , und wir nehmen an, der Schnittpunkt  $F^*$  der Geraden  $DE$  und  $AB$  existiere. Weiter sei  $P$  der Schnittpunkt der Geraden  $AD$  und  $BE$ , und  $F'$  sei der Schnittpunkt der Geraden  $CP$  und  $AB$ :



Das  $\triangle ABC$  wird von der Geraden  $DE$  geschnitten.





Die Gerade  $DE$  schneidet das Dreieck  $\triangle ABC$  nicht.

Da  $CEPDAB$  ein vollständiges Vierseit ist, liegen  $AF'BF^*$  harmonisch und es gilt:

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{BF'}} = \frac{\overline{AF^*}}{\overline{BF^*}} \tag{♦}$$

Weil sich nach Konstruktion die drei Geraden  $AD, BE, CF'$  in  $P$  schneiden, gilt mit dem **Satz von Ceva 3.9**

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{BF'}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1, \tag{♣}$$

und mit der Gleichung (♦) erhalten wir:

$$\frac{\overline{AF^*}}{\overline{BF^*}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1 \tag{♠}$$

Liegen nun  $D, E, F$  auf einer Geraden, so ist  $F = F^*$  und mit (♠) gilt:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1 \tag{♣}$$

Umgekehrt: Gilt die Gleichung (♣), so erhalten wir mit (♣) die Beziehung

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{BF'}}.$$

Somit liegen  $AF'BF$  harmonisch, und weil auch  $AF'BF^*$  harmonisch liegen, erhalten wir wieder  $F = F^*$ ; das heisst,  $D, E, F$  liegen auf einer Geraden. **q.e.d.**

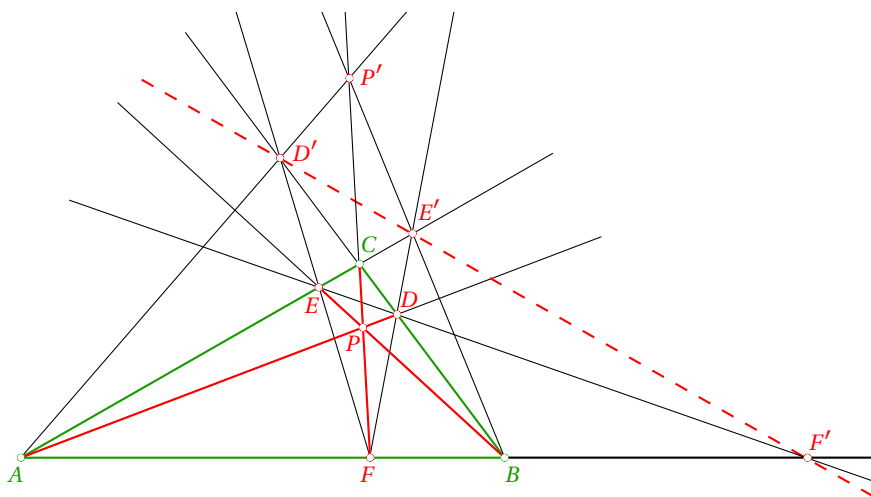
**Bemerkung:** Der Beweis vom **Satz von Menelaos** zeigt, dass sich die Sätze von Ceva und Menelaos nur dadurch unterscheiden, ob eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Punkten aus  $D, E, F$  ausserhalb des Dreiecks  $\triangle ABC$  liegen: Falls kein Punkt oder zwei Punkte ausserhalb des Dreiecks  $\triangle ABC$  liegen, erhalten wir den **Satz von Ceva**, andernfalls den **Satz von Menelaos**.

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir einen weiteren Spezialfall des **Satzes von Desargues 7.3**, welcher im Kapitel 7 allgemein bewiesen wird.

**Satz 3.11**

In einem Dreieck  $\triangle ABC$  seien  $D, E, F$  beliebige innere Teilungspunkte der Seiten  $a, b, c$  und  $D', E', F'$  seien die entsprechenden äusseren Teilungspunkte. Dann schneiden sich die Geraden  $AD, BE, CF$  genau dann in einem Punkt, wenn die Punkte  $D', E', F'$  auf einer Geraden liegen.

Weiter gilt: Wenn sich die Geraden  $AD, BE, FC$  in einem Punkt schneiden, so schneiden sich auch die Geraden  $AD', BE', CF$  in einem Punkt und die Punkte  $D, E, F'$  liegen auf einer Geraden.

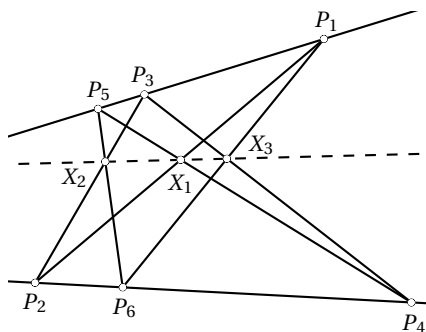


**Bemerkung:** Um den Zusammenhang mit dem **Satz von Desargues 7.3** zu sehen, betrachten wir die beiden Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle DEF$ . Der **Satz von Desargues** besagt nun, dass wenn sich die Geraden  $AD, BE, FC$  durch entsprechende Ecken der Dreiecke in einem Punkt schneiden, so liegen die Schnittpunkte  $D', E', F'$  der entsprechenden Dreiecksseiten auf einer Geraden, was mit **Satz 3.11** tatsächlich der Fall ist. Da die Ecken des Dreiecks  $\triangle DEF$  auf den Seiten des Dreiecks  $\triangle ABC$  liegen, erhalten wir mit **Satz 3.11** bloss einen Spezialfall des **Satzes von Desargues**.

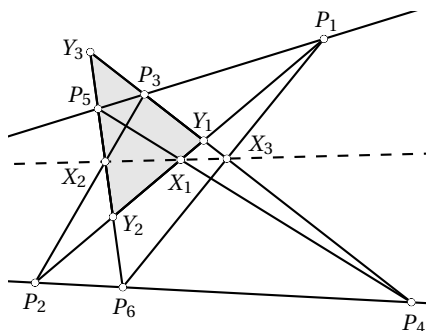
## Weitere Resultate und Aufgaben

### Satz 3.12 (Satz von Pappos)

Sei  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  ein Sechseck so, dass die Punkte  $P_1, P_3, P_5$  auf einer Geraden und  $P_2, P_4, P_6$  auf einer anderen Geraden liegen. Dann liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten, so sie existieren, also die Punkte  $X_1 = P_1P_2 \cap P_4P_5$ ,  $X_2 = P_2P_3 \cap P_5P_6$ ,  $X_3 = P_3P_4 \cap P_6P_1$ , auf einer Geraden, der sogenannten Pappos-Geraden.



**Beweis:** Der Beweis beruht auf mehrfacher Anwendung des **Satzes von Menelaos 3.10**: Dazu betrachten wir das Dreieck  $\triangle Y_1Y_2Y_3$ , das von den Transversalen  $X_1P_5P_4$ ,  $P_1P_6X_3$ ,  $P_2X_2P_3$ ,  $P_1P_5P_3$  und  $P_2P_6P_4$  geschnitten wird.



Wir erhalten nacheinander

$$\frac{\overline{Y_1X_1}}{\overline{Y_2X_1}} \cdot \frac{\overline{Y_2P_5}}{\overline{Y_3P_5}} \cdot \frac{\overline{Y_3P_4}}{\overline{Y_1P_4}} = 1, \quad \frac{\overline{Y_1P_1}}{\overline{Y_2P_1}} \cdot \frac{\overline{Y_2P_6}}{\overline{Y_3P_6}} \cdot \frac{\overline{Y_3X_3}}{\overline{Y_1X_3}} = 1, \quad \frac{\overline{Y_1P_2}}{\overline{Y_2P_2}} \cdot \frac{\overline{Y_2X_2}}{\overline{Y_3X_2}} \cdot \frac{\overline{Y_3P_3}}{\overline{Y_1P_3}} = 1,$$

$$\frac{\overline{Y_1P_1}}{\overline{Y_2P_1}} \cdot \frac{\overline{Y_2P_5}}{\overline{Y_3P_5}} \cdot \frac{\overline{Y_3P_3}}{\overline{Y_1P_3}} = 1, \quad \frac{\overline{Y_1P_2}}{\overline{Y_2P_2}} \cdot \frac{\overline{Y_2P_6}}{\overline{Y_3P_6}} \cdot \frac{\overline{Y_3P_4}}{\overline{Y_1P_4}} = 1.$$

Dividiert man das Produkt der ersten drei Gleichungen durch das Produkt der letzten beiden ergibt sich nach erbaulichem Kürzen

$$\frac{\overline{Y_1X_1}}{\overline{Y_2X_1}} \cdot \frac{\overline{Y_2X_2}}{\overline{Y_3X_2}} \cdot \frac{\overline{Y_3X_3}}{\overline{Y_1X_3}} = 1.$$

Dies bedeutet, nach dem Satz des Menelaos, dass die Punkte  $X_1, X_2, X_3$  kollinear sind.

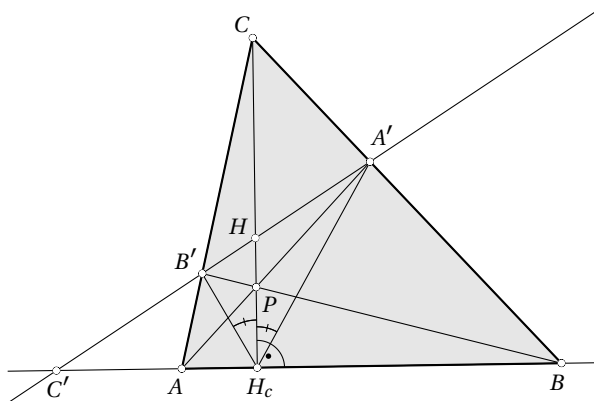
**q.e.d.**

**Bemerkung:** Wenn man die zwei Trägergeraden des Sechsecks als entarteten Kegelschnitt betrachtet, so kann man den **Satz von Pappos** als entartete Version des **Satzes von Pascal 7.11** auffassen. Auch hier lassen sich wieder Spezialfälle formulieren, wenn Gegenseiten des Sechsecks parallel sind.

**Satz 3.13 (Satz von Blanchet)**

Gegeben ist ein beliebiger Punkt  $P$  auf der Höhe eines spitzwinkligen Dreiecks  $\triangle ABC$ . Die Eckpunkte des Dreiecks, welche nicht auf dieser Höhe liegen werden mit  $P$  verbunden. Dann bilden die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit je der gegenüberliegenden Dreiecksseite im Höhenfusspunkt dieselben Winkel mit der Höhe.

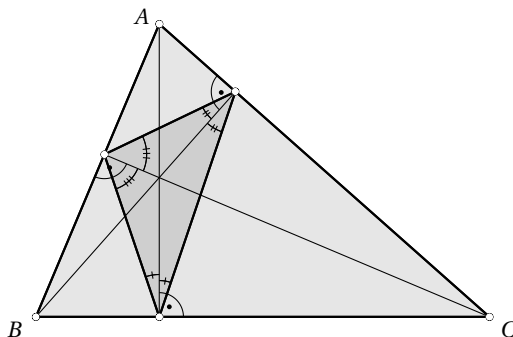
**Beweis:** Da  $CB'PA'AB$  ein vollständiges Vierseit bilden, liegen nach **Satz 3.7** die Punkte  $C'B'HA'$  harmonisch. Also ist  $H_cC', H_cB', H_cH, H_cA'$  ein harmonisches Geradenbüschel. Da  $H_cC'$  und  $H_cH$  senkrecht stehen, folgt die Behauptung aus **Satz 3.6**.



q.e.d.

**Satz 3.14 (Satz von Schwarz)**

Das Höhenfusspunktendreieck in einem spitzwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  ist eine geschlossene Billardbahn in  $\triangle ABC$ .



In diesem Satz betrachtet man das Dreieck  $\triangle ABC$  als Billardtisch und nimmt für eine Billardkugel das Reflexionsgesetz *Einfallswinkel = Ausfallswinkel* an.

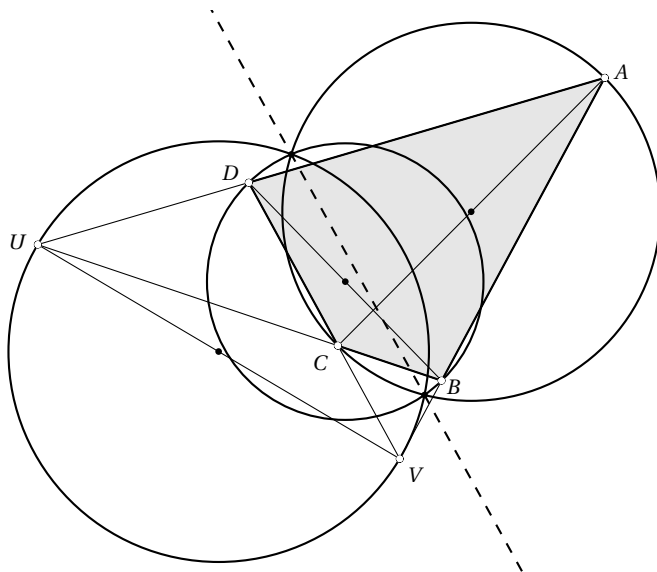
**Beweis:** Der Satz von Schwarz folgt sofort aus dem Satz von Blanchet, wenn man für  $P$  den Höhenschnittpunkt einsetzt. **q.e.d.**

**Bemerkung:** Statt eine Billardkugel, kann man auch einen Lichtstrahl im Dreieck spiegeln. Im Englischen heisst deshalb das Höhenfusspunktdreieck suggestiverweise *orthoptic triangle*.

**Satz 3.15 (Satz von Bodenmiller-Steiner)**

Die Thaleskreise über den drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits haben eine gemeinsame Chordale  $c$ . Die Höhenschnittpunkte der vier Dreiecke, welche aus jeweils drei der vier Seiten des vollständigen Vierseits gebildet werden können, liegen alle auf  $c$ .

**Beweis:** Die Ecken des vollständigen Vierseits seien mit  $A, B, C, D, U, V$  bezeichnet (siehe Figur). Die Diagonalen sind  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$  und  $\overline{UV}$ . Jeweils drei Seiten des vollständigen Vierseits bilden ein Dreieck mit den drei Diagonalen als Transversalen durch je eine Ecke, nämlich  $\triangle ABU$ ,  $\triangle ADV$ ,  $\triangle BCV$ ,  $\triangle CDU$ . Gemäss **Satz 2.12** gilt: In jedem dieser vier Dreiecke ist der Höhenschnittpunkt der Chordalpunkt der drei Thaleskreise über den Diagonalen  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$  und  $\overline{UV}$ . Das ist aber nur möglich, wenn die Chordalen der drei Kreise zusammenfallen und die vier Höhenschnittpunkte auf dieser gemeinsamen Chordalen liegen.



**q.e.d.**

**Satz 3.16 (Satz von Gauss-Newton)**

Die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen auf einer Geraden.

**Beweis:** Dies ist ein einfaches Korollar aus dem **Satz von Bodenmiller-Steiner 3.15**: Diese drei Mittelpunkte sind ja gerade die Zentren der drei Thaleskreise über den Diagonalen des vollständigen Vierseits. **q.e.d.**

## Aufgaben

3.1. (a) Zeige, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe auf die Hypotenuse diese im Verhältnis der Kathetenquadrate teilt.

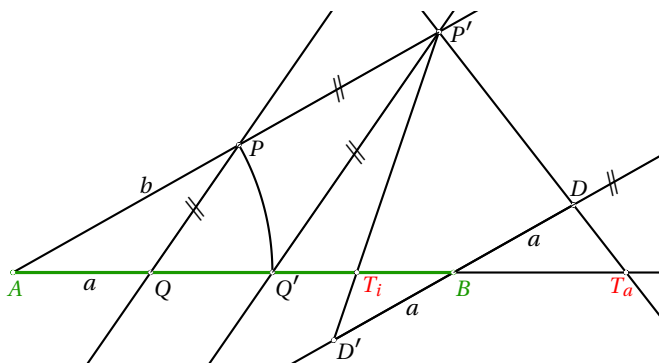
(b) Beweise daraus den folgenden Satz:

Gegeben sei ein harmonisches Geradenbüschel  $ab'a'b$  mit einem gemeinsamen Schnittpunkt  $O$ , bei dem sich  $a$  und  $a'$  rechtwinklig schneiden. Schneidet  $b'$  eine weitere Gerade rechtwinklig, welche ihrerseits das Geradenbüschel in den Punkten  $A, B', A', B$  schneidet, so gilt:

$$\overline{AB'} : \overline{A'B'} = \overline{OA}^2 : \overline{OA'}^2 = \overline{AB} : \overline{A'B}$$

(c) Gegeben seien zwei Strecken der Längen  $b$  und  $a$ , wobei  $b > a$ . Eine beliebige Strecke  $\overline{AB}$  soll harmonisch im Verhältnis  $b^2 : a^2$  geteilt werden.

### Zur Konstruktion der Teilungspunkte



1. Von  $A$  aus zeichnen wir zum Strahl  $AB$  einen weiteren Strahl und tragen von  $A$  aus auf jedem Strahl eine Strecke der Länge  $b$  ab. Die Endpunkte dieser Strecken seien  $Q'$  (auf dem Strahl  $AB$ ) und  $P$ .
2. Auf dem Strahl  $AB$  tragen wir von  $A$  aus eine Strecke der Länge  $a$  ab. Der Endpunkt dieser Strecke sei  $Q$ .
3. Wir zeichnen die Gerade durch  $P$  und  $Q$ .
4. Durch den Punkt  $Q'$  zeichnen wir eine Parallele zur Geraden  $PQ$ . Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit dem Strahl  $AP$  sei  $P'$ .
5. Durch den Punkt  $B$  zeichnen wir eine Parallele zum Strahl  $AP$ , und tragen auf dieser Parallelen von  $B$  aus in beide Richtungen eine Strecke der Länge  $a$  ab. Die Endpunkte dieser Strecken seien  $D$  und  $D'$ .
6. Wir zeichnen die Gerade durch  $P'$  und  $D$ . Der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Strahl  $AB$  sei  $T_a$ .
7. Der Schnittpunkt der Strecke  $\overline{P'D'}$  mit dem Strahl  $AB$  sei  $T_i$ .

Zeige, dass in der obigen Figur gilt:

$$\overline{AT_a} : \overline{BT_a} = b^2 : a^2$$

3.2. (a) Gegeben ist eine Strecke  $\overline{AB}$  und eine dazu parallele Gerade. Konstruiere ohne Zirkel den Mittelpunkt der Strecke.

(b) Gegeben sind zwei parallele Geraden und ein Punkt  $P$ . Konstruiere ohne Zirkel die Parallele durch  $P$ .

**3.3.** Beweise den **Satz von Pascal für Kreise 1.4** mit Hilfe des **Satzes von Carnot 2.13** und des **Satzes von Menelaos 3.10**.

**Hinweis:** Seien  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$  sechs Punkte auf einem Kreis (z.B. wie in der Figur zum **Satz von Carnot**) und sei  $\triangle ABC$  das Dreieck gebildet aus  $X_1 Y_1, X_2 Y_2, X_3 Y_3$ . Weiter seien  $P, Q, R$  die Schnittpunkte der Geraden  $X_1 Y_1$  mit  $Y_2 Y_3$ ,  $X_2 Y_2$  mit  $X_1 X_3$ ,  $X_3 Y_3$  mit  $X_2 Y_1$ . Aus dem **Satz von Carnot** und dem **Satz von Menelaos** folgt nun, dass die drei Punkte  $P, Q, R$  auf einer Geraden liegen.

**3.4. (a)** Es seien vier Punkte  $A, X', A', X$  gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Gesucht ist ein harmonisches Geradenbüschel, so dass auf jeder Geraden dieses Büschels genau einer dieser vier Punkte liegt.

**(b)** Es seien vier Geraden  $a, a', x, x'$  gegeben, von denen keine drei sich in einem Punkt schneiden. Gesucht ist eine Gerade, so dass die vier Schnittpunkte mit den gegebenen Geraden harmonisch liegen.

**Hinweis zu (a):** Wähle einen von  $A$  und  $A'$  verschiedenen Punkt  $B'$  auf der Geraden  $AA'$  und bestimme den vierten harmonischen Punkt  $B$ . Ist  $O$  der Schnittpunkt der Geraden  $B'X'$  und  $BX$ , so ist  $OA, OX', OA', OX$  ein Geradenbüschel mit den gewünschten Eigenschaften.

**Bemerkung:** Die beiden Aufgaben stammen aus Thomae [42, 30<sup>a,b</sup>].

## Anmerkungen

*Zum Begriff der harmonischen Verhältnisse* (aus Adams [2, p. 1 f.]): Laut Adams definiert PHILIPPE DE LA HIRE (1640–1718) in [29] die harmonische Teilung wie folgt: *Eine Strecke heisst harmonisch geteilt, wenn die ganze Strecke zu einem äusseren Abschnitt sich verhält, wie der andere äussere Abschnitt zum mittleren*. Diese Proportion heisst deshalb *harmonisch* (und wurde schon im Altertum so genannt), weil sie die Grundlage der Harmonie bildet: Nimmt man zum Beispiel drei Saiten von gleicher Dicke und Spannung, deren Längen sich wie 3 : 4 : 6 verhalten, so geben diese durch ihre Schwingungen die drei Haupttöne Oktave (3 : 6), Quinte (4 : 6), Quarte (3 : 4). Sind andererseits vier Punkte  $A, B', A', B$  auf einer Geraden so gewählt, dass gilt  $\overline{AB'} = 3$ ,  $\overline{AA'} = 4$ ,  $\overline{AB} = 6$ , so liegen  $AB' A' B$  harmonisch.

*Harmonische Geradenbüschel* (aus Tropfke [44, p. 235 f.]): Die Strahlen, welche von einem Zentrum aus zu harmonischen Punkten gezogen werden, nannte PHILIPPE DE LA HIRE *Harmonikalen*. Seit CHARLES JULIEN BRIANCHON (1783–1864) heissen sie *faisceau harmonique*, also *harmonisches Strahlenbündel* und das deutsche Wort *Strahlenbüschel* stammt von JAKOB STEINER (1832). Da wir nicht eigentlich Strahlen sondern Geraden betrachten, haben wir, in Anlehnung an STEINER, das Wort *Geradenbüschel* gewählt. Der wichtige **Satz 3.2** ist bereits bei PAPPUS (im 4. Jahrhundert n. Chr.) unter den Zusätzen zu EUKLIDS *Porismen* zu finden. Der allgemeine Satz stand wahrscheinlich in den verloren gegangenen *Porismen* EUKLIDS. Man vermutet, dass, auf diesen Satz gestützt, HIPPARCH VON NICÄA (ca. 190–120 v. Chr.) den entsprechenden Satz für die Kugel ableitete und damit eine sphärische Trigonometrie begründete. Der **Satz 3.4** war bereits APOLLONIUS VON PERGE (ca. 262–190 v. Chr.) bekannt und wurde wahrscheinlich auch von ihm, in einem seiner leider nicht erhaltenen Bücher, bewiesen.

*Die Sätze von Menelaos und Ceva:* MENELAOS (ca. 45–110 v. Chr.) machte im Jahr 98 n. Chr. in Rom astronomische Beobachtungen. Er hat unter anderem ein Werk unter dem Titel *Sphaerika* geschrieben, welches verschiedene Sätze über sphärische Dreiecke enthält. Das dritte

Buch dieses Werks beginnt mit dem berühmten *Transversalensatz* der seinen Namen trägt (siehe van der Waerden [45, p. 452]). Der **Satz von Menelaos 3.10** wurde 1678 von GIOVANNI CEVA (1647–1734) in seinem Werk *De lineis rectis* mit Hilfe von Schwerpunktsbestimmungen von neuem bewiesen (siehe TROPFKE [44, p. 230]). Der **Satz von Ceva 3.9** wurde lange Zeit JOHANN BERNOULLI I (1667–1748) zugesprochen, MICHEL CHASLES (1793–1880) hat jedoch entdeckt, dass dieser Satz bereits ein Jahrhundert früher von CEVA bewiesen wurde (siehe Ostermann und Wanner [32, p. 88]). Dieser hat den Beweis seines Satzes, wie schon den **Satz von Menelaos 3.10**, mit Hilfe von Schwerpunktsuntersuchungen durchgeführt (siehe TROPFKE [44, p. 230]).

*Zum vollständigen Vierseit:* Der **Satz 3.7** über harmonische Verhältnisse am Vierseit war bereits PAPPUS bekannt. Allerdings geriet er in Vergessenheit und taucht erst im 17. Jh. in den Schriften von GÉRARD DESARGUES (1591–1661) wieder auf, aus denen PHILIPPE DE LA HIRE eine Konstruktion des vierten harmonischen Punktes mit dem Lineal alleine herleitete (siehe TROPFKE [44, p. 237]).

*Zum Satz von Schwarz:* Der klassische Beweis des **Satzes von Schwarz 3.14** von HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843–1921) kommt übrigens ohne harmonische Punkte aus. Er beruht auf der wunderschönen Idee, dass eine geschlossene Billardbahn im Dreieck  $\triangle ABC$  dasjenige Dreieck mit kürzestem Umfang ist, welches  $\triangle ABC$  einbeschrieben werden kann (siehe [36, Band II, Seite 344]). Ergänzend sei hier noch bemerkt, dass bis heute die Frage, ob in jedem Dreieck eine geschlossene Billardbahn existiert, ungelöst ist (siehe [17]).

*Zum Satz von Bodenmiller-Steiner:* Der erste Teil des **Satzes von Bodenmiller-Steiner 3.15** findet sich zum ersten Mal im Buch [16, Seite 138] über Kugelgeometrie, wo zur Urheberschaft des Satzes folgendes vermerkt ist:

Anmerkung. Der planimetrische Satz, daß sich die drei Kreise zweimal in Einem Punkte schneiden, welche über den drei Diagonalen eines ebenen Vierecks, als Durchmesser, beschrieben werden, ist schon sehr bemerkenswerth und mir von Herrn Bodenmiller hier selbst, der ihn gefunden hat, mündlich mitgetheilt worden. Es findet sich in den mir bekannten, vom Kreife handelnden, Werken nicht.

Über Herrn BODENMILLER ist ansonsten nichts bekannt, nicht einmal sein Vorname. Der zweite Teil des Satzes über die Lage der Höhenschnittpunkte im vollständigen Vierseit wurde von JAKOB STEINER zusammen mit weiteren Eigenschaften des vollständigen Vierseits in den berühmten *Annales de Gergonne* 1827/28 als Aufgabe publiziert.

*Zum Satz von Gauss-Newton:* ISAAC NEWTON (1642/3–1727, nach gregorianischem Kalender wurde Newton am 4. Januar 1643 geboren; nach julianischem Kalender, der bis 1752 in England gebräuchlich war, kam Newton am Weihnachtstag des Jahres 1642 zur Welt) beweist den **Satz von Gauss-Newton 3.16** in seiner *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Tatsächlich zeigt er sogar noch etwas mehr, nämlich dass der Mittelpunkt einer Ellipse oder einer Hyperbel, welche die Seiten eines Vierecks berührt, auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Diagonalen des Vierecks liegt. CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) zeigte 1810, dass die Mittelpunkte aller Ellipsen, die einem vollständigen Vierseit einbeschrieben werden können, auf einer Geraden liegen. Lässt man die kurzen Achsen dieser Ellipsen gegen Null schrumpfen, so degenerieren sie zu den Diagonalen des Vierseits und man erhält auf diese Weise wieder die Aussage über die kollineare Lage von deren Mittelpunkten.



# 4 Harmonische Punkte am Kreis

---

## Übersicht

4.1 Apolloniuskreise .....	65
4.2 Pol und Polare .....	70
4.3 Harmonische Punkte und Polaren .....	72
4.4 Satz von Brianchon für Kreise .....	76
Weitere Resultate und Aufgaben .....	77
Anmerkungen .....	80

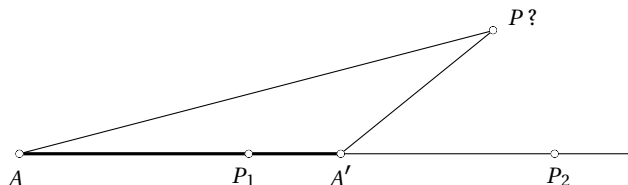
---

In diesem Kapitel untersuchen wir harmonische Punkte in Bezug auf Kreise. Dabei wird der Begriff des *Apolloniuskreises* von zentraler Bedeutung sein.

## 4.1 Apolloniuskreise

Im vorhergehenden Kapitel haben wir aus den inneren und äusseren Teilungspunkten einer Strecke den Begriff der harmonischen Punkte abgeleitet. Bevor wir harmonische Punkte am Kreis untersuchen, kehren wir kurz zu den inneren und äusseren Teilungspunkten einer Strecke zurück.

Wir haben gesehen, dass es zu einer Strecke  $\overline{AA'}$  und zu einem Verhältnis  $m : n$  im allgemeinen zwei Punkte  $P$  auf der Geraden  $AA'$  gibt, für die  $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{A'P} = m : n$  gilt. Die Frage stellt sich nun, ob es neben diesen Punkten in der Ebene noch weitere Punkte gibt, welche dieselbe Gleichung erfüllen.

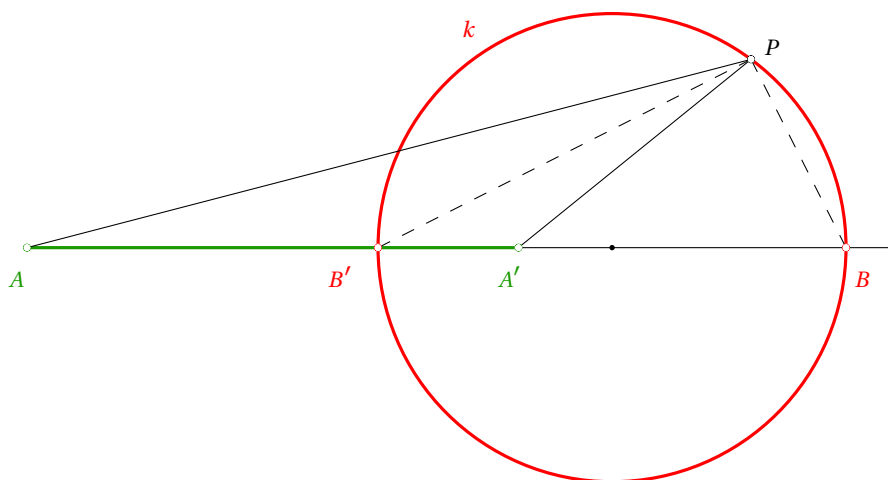


Wie Apollonius gezeigt hat, ist das tatsächlich der Fall. Mehr noch, Apollonius konnte zeigen, dass die Punkte, welche die obige Gleichung erfüllen, einen Kreis bilden, den sogenannten Apolloniuskreis:

**Satz von Apollonius 4.1**

Gegeben seien zwei Punkte  $A$  und  $A'$  sowie ein Verhältnis  $m : n$ , wobei  $m \neq n$ . Weiter seien  $B'$  und  $B$  auf der Geraden  $AA'$  so gewählt, dass sie die Strecke  $\overline{AA'}$  harmonisch im Verhältnis  $m : n$  teilen. Alle Punkte  $P$  für die  $\overline{AP} : \overline{A'P} = m : n$  gilt, liegen dann auf dem Thaleskreis  $k$  über  $\overline{B'B}$ , und umgekehrt erfüllen alle Punkte auf diesem Thaleskreis die obige Gleichung.

Von allen Punkten  $P$  auf dem Kreis  $k$  verschieden von  $B$  und  $B'$ , und nur von diesen Punkten  $P$ , erscheinen die Strecken  $AB'$  und  $B'A'$  unter gleichem Winkel. Das heisst,  $PB'$  ist die innere Winkelhalbierende des Winkels  $\sphericalangle APA'$  und  $PB$  ist die äussere Winkelhalbierende.



**Beweis:** Die Teilungspunkte  $B'$  und  $B$  sind die einzigen Punkte  $P$  auf der Geraden  $AA'$ , welche  $\overline{AP} : \overline{A'P} = m : n$  erfüllen.

Nun betrachten wir einen beliebigen Punkt  $P$ , welcher nicht auf der Geraden  $AA'$  liegt und welcher die Bedingung  $\overline{AP} : \overline{A'P} = m : n$  erfüllt. Nach **Satz 3.4** müssen dann  $B'P$  und  $BP$  die Winkelhalbierenden des Winkels  $\sphericalangle APA'$  sein. Da innere und äussere Winkelhalbierende senkrecht aufeinander stehen, liegt  $P$  somit auf dem Thaleskreis  $k$  über  $\overline{B'B}$ .

Für die Umkehrung betrachten wir das harmonische Geradenbüschel  $AP, B'P, A'P, BP$ . Liegt  $P$  auf dem Thaleskreis  $k$ , so stehen  $B'P$  und  $BP$  senkrecht aufeinander und sind nach **Satz 3.6** Winkelhalbierende des Winkels  $\sphericalangle APA'$ . Mit **Satz 3.4** folgt somit  $\overline{AP} : \overline{A'P} = \overline{AB'} : \overline{A'B'} = m : n$ . **q.e.d.**

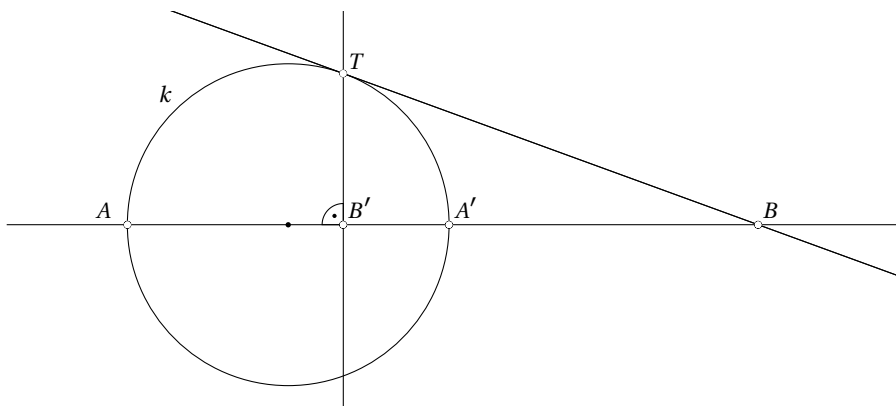
Der **Satz von Apollonius** führt uns zu folgender Definition:

**Apolloniuskreis.** Sind  $AB'A'B$  harmonische Punkte, so heisst der Thaleskreis über  $\overline{B'B}$  *Apolloniuskreis* zu den Punkten  $A$  und  $A'$  bezüglich  $B$  und  $B'$ , und entsprechend heisst der Thaleskreis über  $\overline{AA'}$  *Apolloniuskreis* zu den Punkten  $B'$  und  $B$  bezüglich  $A$  und  $A'$ . Diese beiden Apolloniuskreise nennen wir *zugeordnete Apolloniuskreise*.

Bevor wir Apolloniuskreise weiter untersuchen, beweisen wir einen Satz von ARCHIMEDES über harmonische Punkte.

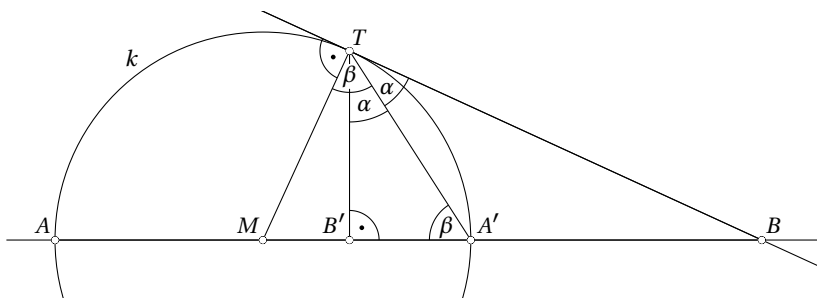
**Satz von Archimedes (über harmonische Punkte) 4.2**

Sei  $k$  ein Kreis mit Durchmesser  $AA'$  und sei  $B$  ein Punkt auf der Geraden  $AA'$  welcher nicht auf  $\overline{AA'}$  liegt. Sei weiter  $T$  ein Berührungspunkt einer Tangente von  $B$  an den Kreis  $k$  und sei  $B'$  der Fusspunkt des Lotes von  $T$  auf  $AA'$ , dann liegen  $AB' A'B$  harmonisch.



Umgekehrt: Liegen  $AB' A'B$  harmonisch und ist  $T$  ein Schnittpunkt der Senkrechten durch  $B'$  zu  $AA'$  mit dem Thaleskreis  $k$  über  $\overline{AA'}$ , dann ist  $TB$  eine Tangente an  $k$ .

**Beweis:** Wir wollen zeigen, dass die Punkte  $AB' A'B$  harmonisch liegen.  $k$  ist der Thaleskreis über  $\overline{AA'}$ . Wegen Satz 3.4 genügt es deshalb zu verifizieren, dass  $TA'$  die Winkelhalbierende des Winkels  $\sphericalangle B'TB$  ist. Da das Dreieck  $\triangle TMA'$  gleichschenkelig ist, sind seine Basiswinkel  $\beta$  gleich gross.  $BT$  ist eine Tangente an  $k$  und somit gilt  $\alpha = \sphericalangle A'TB = 90^\circ - \beta$ . Dann ist aber wegen der Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle TB'A'$  auch der Winkel bei  $T$  gleich  $\alpha$ , was zu zeigen war.



Die Umkehrung folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit des vierten harmonischen Punktes zu  $AA'B$ . **q.e.d.**

Nach dem **Satz von Archimedes 4.2** gehört zu einem fixen Kreis  $k$  und einem Punkt  $B$  ein Punkt  $B'$  und umgekehrt gehört zu  $B'$  ein  $B$ . Dies führt uns zu folgender Definition, mit welcher wir im nächsten Abschnitt die Begriffe *Pol* und *Polare* einführen werden.

**Inverse Punkte.** Sei  $k$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und sei  $B$  ein Punkt der verschieden ist von  $M$ . Weiter seien  $A$  und  $A'$  die Schnittpunkte der Zentralen durch  $B$  mit dem Kreis  $k$ . Den zu  $B$  *inversen Punkt  $B'$  bezüglich des Kreises  $k$*  definieren wir wie folgt: Liegt  $B$  nicht auf  $k$ , so sei  $B'$  der Punkt auf  $AA'$  welcher mit  $B$  die Strecke  $\overline{AA'}$  harmonisch teilt; falls  $B$  auf  $k$  liegt sei  $B' = B$ .

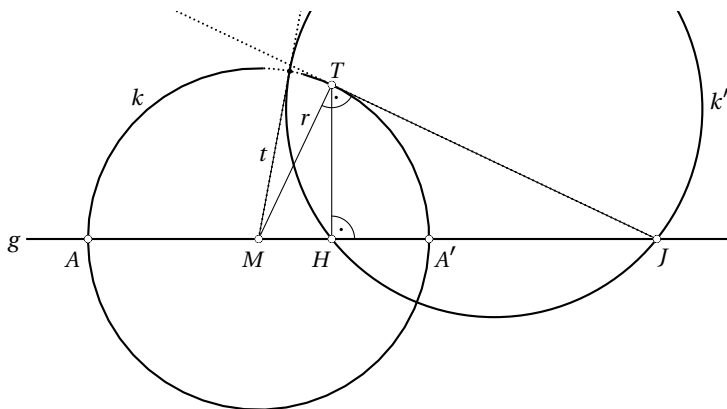
Im Kapitel 2 haben wir Kreise untersucht, welche sich rechtwinklig schneiden. Nun untersuchen wir solche Kreise etwas genauer.

### Satz 4.3

Seien zwei sich rechtwinklig schneidende Kreise gegeben und sei  $g$  eine Gerade durch den Mittelpunkt des einen Kreises, welche den anderen Kreis in zwei Punkten schneidet. Dann liegen die vier Schnittpunkte von  $g$  mit den beiden Kreisen harmonisch.

Liegen umgekehrt die Schnittpunkte einer Geraden  $g$  mit zwei sich schneidenden Kreisen harmonisch und geht  $g$  durch den Mittelpunkt einer dieser Kreise, so schneiden sich die beiden Kreise rechtwinklig.

**Beweis:** Seien  $k$  und  $k'$  zwei sich schneidende Kreise und sei  $g$  eine Gerade durch den Mittelpunkt  $M$  von  $k$  welche  $k'$  in den Punkten  $H$  und  $J$  schneide. Die Schnittpunkte der Geraden  $g$  mit  $k$  seien  $A$  und  $A'$  und der Radius von  $k$  sei  $r$ . Weiter sei  $t$  der Tangentenabschnitt von  $M$  an den Kreis  $k'$  und sei  $T$  auf  $k$  so gewählt, dass  $\sphericalangle JHT$  ein rechter Winkel ist.



Wir zeigen, dass  $AHA'J$  genau dann harmonisch liegen, wenn sich  $k$  und  $k'$  rechtwinklig schneiden: Mit dem **Satz von Archimedes 4.2** liegen  $AHA'J$  genau dann harmonisch, wenn  $T$  der Berührungspunkt der Tangente von  $J$  an den Kreis  $k$  ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn  $\sphericalangle MTJ$  ein rechter Winkel ist, beziehungsweise wenn die beiden Dreiecke  $\triangle MTJ$  und  $\triangle MHT$  ähnlich sind. Die beiden Dreiecke sind nun genau dann ähnlich, wenn  $\overline{MH} : r = r : \overline{MJ}$ , beziehungsweise wenn  $\overline{MH} \cdot \overline{MJ} = r^2$  gilt. Andererseits erhalten wir mit dem **Sekanten-Tangenten-Satz 2.2**:  $\overline{MH} \cdot \overline{MJ} = t^2$ .

Aus den obigen beiden Gleichungen folgt also, dass  $AHA'J$  genau dann harmonisch liegen, wenn gilt  $r = t$ , was aber nur dann der Fall ist, wenn sich  $k$  und  $k'$  rechtwinklig schneiden.

**q.e.d.**

Wählt man in obigem Satz für  $g$  die Zentrale durch beide Kreismittelpunkte, so erhält man:

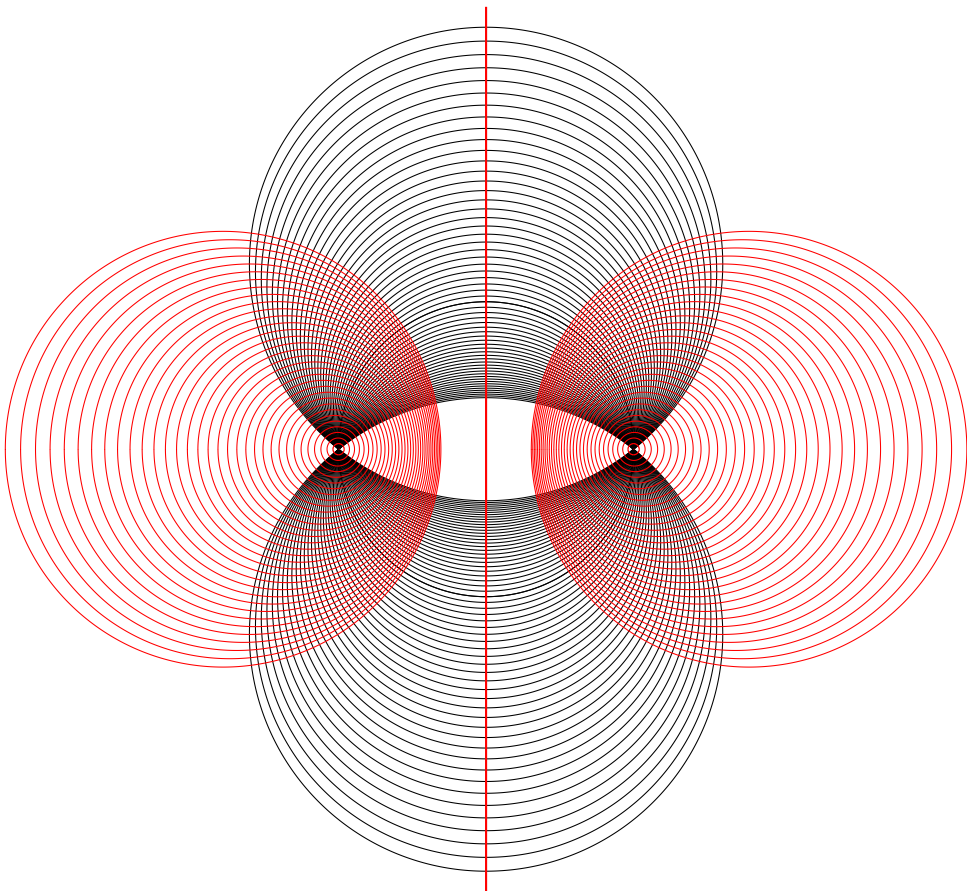
**Satz 4.4**

*Zugeordnete Apolloniuskreise schneiden sich rechtwinklig und umgekehrt sind zwei sich rechtwinklig schneidende Kreise immer zugeordnete Apolloniuskreise.*

Als weitere Folgerung erhalten wir mit den Bemerkungen nach der Definition der Chordalen im Kapitel 2:

**Satz 4.5**

*Jeder Apolloniuskreis zu zwei fest gewählten Punkten schneidet alle Kreise, welche durch diese beiden Punkte gehen, senkrecht. Insbesondere haben alle Apolloniuskreise zu zwei fest gewählten Punkten dieselbe Chordale, nämlich die Mittelsenkrechte dieser beiden Punkte.*



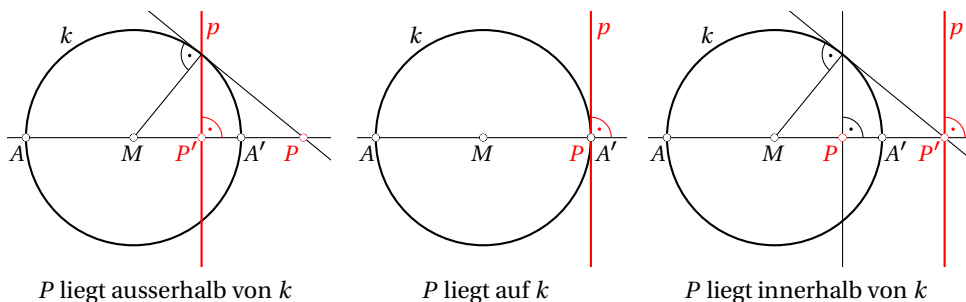
## 4.2 Pol und Polare

In diesem Abschnitt führen wir die Begriffe *Pol* und *Polare* ein, welche sich auf Punkte und Geraden in Bezug auf einen gegebenen Kreis beziehen. Im nächsten Abschnitt werden wir dann sehen, dass Pol und Polare eng mit harmonischen Verhältnissen am Kreise verknüpft sind.

**Pol und Polare.** Gegeben sei ein Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $M$ , sowie ein von  $M$  verschiedener Punkt  $P$ . Weiter sei  $P'$  der zu  $P$  inverse Punkt bezüglich des Kreises  $k$ . Dann ist die zu  $PM$  senkrecht stehende Gerade durch  $P'$  die *Polare* des Punktes  $P$  in Bezug auf den Kreis  $k$  und der Punkt  $P$  deren *Pol*.

### Konstruktion der Polare aus dem Pol

Die Konstruktion der Polare  $p$  aus dem Pol  $P$  (in Bezug auf einen Kreis  $k$ ) folgt im Wesentlichen aus dem **Satz von Archimedes 4.2**, wobei wir drei Fälle unterscheiden müssen:



### Bemerkungen:

- Liegt der Pol  $P$  ausserhalb des Kreises  $k$ , so schneidet seine Polare  $p$  den Kreis in zwei Punkten, welche die Berührungspunkte der Tangenten von  $P$  an  $k$  sind.
- Sind umgekehrt die Punkte  $T_1$  und  $T_2$  die Berührungspunkte der zwei Tangenten von einem Punkt  $P$  an den Kreis  $k$ , so ist die Gerade  $T_1 T_2$  die Polare des Pols  $P$ .
- Liegt der Pol  $P$  auf dem Kreis  $k$ , so ist seine Polare die Tangente an  $k$ , welche  $k$  im Punkt  $P$  berührt.
- Liegt der Pol innerhalb des Kreises, so verläuft die Polare gänzlich ausserhalb des Kreises.

Den folgenden Satz von PHILIPPE DE LA HIRE werden wir mit Hilfe von Sätzen über rechtwinklig schneidende Kreise aus dem vorhergehenden Abschnitt beweisen. Wir möchten an dieser Stelle jedoch bemerken, dass der Satz auch direkt mit den Strahlensätzen bzw. der Ähnlichkeitstheorie bewiesen werden kann.

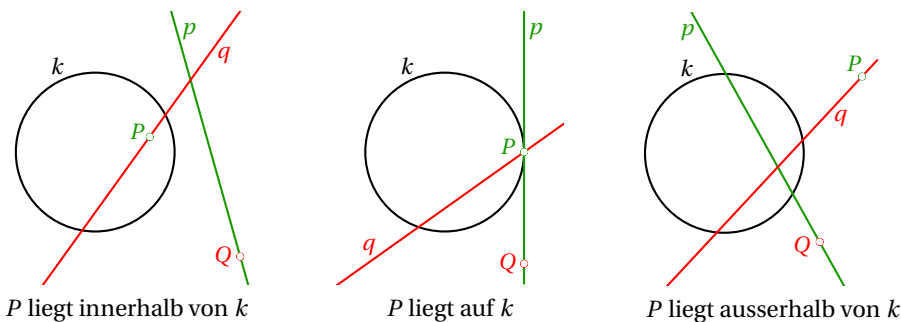
### Hauptsatz der Polarentheorie 4.6

Seien  $p$  die Polare zum Punkt  $P$  und  $q$  die Polare zum Punkt  $Q$  bezüglich desselben Kreises  $k$ , dann gilt:

$Q$  liegt genau dann auf  $p$  wenn  $P$  auf  $q$  liegt.

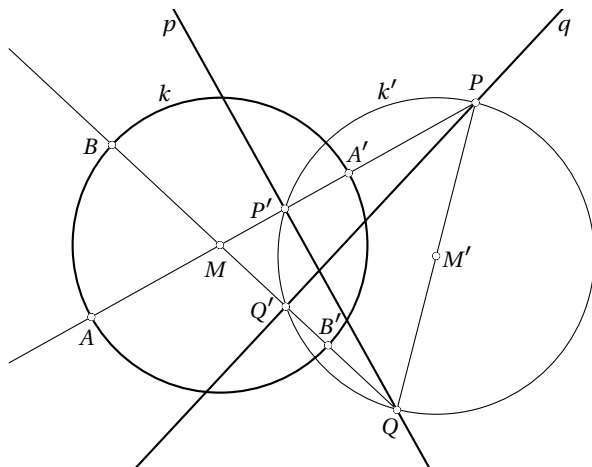
Anders ausgedrückt heisst das: Liegt  $Q$  auf der Polaren von  $P$ , so liegt  $P$  auf der Polaren von  $Q$ . Man nennt  $P$  und  $Q$  respektive  $p$  und  $q$  konjugiert bezüglich  $k$ .

**Beweis:** Bezüglich der Lage von  $P$  und  $Q$  sind die folgenden drei Fälle möglich:



Wenn  $P$  auf dem Kreis liegt, so ist die Polare von  $P$  eine Tangente an den Kreis durch  $P$ . Ist nun  $Q$  ein Punkt auf der Tangente, so geht nach Konstruktion die Polare von  $Q$  durch die Berührungspunkte der beiden Tangenten von  $Q$  an den Kreis und somit liegt  $P$  auf der Polaren von  $Q$ .

In den anderen beiden Fälle gehen wir wie folgt vor: Es sei  $M$  der Mittelpunkt von  $k$  und  $P'$  der Schnittpunkt der Geraden  $PM$  mit der Polaren  $p$  (d.h.  $P'$  ist der zu  $P$  inverse Punkt bezüglich  $k$ ). Weiter seien  $A$  und  $A'$  die Schnittpunkte von  $PM$  mit dem Kreis  $k$ . Schliesslich sei  $k'$  der Kreis durch die Punkte  $P, P'$  und  $Q$ . Falls  $P$  ausserhalb von  $k$  liegt, erhalten wir folgende Figur (falls  $P$  innerhalb von  $k$  liegt müssen wir in der Figur die beiden Punkte  $P$  und  $P'$  vertauschen und  $p$  parallel verschieben):

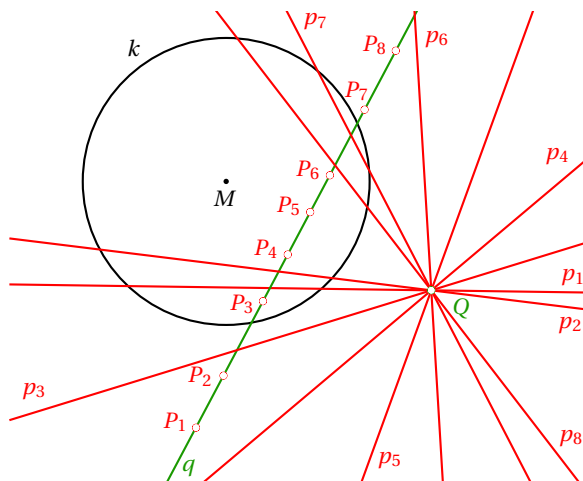


Nach Definition der Polaren liegen die Punkte  $AP'A'P$  harmonisch und somit schneiden sich mit **Satz 4.3** die Kreise  $k$  und  $k'$  rechtwinklig. Da  $PM$  und  $QP'$  senkrecht stehen, liegt wegen dem **Satz von Thales 1.1** der Mittelpunkt  $M'$  von  $k'$  auf der Geraden  $QP$ . Weil sich  $k$  und  $k'$  rechtwinklig schneiden, liegen mit **Satz 4.3** die Punkte  $BQ'B'Q$  harmonisch, wobei diese vier Punkte die Schnittpunkte von  $QM$  mit den beiden Kreisen  $k$  und  $k'$  sind. Damit liegt  $Q'$  auf der Polaren  $q$  des Pols  $Q$  und nach Definition der Polaren steht diese senkrecht zur Geraden  $QM$ . Da nun aus dem **Satz von Thales 1.1** folgt, dass  $\sphericalangle QQ'P$  ein rechter Winkel ist, liegt  $P$  auf  $q$ , womit der Satz bewiesen ist. **q.e.d.**

Lassen wir den Pol  $Q$  und seine zugehörige Polare  $q$  fest und verschieben  $P$  auf  $q$ , so folgt:

**Satz 4.7**

Ist  $k$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und  $q$  eine Gerade, welche den Punkt  $M$  nicht trifft, dann schneiden sich alle Polaren  $p_i$  von Punkten  $P_i$  auf  $q$  in einem Punkt  $Q$ , nämlich dem Pol der Polaren  $q$ . Ist umgekehrt ein von  $M$  verschiedener Punkt  $Q$  gegeben, dann liegen die Pole zu allen Geraden durch  $Q$  auf einer Geraden  $q$ , nämlich der Polaren des Pols  $Q$ .

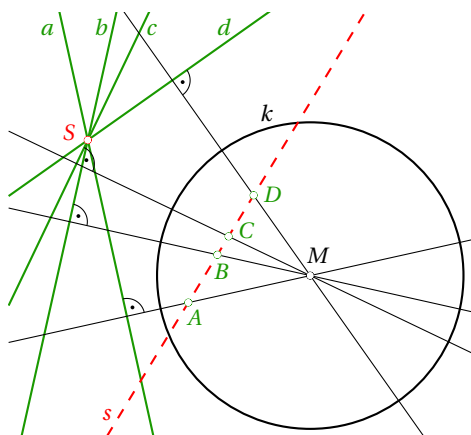


### 4.3 Harmonische Punkte und Polaren

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass Pol und Polare eng verknüpft sind mit harmonischen Punkten. Als erstes betrachten wir den Schnittpunkt eines harmonischen Geradenbüschels als Pol und die Geraden des Geradenbüschels als Polaren:

**Satz 4.8**

Die Pole der Geraden eines harmonischen Geradenbüschels liegen harmonisch und umgekehrt bilden die Polaren harmonischer Punkte ein harmonisches Geradenbüschel.





**Beweis:** Das Geradenbüschel  $MA, MB, MC$  und  $MD$  schliesst dieselben Winkel ein, wie das Polarenbüschel  $a, b, c, d$ . Es wird dabei alles um  $90^\circ$  gedreht. Wenn das eine Geradenbüschel harmonisch ist, so muss auch das andere harmonisch sein; womit der Satz bewiesen ist. **q.e.d.**

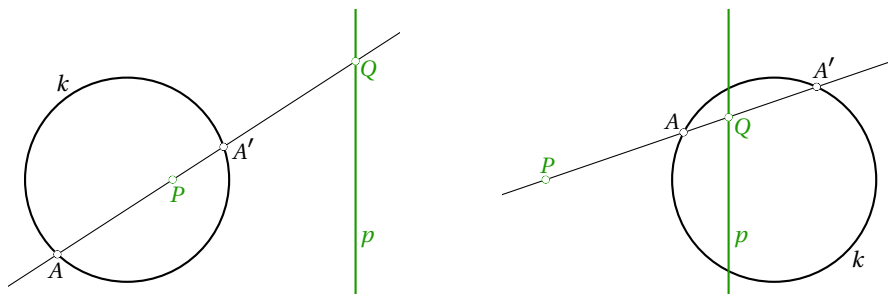
Der folgende Satz wird im Kapitel 7 eine wichtige Rolle spielen, denn er gilt nicht nur für Sekanten durch Kreise, sondern auch für Sekanten durch allgemeine Kegelschnitte.

**Satz 4.9**

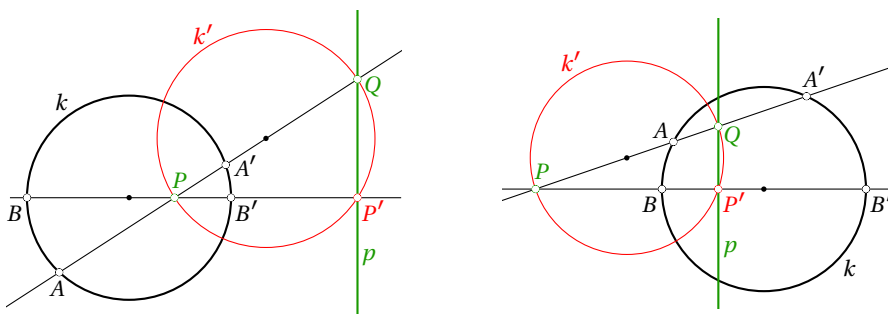
Gegeben sei ein Kreis  $k$ , ein Pol  $P$  (der nicht auf  $k$  liegt), sowie dessen Polare  $p$ . Weiter sei eine Gerade durch  $P$  gegeben, welche die Polare  $p$  im Punkt  $Q$  und den Kreis  $k$  in den zwei Punkten  $A$  und  $A'$  schneidet. Dann teilen die Punkte  $P$  und  $Q$  die Strecke  $\overline{AA'}$  harmonisch.

Umgekehrt: Ist  $g$  eine Gerade durch  $P$ , welche den Kreis  $k$  in den zwei Punkten  $A$  und  $A'$  schneidet, und ist  $Q$  ein Punkt auf  $g$ , so dass  $P$  und  $Q$  die Strecke  $\overline{AA'}$  harmonisch teilen, dann liegt  $Q$  auf der Polaren  $p$ .

**Beweis:** Wir behandeln die beiden Fälle  $P$  liegt im Kreis und  $P$  liegt ausserhalb des Kreises gemeinsam und zeigen, dass in beiden Fällen  $P$  und  $Q$  die Strecke  $\overline{AA'}$  harmonisch teilen:



Seien  $P', B$  und  $B'$  die Schnittpunkte der Zentralen durch  $P$  mit der Polaren  $p$  bzw. mit dem Kreis  $k$ . Weiter sei  $k'$  der Thaleskreis über  $\overline{PQ}$ .

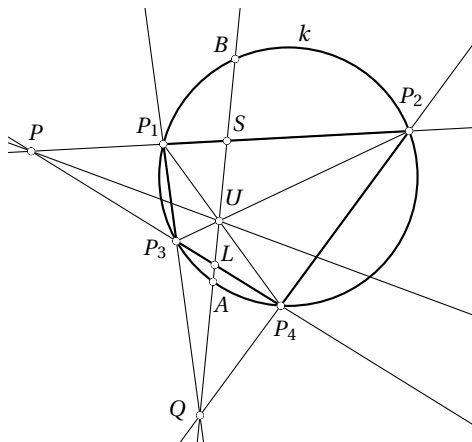


Aus der Definition der Polaren folgt, dass  $\sphericalangle QP'P$  ein rechter Winkel ist und somit liegt  $P'$  auf dem Thaleskreis  $k'$ . Weiter folgt aus der Definition der inversen Punkte, dass  $P$  und  $P'$  die Strecke  $\overline{BB'}$  harmonisch teilen und aus Satz 4.3 folgt, dass sich die Kreise  $k$  und  $k'$  rechtwinklig schneiden. Weil nun die Gerade  $PQ$  durch den Mittelpunkt von  $k'$  geht, teilen mit Satz 4.3 die Punkte  $P$  und  $Q$  die Strecke  $\overline{AA'}$  harmonisch. **q.e.d.**

Im folgenden Satz betrachten wir ein vollständiges Vierseit bei welchem die Ecken des Vierecks auf einem Kreis liegen. Dabei werden wir Resultate über das vollständige Vierseit aus dem vorhergehenden Kapitel mit dem soeben bewiesenen Satz verbinden.

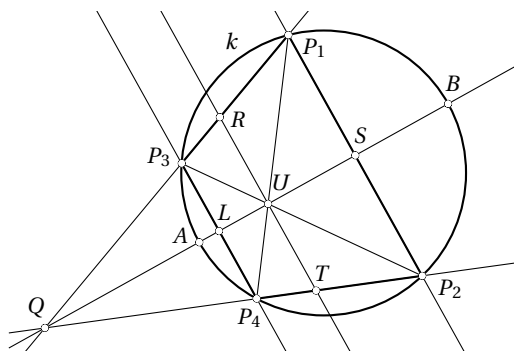
**Satz 4.10**

Es seien  $P_1, P_2, P_3, P_4$  vier Punkte auf einem Kreis  $k$ . Weiter seien die Punkte  $P, Q, U$  die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden dieser vier Kreispunkte, wobei  $P$  und  $Q$  ausserhalb von  $k$  liegen und  $U$  innerhalb von  $k$  liegt. Dann ist  $QU$  die Polare von  $P$  und  $PU$  die Polare von  $Q$ . Zudem werden die Polarenabschnitte  $\overline{PU}$  respektive  $\overline{QU}$  sowohl von den Viereckseiten, als auch vom Kreis  $k$  harmonisch geteilt. Falls entweder  $P$  oder  $Q$  nicht existiert, so sind die entsprechenden Geraden parallel und die Parallelen durch  $U$  die entsprechenden Polaren. In diesem Fall wird der existierende Polarenabschnitt  $\overline{QU}$  respektive  $\overline{PU}$  sowohl von den Viereckseiten als auch vom Kreis  $k$  harmonisch geteilt.



**Beweis:** Wir nehmen zunächst an, dass die beiden Schnittpunkte  $P$  und  $Q$  existieren: Wir betrachten das Viereck  $P_3QP_4U$  und dessen Ergänzung zum vollständigen Vierseit  $P_3QP_4UP_1P_2$ . Mit **Satz 3.7** wissen wir, dass sowohl  $PP_1SP_2$  wie auch  $PP_3LP_4$  harmonisch liegen. Aus **Satz 4.9** folgt nun, dass die Punkte  $S$  und  $L$  auf den Polaren von  $P$  liegen und somit ist  $QU$  die Polare von  $P$ . Ebenso zeigt man, dass  $PU$  die Polare von  $Q$  ist, woraus mit **Satz 4.9** folgt, dass  $QAUB$  harmonisch liegen. Betrachten wir wieder das Vierseit, so folgt aus **Satz 3.7**, dass auch  $QLUS$  harmonisch liegen, womit der Satz unter Annahme der Existenz von  $P$  und  $Q$  bewiesen ist.

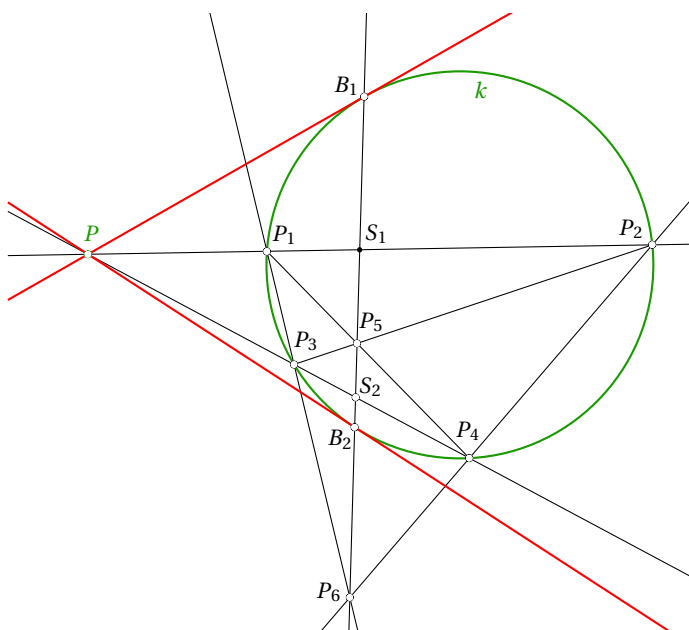
Nun nehmen wir an, dass  $P$  nicht existiert. Somit sind die Geraden  $P_1P_2$  und  $P_3P_4$  parallel:



Beachte, dass in diesem Fall  $QU$  eine Symmetrieachse ist. Sei  $q$  die Parallele zu  $P_1P_2$  durch  $U$  und seien  $R$  und  $T$  die Schnittpunkte mit  $P_1P_3$  bzw.  $P_2P_4$ . Nach der Grundkonstruktion der harmonischen Teilung liegen offenbar  $QLUS$  harmonisch und nach dem **1. Strahlensatz** liegen dann auch  $QP_3RP_1$  und  $QP_4TP_2$  harmonisch. Aus **Satz 4.9** folgt nun, dass sowohl  $R$  als auch  $T$  auf der Polaren von  $Q$  liegt. Somit ist  $q$  die Polare von  $Q$  und mit **Satz 4.9** liegen  $QAUB$  harmonisch. **q.e.d.**

Im vorhergehenden Kapitel haben wir aus dem Satz über harmonische Verhältnisse am Vierseit eine Konstruktion für den vierten harmonischen Punkt abgeleitet, welche mit dem Lineal allein (ohne Zirkel) ausgeführt werden kann. In ähnlicher Weise leiten wir nun aus dem **Satz 4.10** eine Tangentenkonstruktion ab, welche ebenfalls ohne Zirkel auskommt.

### Konstruktion der Tangenten an einen Kreis mit dem Lineal allein



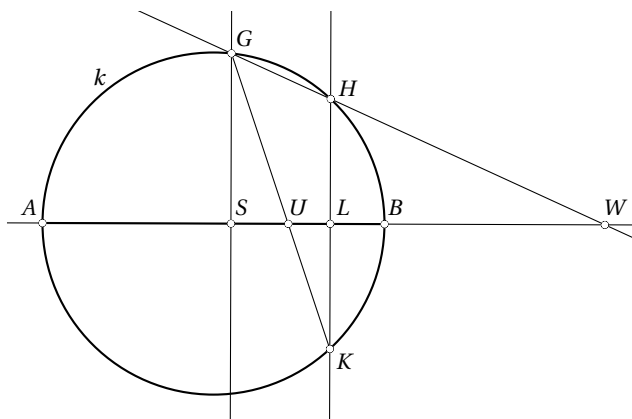
1.  $P_1$  und  $P_2$  respektive  $P_3$  und  $P_4$  sind die Schnittpunkte des Kreises  $k$  mit zwei beliebigen Sekanten durch  $P$ .
2.  $P_5$  ist der Schnittpunkt von  $P_1P_4$  und  $P_2P_3$ .
3.  $P_6$  ist der Schnittpunkt von  $P_1P_3$  und  $P_2P_4$ . (Liegen  $P_1P_3$  und  $P_2P_4$  parallel, so kann man eine der Sekanten neu wählen.)
4. Nach **Satz 4.10** ist  $P_5P_6$  die Polare von  $P$ . Ihre Schnittpunkte  $B_1$  und  $B_2$  mit  $k$  sind daher die Berührungspunkte der Tangenten von  $P$  an den Kreis.

**Bemerkung:** Mit der obigen Konstruktion wird zum Pol  $P$  ausserhalb des Kreises  $k$  die Polare  $B_1B_2$  konstruiert. Kehren wir die Konstruktion um und beginnen mit dem Punkt  $P_5$  innerhalb von  $k$ , so lässt sich, mit dem Lineal alleine, mit Hilfe von zwei Sehnen durch  $P_5$  die zu  $P_5$  gehörige Polare  $PP_6$  konstruieren. Für weiter Linealkonstruktionen siehe die Aufgabe 4.7 und Abschnitt 8.1.

Zum Schluss dieses Kapitels möchten wir noch eine weitere Konstruktion angeben welche aus **Satz 4.10** folgt und welche uns erlaubt, Punkte zu finden, die gleichzeitig zwei verschiedene Strecken harmonisch teilen.

### Konstruktion gemeinsamer harmonischer Teilungspunkte zweier Strecken

Gegeben seien zwei Punkte  $S$  und  $L$  auf einer Strecke  $\overline{AB}$ , wobei die Streckenlängen  $\overline{AS}$  und  $\overline{BL}$  verschieden sind. Gesucht sind die Punkte  $U$  und  $W$ , welche sowohl die Strecke  $\overline{AB}$  als auch die Strecke  $\overline{SL}$  harmonisch teilen.



1. Wir zeichnen zuerst den Kreis  $k$  mit Durchmesser  $\overline{AB}$ .
2. Die Senkrechten zu  $AB$  durch  $L$  bzw.  $S$  schneiden  $k$  in  $K$  und  $H$  bzw. in  $G$ , wobei  $G$  in derselben von  $AB$  begrenzten Halbebene liegt wie  $H$ .
3. Die Gerade  $AB$  schneide  $GK$  bzw.  $GH$  in den Punkten  $U$  bzw.  $W$ , welche die gewünschten Eigenschaften haben.

### Bemerkungen:

- Da nach Voraussetzung die beiden Strecken  $\overline{AS}$  und  $\overline{BL}$  ungleich lang sind, existiert der Schnittpunkt  $W$ .
- Die Polaren zum Punkt  $W$  bezüglich der Kreise mit den Durchmessern  $\overline{AB}$  und  $\overline{SL}$  sind identisch, denn sie verlaufen beide durch  $U$ .

## 4.4 Satz von Brianchon für Kreise

Zum Schluss dieses Kapitels beweisen wir mit Hilfe der Polarentheorie und dem **Satz von Pascal für Kreise 1.4** einen Satz von Brianchon:

### Satz von Brianchon für Kreise 4.11

*Berühren alle sechs Seiten eines Sechsecks einen Kreis, dann schneiden sich die drei Diagonalen gegenüberliegender Punkte in einem Punkt (oder sie sind parallel).*

# Literaturverzeichnis

- [1] Carl Adams, *Die Lehre von den Transversalen in ihrer Anwendung auf die Planimetrie*, Verlag der Steiner'schen Buchhandlung, Winterthur, 1843.
- [2] Carl Adams, *Die harmonischen Verhältnisse. Ein Beitrag zur neueren Geometrie*, Verlag der Steiner'schen Buchhandlung, Winterthur, 1845.
- [3] Apollonius, *Apollonius von Perga ebene Örter*, [Wiederhergestellt von Robert Simson; aus dem Lateinischen übersetzt von Johann Wilhelm Camerer], Adam Friedrich Böhme, Leipzig, 1796.
- [4] Apollonius, *Des Apollonius von Perga sieben Bücher über Kegelschnitte, nebst dem durch Halley Sieder hergestellten achten Buche*, [Deutsch bearbeitet von H. Balsam], Verlag von Georg Reimer, Berlin, 1861.
- [5] Apollonius, *Die Kegelschnitte des Apollonius*, [übersetzt von Dr. Arthur Czwalina], Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin, 1926.
- [6] Archimedes, *Opera Omnia IV: Über einander berührende Kreise*, [aus dem arabischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Yvonne Dold-Samplonius, Heinrich Hermelink und Matthias Schramm], B. G. Teubner, Stuttgart, 1975.
- [7] Günter Aumann, *Kreisgeometrie*, [Springer-Lehrbuch], Springer Spektrum, Heidelberg, 2015.
- [8] Peter Baptist, *Historische Anmerkungen zu Gergonne- und Nagel-Punkt*, *Sudhoffs Archiv*, vol. 71 (1987), no. 2, 230–233.
- [9] **Duden**, *Rechnen und Mathematik*, 3. ed., Dudenverlag, Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- [10] Charles Julien Brianchon, *Sur les surfaces courbes du second degré*, *Journal de l'École Polytechnique*, Cah. XIII, (1806).
- [11] Harold Scott MacDonald Coxeter, *Unvergängliche Geometrie*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1963.
- [12] Harold Scott MacDonald Coxeter, *Introduction to geometry*, second ed., John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.
- [13] Harold Scott MacDonald Coxeter, *The real projective plane*, third ed., Springer-Verlag, New York, 1993.
- [14] René Descartes, *Regulae ad directionem ingenii / Regeln zur Ausrichtung der Erkenntniskraft*, Descartes philosophische Schriften, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1996, pp. 1–181.
- [15] Euklid, *Die Elemente, Buch I–XIII, nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1980.
- [16] Christoph Gudermann, *Grundriss der analytischen Sphärik*, Du Mont-Schauberg, 1830.
- [17] Lorenz Halbeisen und Norbert Hungerbühler, *On periodic billiard trajectories in obtuse triangles*, *SIAM Review*, vol. 42 (2000), no. 4, 657–670 (electronic).
- [18] Lorenz Halbeisen und Norbert Hungerbühler, *A simple proof of Poncelet's theorem (on the occasion of its bicentennial)*, *Amer. Math. Monthly*, vol. 122 (2015), no. 6, 537–551. MR 3361732
- [19] Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, [Undergraduate Texts in Mathematics], Springer-Verlag, New York, 2000.
- [20] Gaston Hauser, *Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid, mit einem einleitenden Abschnitt über die vorgriechische Geometrie*, Eugen Haag, Luzern, 1955.
- [21] Carl Hellwig, *Das Problem des Apollonius nebst den Theorien der Potenzörter, Potenzpunkte, Aehnlichkeitspunkte, Aehnlichkeitsgeraden, Potenzkreise, Pole und Polaren*, H.W. Schmidt, Halle, 1856.

- [22] David Hilbert, **Die Grundlagen der Geometrie**, [achte Auflage, mit Revisionen und Ergänzungen von Dr. Paul Bernays], B. G. Teubner, Stuttgart, 1956.
- [23] Norbert Hungerbühler, **Geometrical aspects of the circular billiard problem**, *Elemente der Mathematik. Eine Zeitschrift der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft. Une Revue de la Société Mathématique Suisse. Una Rivista della Società Matematica Svizzera*, vol. 47 (1992), no. 3, 114–117.
- [24] Norbert Hungerbühler, **Die zehn Apollonischen Probleme**, *Didaktik der Mathematik*, vol. 21/4 (1993), 241–249.
- [25] Norbert Hungerbühler, **A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni theorem**, *Amer. Math. Monthly*, vol. 101 (1994), no. 8, 784–787.
- [26] Norbert Hungerbühler, **Sections of pyramids, perspectivities and conics**, *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, vol. 27/3 (1996), 335–345.
- [27] Fritz Hüttemann, **Ein Beitrag zu den Steinerschen Konstruktionen**, *Jahresbericht der DMV*, vol. 43 (1933), 184–185.
- [28] Adolf Kiefer, **Geometrische Mitteilungen**, *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, vol. 63 (1918), 494–511.
- [29] Philippe de La Hire, **Sectiones conicae**, P. Michalet, Parisii, 1685.
- [30] George E. Martin, **Geometric constructions**, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [31] C. Stanley Ogilvy, **Unterhaltsame Geometrie**, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1979.
- [32] Alexander Ostermann und Gerhard Wanner, **Geometry by Its History**, [Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in Mathematics], Springer-Verlag, Heidelberg, 2012.
- [33] Blaise Pascal, **Essay pour les Coniques**, (1640).
- [34] Jean-Victor Poncelet, **Traité des propriétés projectives des figures**, Bachelier, Paris, 1822.
- [35] Harald Scheid und Wolfgang Schwarz, **Elemente der Geometrie**, 4. ed., Elsevier / Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2007.
- [36] Hermann Amandus Schwarz, **Gesammelte mathematische Abhandlungen. Band I, II**, Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1972, Nachdruck in einem Band der Auflage von 1890.
- [37] Christoph J. Scriba und Peter Schreiber, **5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [38] Jacob Steiner, **Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Erster Theil: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung** (bearbeitet von C. F. Geiser), 2. ed., B. G. Teubner, Leipzig, 1875.
- [39] Jacob Steiner, **Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises**, [herausgegeben von A. J. von Oettingen], Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1895.
- [40] Jacob Steiner, **Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln**, [aus Steiners Nachlass herausgegeben von R. Fueter], Orell Füssli Verlag, Zürich, 1931.
- [41] Eduard Stiefel, **Lehrbuch der darstellenden Geometrie**, [Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe Band VI], Birkhäuser Verlag, Basel, 1947.
- [42] Johannes Thomae, **Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage**, Verlag von Louis Nebert, Halle <sup>a</sup>/S., 1873.

- [43] Johannes Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter, 3. Band: Proportionen, Gleichungen*, 3. ed., Walter de Gruyter, Berlin, 1937.
- [44] Johannes Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter, 4. Band: Ebene Geometrie*, 3. ed., Walter de Gruyter, Berlin, 1940.
- [45] Bartel L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, aus dem Holländischen übersetzt von Helga Habicht, mit Zusätzen vom Verfasser, [Wissenschaft und Kultur, Bd. 8], Birkhäuser Verlag, Basel · Stuttgart, 1956.
- [46] Jan van Yzeren, *A simple proof of Pascal's hexagon theorem*, *American Mathematical Monthly*, vol. 100(10) (1993), 930–931.
- [47] Herbert Zeitler und Dušan Pagon, *Kreisgeometrie – gestern und heute*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 2007.
- [48] Hieronymus Georg Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, [Deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. R. v. Fischer-Benzon], Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn, Kopenhagen, 1886.





# Index

- affine Abbildung, 130, 165  
Ähnlichkeitsachse, 95  
    äussere, 92  
    innere, 92  
Apollonisches Berührungsproblem  
    alle Lösungskreise, 97  
    Duden-Konstruktion, 84  
    elementare Lösung, 96  
    Gergonne-Lösung, 110, 113  
    Kiefer-Konstruktion, 94  
    Lösung durch stereographische Projektion, 113  
    Lösungen mit Inversion, 113  
    Schrumpfen von Kreisen, 96  
Apollonius von Perge, 63, 80–82, 84, 97, 154  
Apolloniuskreis, 65–69, 79, 95, 111, 114, 163  
    verallgemeinerter, 162  
    zugeordneter, 66  
Arbelos, 112  
Archimedes von Syrakus, 67, 82, 154, 155, 208  
Archytas von Tarent, 42, 208  
axial perspektive Lage, 121
- Bernoulli I, Johann, 64  
Bodenmiller, 64  
Breguet, Louis Clément François, 188  
Brianchon, Charles Julien, 63, 82
- Carnot, Lazare Nicolas Marguerite, 42, 188  
Ceva, Giovanni, 64  
Chasles, Michel, 64, 188  
Chordale, 32–39, 41, 42, 61, 69, 86–88, 91, 92, 108, 111, 115  
Chordalpunkt, 39, 92, 115  
Coxeter, Harold Scott MacDonald, 115
- Dandelin, Germinal Pierre, 147  
Dandelin-Kugeln, 147–150  
de La Hire, Philippe, 63, 64, 70  
Desargues, Gérard, 64  
Descartes, René, 97, 191, 207–208  
Doppelverhältnis, 165–167, 169, 186  
Dreiecke  
    ähnliche, 198  
    Doppelverhältnis, 169  
    in perspektiver Lage, 121, 176, 179, 181, 185  
    Morley-Dreieck, 185  
Dreiteilung eines Winkels, 155, 182  
dualisieren, 177
- Eiffelturm, 188  
Einschiebelineal, 155  
Ellipse, 125–131  
    Hauptachsen, 127, 150  
    konjugierte Durchmesser, 126, 150  
Équerre, 155  
Eudemos von Rhodos, 25  
Eudoxos von Knidos, 208  
Euklid, 26, 42, 63, 84, 208  
Euler, Leonhard, 97
- Fasskreis, 9  
Fermat, Pierre de, 82, 159  
Fermat-Torricelli-Punkt, 158, 159
- Gauss, Carl Friedrich, 64, 97  
GeoGebra, vi  
Gergonne, Joseph Diaz, 26, 82, 97  
Gergonne-Gerade, 22, 26, 78, 176  
Gergonne-Lösung des Apollonischen Berührungsproblems, 110  
Gergonne-Punkt, 26, 78, 176
- Höhenfusspunktdreieck, 60  
Höhenschnittpunkt, 25, 39, 61, 164  
Hüttemann, Fritz, 157  
harmonische Geraden, 45–47  
harmonische Punkte, 45–47, 72–76  
    zugeordnete, 45  
harmonischer Kegelschnitt im Dreieck, 172, 173  
harmonisches Geradenbüschel  
    zugeordnetes, 45  
Hesse, Ludwig Otto, 188  
Hipparch von Nicäa, 63  
Hippokrates von Chios, 9, 26, 208  
Hyperbel, 125, 132–135  
    Asymptoten, 132  
    konjugierte Durchmesser, 134  
    Symmetrieachsen, 134
- Invarianz des Doppelverhältnisses, 165  
Inversion am Kreis, 84, 97, 99–100  
    Fernpunkt, 100  
    Inversionskreis, 99  
isogonal konjugierte Punkte, 163, 164, 185, 186  
isotomisch konjugierte Punkte, 160
- Kegelschnitt, 124–139  
Kiefer, Adolf, 97  
Kiefer-Konstruktion, 94  
kollabierender Zirkel, 155  
kollinear, 2  
konjugierte Geraden, 70  
konjugierte Punkte, 70, 181  
kopunktal, 2

- Lasker, Emanuel, 188  
 Leitgeradenkonstruktion der Parabel, 152  
 Leitkreis konstruktion der Ellipse, 152  
 Leon, 26
- Magnus, Ludwig Immanuel, 115  
 Mascheroni, Lorenzo, 156  
 Mathematica, vi  
 Menelaos, 63  
 Miquel, Auguste, 26  
 Miquel-Punkt, 17  
 Mira, 155  
 Mohr, Georg, 156  
 Morley, Frank, 188  
 Morley-Dreieck, 185  
 Morley-Konfiguration, 182, 185  
 Moss, Thomas, 26
- Nagel-Punkt, 160  
 Newton, Isaac, 64  
 Nobbs, Cyril Gordon, 26  
 Nobbs-Punkte, 22, 26, 78
- Oinopides, 25–26  
 Oldknow, Adrian, 26  
 Origamigeometrie, 155  
 Orthogonalkreis dreier Kreise, 92, 110  
 orthoptic triangle, 61  
 Ortsbogen, 9  
 Oughtred, William, 42
- Pappos, 63, 64, 82, 208  
 Pappos-Gerade, 59  
 Pappos-Ketten, 112  
 Parabel, 125, 135–139  
   Hauptachse, 138  
   Nebenachse, 137  
   Scheitelpunkt, 138  
   Symmetrieachse, 138  
 Parallelprojektion, 165  
 Pascal, Blaise, 26  
 Pedaldreieck, 18, 23  
 perspektive Affinität, 130, 165  
 perspektive Lage, 121  
 Plücker, Julius, 42, 97, 115  
 Platon, 26  
 Pol, 70, 122–124  
 Polare, 70, 122–124  
 Polarendreieck, 179  
 Poncelet, Jean-Victor, 82, 154, 157, 188  
 Potenz eines Punktes, 36  
 Potenzkreis zweier Kreise, 93  
 Potenzlinie  
   siehe Chordale, 42  
 projektive Invarianz des Doppelverhältnisses, 165  
 Proklos, 25, 26  
 PSTricks, vi
- Punkte  
 Brianchon-Punkt, 76, 78  
 Chordalpunkt, 37, 92, 115  
 Fermat-Torricelli-Punkt, 158  
 inverse, 68  
 konjugierte, 70, 181  
 Miquel-Punkt, 17  
 Nagel-Punkt, 160  
 Nobbs-Punkte, 22, 26, 78
- Reflexionsgesetz, 60
- Sätze  
 1. Strahlensatz, 194  
 2. Strahlensatz, 194–195  
 3. Strahlensatz, 196  
 Höhensatz, 202–203  
 Hauptsatz der Polarentheorie, 70–71  
 Hauptsatz der zentrischen Streckung, 192–193  
 Kathetensatz, 200–201  
 Peripheriewinkelsatz, 9–11, 26  
 Satz über ähnliche Dreiecke, 198–199  
 Satz über das Doppelverhältnis von Polaren,  
   167  
 Satz vom Gnomon, 189–190  
 Satz vom Pedaldreieck, 18  
 Satz vom Tangentenviereck, 21  
 Satz von Apollonius, 66  
 Satz von Archimedes über harmonische  
   Punkte, 67  
 Satz von Blanchet, 60  
 Satz von Bodenmiller-Steiner, 61  
 Satz von Brianchon, 144–145  
 Satz von Brianchon für Kreise, 76–77  
 Satz von Carnot, 40  
 Satz von Carnot für Kegelschnitte, 168  
 Satz von Ceva, 54–55, 165  
 Satz von Chasles, 179  
 Satz von der konstanten Sehne, 16  
 Satz von Desargues, 121–122  
   kleiner, 122  
 Satz von Fermat-Torricelli, 158  
 Satz von Gauss-Newton, 61  
 Satz von Hesse, 181  
 Satz von La Hire, 70  
 Satz von Menelaos, 56–57, 165  
 Satz von Mohr-Mascheroni, 156  
 Satz von Monge, 86, 92  
 Satz von Morley, 182, 185  
 Satz von Moss, 158  
 Satz von Nagel, 160  
 Satz von Pappos, 59  
 Satz von Pascal, 142  
 Satz von Pascal für Kreise, 13–14  
 Satz von Poncelet-Steiner, 157  
 Satz von Ptolemäus, 20  
 Satz von Pythagoras, 201–202  
 Satz von Rytz, 150

- Satz von Schwarz, 60
- Satz von Simson-Wallace, 18
- Satz von Steiner, 109
- Satz von Thales, 6–7, 25
- Satz von Viviani, 159
- Schliessungssatz von Miquel, 17
- Schliessungssatz von Poncelet, 174
- Sehnensatz, 27–28
- Sekanten-Tangenten-Satz, 29
- Sekantensatz, 31
- Schustermesser, 112
- Schwarz, Hermann Amandus, 64
- Servois, François Joseph, 82
- Simson, Robert, 26, 82
- Simson-Gerade, 18, 25
- Steiner, Jakob, 42, 63, 64, 115, 157
- Steiner-Konstruktionen, 157
- Steiner-Kreise, 153
- Steinerbaumproblem, 159
- Sturm, Jacques Charles François, 188
  
- Tangentenviereck, 21, 22
- Teilung
  - harmonisch, 43
  - Teilverhältnis, 165
- Teilungspunkt
  - äusserer, 43
  - innerer, 43
- Teilverhältnis, 165
- Thales von Milet, 5, 25, 208
- Thaleskreis, 7
- Theon von Alexandrien, 208
- Theudios, 26
- Tomahawk, 155
- Torricelli, Evangelista, 159
  
- trilineare Polare, 176
- trilineare Polarität, 176–178
- trilinearer Pol, 178
  
- Umkreismittelpunkt, 164
  
- verallgemeinerter Apolloniuskreis, 162
- Viète, François, 84, 97
- Vieta, Franciscus, 97
- Viviani, Vincenzo, 159
- vollständiges Vierseit, 50, 61, 64, 120
  - Diagonalen, 50
- von Nagel, Christian Heinrich, 188
  
- Wallace, William, 26
- Weland, Woldegk, 82
- Whisker-Lemma, 161
- Winkeldreiteilung, 155, 182
- winkeltreu, 105
  
- Zentralprojektion, 117–118
  - Fluchtebene, 118
  - Fluchtgerade, 118
  - Fluchtpunkt, 119
  - Projektionszentrum, 117
  - Verschwindungsebene, 117
  - Verschwindungsgerade, 117
  - von Geraden, 118–122
  - von Kreisen, 122–139
- zentrische Streckung, 191–193
  - Ähnlichkeitsverhältnis, 191
  - Ähnlichkeitszentrum, 191
  - Streckungsfaktor, 191