Über ein Theorem von Hans Läuchli

Lorenz Halbeisen

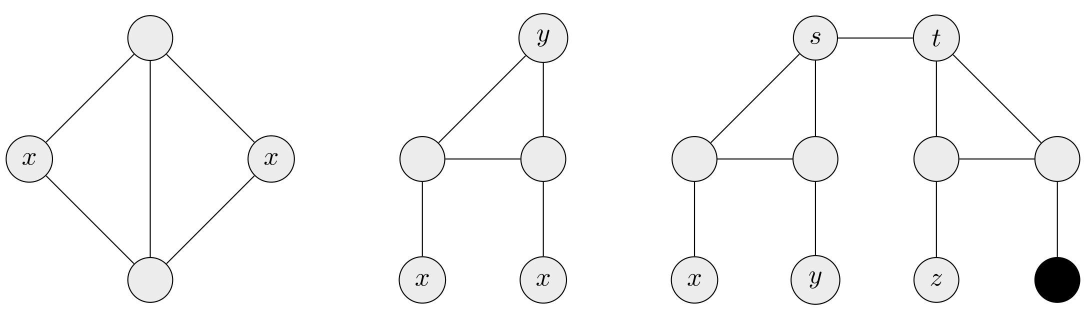
Abstract. Für natürliche Zahlen n sei P_n die folgende Aussage: Ist G ein unendlicher Graph, all dessen endliche Teilgraphen n-färbbar sind, so ist auch G selber n-färbbar. 1961 hat Mycielski gezeigt, dass P_n (für beliebige n) aus dem Primidealtheorem folgt. Umgekehrt gelang es Läuchli 1971 zu zeigen, dass das Primidealtheorem aus P_3 folgt, womit also für alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 3$ gilt: $\mathsf{P}_m \Leftrightarrow \mathsf{P}_n$. Der Beweis, den Läuchli gegeben hat, ist relativ kompliziert, und am Schluss seines Beweises stellt er die Aufgabe, einen direkten Beweis für $\mathsf{P}_3 \Rightarrow \mathsf{P}_4$ zu finden (also ohne das Primidealtheorem zu benutzen). Das Ziel dieses Artikels ist es nun, einen solchen Beweis zu führen.

1 Färben von Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V von *Knoten* zusammen mit einer Menge E von *Kanten* zwischen den Knoten, *d.h.* E ist eine Menge von 2-elementigen Teilmengen von V. Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $A \subseteq V$ eine Menge von Knoten von G, so bezeichnet $G|_A$ den Teilgraphen $G = (A, E_A)$ mit der Knotenmenge A und der Kantenmenge

$$E_A = \big\{\{x, y\} : x, y \in A \text{ und } \{x, y\} \in E\big\}\,.$$

Ein Graph $G = (V, E)$ heisst *n-färbbar* falls es eine Färbung $F : V \to \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass für alle Kanten $\{x, y\} \in E$ gilt: $F(x) \neq F(y)$. Als Beispiele für 3-färbbare Graphen schauen wir uns die folgenden drei speziellen Graphen an, die später eine wesentliche Rolle spielen und die wir mit den "Farben" grau ($\mathtt{g}$), schwarz ($\mathtt{s}$) und weiss ($\mathtt{w}$) färben werden:



xx-Graph $\quad$ xxy-Graph $\quad$ xyz-Graph

Da jeder der drei Graphen ein Dreieck enthält, ist keiner dieser Graphen 2-färbbar. Andererseits sind, wie man sich leicht überzeugt, alle drei Graphen 3-färbbar. Weiter sehen wir, dass die Graphen folgende Eigenschaften haben:

- Bei jeder 3-Färbung des xx-Graphen haben die beiden mit x bezeichneten Knoten dieselbe Farbe. Wird also *z.B.* einer der beiden Knoten x mit `w` gefärbt, so wird bei einer 3-Färbung auch der andere Knoten x mit `w` gefärbt.
- Werden bei einer 3-Färbung des xxy-Graphen die beiden mit x bezeichneten Knoten mit derselben Farbe gefärbt, so hat auch der Knoten y diese Farbe. Werden also *z.B.* die mit x bezeichneten Knoten mit `s` gefärbt, so wird bei einer 3-Färbung auch der Knoten y mit `s` gefärbt.
- Bei einer 3-Färbung des xyz-Graphen können die Knoten x, y, z nicht alle mit `s` gefärbt werden, da sonst wegen der Eigenschaft des xxy-Graphen auch die beiden Knoten s und t mit `s` gefärbt würden, was aber der Definition einer 3-Färbung widerspricht. Werden also *z.B.* die Knoten x und y mit `s` gefärbt, so kann bei einer 3-Färbung der Knoten z *nicht* mit `s` gefärbt werden.

BEMERKUNG: An dieser Stelle sei erwähnt, dass der xyz-Graph von STOCKMEYER [4] benutzt wurde um zu zeigen, dass das Problem der 3-Färbbarkeit eines endlichen Graphen NP-vollständig ist, *bzw.* dass es im Wesentlichen gleich schwierig ist wie das sogenannte 3-SAT-Problem.

Kommen wir nun zu LÄUCHLIS Theorem, *bzw.* zur Aussage P_n (für natürliche Zahlen n):

> P_n: *Ist $G = (V, E)$ ein unendlicher Graph, so dass für alle endlichen Teilmengen $A \subseteq V$ der Graph $G|_A$ n-färbbar ist, so ist auch G selber n-färbbar.*

MYCIELSKI [3] hat gezeigt, dass P_n (für beliebige n) aus dem Primidealtheorem folgt, wobei das Primidealtheorem eine abgeschwächte Form des Auswahlaxioms ist. Umgekehrt gelang es LÄUCHLI [2] zu zeigen, dass das Primidealtheorem aus P_3 folgt, womit also für alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 3$ gilt: $\mathsf{P}_m \Leftrightarrow \mathsf{P}_n$. Der Beweis, den LÄUCHLI gegeben hat, ist relativ kompliziert, und am Schluss seines Beweises stellt er die Aufgabe, einen direkten Beweis für $\mathsf{P}_3 \Rightarrow \mathsf{P}_4$ zu finden. Im nächsten Abschnitt lösen wir nun diese Aufgabe indem wir die Implikation $\mathsf{P}_3 \Rightarrow \mathsf{P}_n$ (für $n \geq 2$) direkt beweisen. Die Hauptideen unseres Beweises sind im Wesentlichen dieselben wie in COWEN [1, Theorem 4], der LÄUCHLIS Theorem mit Hilfe des xyz-Graphen gezeigt hat, ausser dass unser Ziel nicht die Herleitung des Primidealtheorems aus P_3 ist, sondern direkt die Aussage P_n, ohne das Primidealtheorem zu erwähnen.

2 $\mathsf{P}_3 \Rightarrow \mathsf{P}_n$ für alle $n \geq 2$

Um die Implikation $\mathsf{P}_3 \Rightarrow \mathsf{P}_2$ zu zeigen nehmen wir einen beliebigen Graphen $G = (V, E)$, all dessen endliche Teilgraphen 2-färbbar sind, und zeigen, dass unter der Annahme P_3 der ganze Graph G 2-färbbar ist. Dazu fügen wir zu V einen weiteren Knoten z hinzu und erweitern die Kantenmenge E mit den Kanten $\big\{\{x,z\} : x \in V\big\}$. Der so erhaltene Graph G_z hat die Eigenschaft, dass jeder endliche Teilgraph 3-färbbar ist. Mit P_3 ist also der ganze Graph G_z 3-färbbar. Da nun jede 3-Färbung von G_z eine 2-Färbung von G ist, ist G 2-färbbar, und weil G beliebig war, erhalten wir P_2.

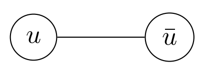
Um die Implikation $\mathsf{P}_3 \Rightarrow \mathsf{P}_n$ (für $n > 3$) zu zeigen, müssen wir etwas weiter ausholen: Sei $G = (V, E)$ ein unendlicher Graph (*d.h.* V ist unendlich), so dass für alle endlichen Teilmengen $A \subseteq V$ der Graph $G|_A$ n-färbbar ist. Mit Hilfe von P_3 zeigen wir, dass auch G selber n-färbbar ist. Dazu konstruieren wir aus G zuerst einen Graphen G_3, und zeigen mit P_3, dass dieser Graph 3-färbbar ist. Mit einer 3-Färbbung von G_3 konstruieren wir schliesslich eine n-Färbbung von G.

Zuerst konstruieren wir also den Graphen $G_3 = (V_3, E_3)$: Dazu sei S die Menge aller Funktionen $f : V \to \{1, \ldots, n\}$. Die Menge S kann aufgefasst werden als die Menge aller möglichen Färbungen der Knotenmenge V mit n Farben. Wir betrachten nun jede Teilmenge $u \subseteq S$ als einen Knoten in V_3:

$$\big\{u : u \subseteq S\big\} \subseteq V_3$$

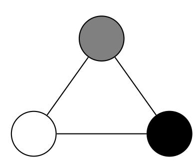
Nun fügen wir erste Kanten hinzu, indem wir jeden Knoten $u \subseteq S$ mit seinem Komplement $\bar{u} := S \setminus u$ verbinden:

$$\big\{\{u, \bar{u}\} : u \subseteq S\big\} \subseteq E_3$$



Weiter zeichnen wir einen Graphen, der aus drei Knoten und drei Kanten besteht; die Knoten dieses Graphen färben wir mit den drei "Farben" grau ($\mathtt{g}$), schwarz ($\mathtt{s}$) und weiss ($\mathtt{w}$):

$$\big\{\{\mathtt{g}, \mathtt{s}\}, \{\mathtt{s}, \mathtt{w}\}, \{\mathtt{w}, \mathtt{g}\}\big\} \subseteq E_3$$

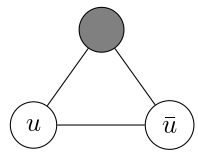


Fundamentaldreieck

Vom grauen Knoten des Fundamentaldreiecks ziehen wir nun Kanten zu jedem Knoten $u \subseteq S$:

$$\big\{\{\mathtt{g}, u\} : u \subseteq S\big\} \subseteq E_3$$

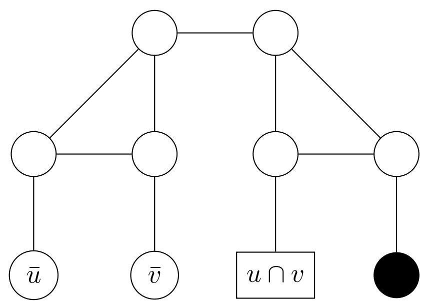
Für jedes $u \subseteq S$ (*bzw.* $\bar{u} \in S$) enthält G_3 somit folgenden Teilgraphen:



$u\bar{u}$-Graph

Wird dieser Teilgraph mit unseren drei Farben gefärbt, so wird einer der Knoten $u, \bar{u}$ schwarz und der andere weiss gefärbt.

Weiter fügen wir für jeweils zwei verschiedene Mengen $u, v \subseteq S$ einen xyz-Graphen an, wobei wir den schwarz gefärbten Knoten mit dem schwarz gefärbten Knoten des Fundamentaldreiecks identifizieren:



$\bar{u}\bar{v}\, u{\cap}v$-Graph

Wird dieser Graph mit unseren drei Farben gefärbt, so haben, wegen der Eigenschaft des xyz-Graphen, nicht alle drei Knoten $\bar{u}, \bar{v}, u \cap v$ die Farbe schwarz. Andererseits werden die Knoten $\bar{u}, \bar{v}, u \cap v$, weil $\bar{u}, \bar{v}, u \cap v$ Teilmengen von S sind, durch die $u\bar{u}$-Graphen entweder mit schwarz oder weiss gefärbt. Somit wird bei einer 3-Färbung des ganzen Graphen G_3 mindestens einer der Knoten $\bar{u}, \bar{v}, u \cap v$ weiss gefärbt.

Im letzten Schritt der Konstruktion von G_3 fügen wir xx-Graphen hinzu, die erzwingen, dass bei einer 3-Färbbung von G_3 gewisse Knoten $u \subseteq S$ weiss gefärbt werden. Dazu definieren wir für Teilmengen $A \subseteq V$ die Menge χ_A als die Menge aller Färbungen $f \in S$, so dass die Einschränkung von f auf A eine n-Färbung von $G|_A$ ist; mit anderen Worten:

$$\chi_A := \left\{ f \in S : f|_A \text{ ist eine } n\text{-Färbung von } G|_A \right\}$$

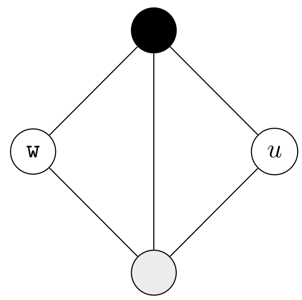
Weil nach Voraussetzung jeder endliche Teilgraph von G n-färbbar ist, gilt für jede *endliche* Teilmenge $A \subseteq V$, bezeichnet mit $A \in \mathrm{fin}(V)$, dass die Menge χ_A nicht leer ist. Insbesondere haben wir $\chi_\emptyset = S$. Weiter gilt für alle endlichen Teilmengen $A, B \in \mathrm{fin}(V)$,

$$\chi_A \cap \chi_B = \chi_{A \cup B} \,.$$

Nun betrachten wir die Menge $\mathscr{W}$ aller Knoten $u \subseteq S$, für die ein $A \in \operatorname{fin}(V)$ existiert mit $\chi_A \subseteq u$, d.h.

$$\mathscr{W} := \left\{ u \subseteq S : \exists A \in \operatorname{fin}(V)\,(\chi_A \subseteq u) \right\}.$$

Für jede Menge $u \in \mathscr{W}$ fügen wir einen xx-Graphen an, wobei wir den weiss gefärbten Knoten mit dem weiss gefärbten Knoten des Fundamentaldreiecks identifizieren:



$\mathtt{w}u$-Graph

Dieser letzte Schritt schliesst die Konstruktion des Graphen $G_3 = (V_3, E_3)$ ab und der Graph G_3 besteht somit aus dem Fundamentaldreieck, den $u\bar{u}$-Graphen (für $u \subseteq S$), den $\bar{u}\bar{v}u{\cap}v$-Graphen (für $u, v \subseteq S$), sowie den $\mathtt{w}u$-Graphen (für $u \in \mathscr{W}$).

Wir zeigen nun, dass der Graph G_3 3-färbbar ist. Mit P_3 genügt es zu zeigen, dass jeder endliche Teilgraph von G_3 3-färbbar ist. Dazu betrachten wir zuerst die Knoten $u \in \mathscr{W}$. Diese haben wegen den $\mathtt{w}u$-Graphen alle die Farbe weiss. Wegen den $u\bar{u}$-Graphen haben dann alle Knoten $\bar{u}$ mit $u \in \mathscr{W}$ die Farbe schwarz. Schliesslich können wegen den $\bar{u}\bar{v}u{\cap}v$-Graphen nicht alle drei Knoten $\bar{u}$, $\bar{v}$, $u \cap v$ die Farbe schwarz haben. Das heisst, falls $u, v \in \mathscr{W}$ (d.h. $\bar{u}, \bar{v}$ schwarz gefärbt), so muss $u \cap v$ weiss gefärbt werden (weil $u \cap v \subseteq S$ kann $u \cap v$ nicht grau gefärbt werden). Diese Bedingungen sind von den Knoten aus $\mathscr{W}$ erfüllt:

(a) Ist $u \in \mathscr{W}$, dann ist $\bar{u} \notin \mathscr{W}$.

(b) Sind $u, v \in \mathscr{W}$, dann ist auch $u \cap v \in \mathscr{W}$.

zu (a): Ist $u \in \mathscr{W}$, so existiert ein $A \in \operatorname{fin}(V)$ mit $\chi_A \subseteq u$. Wäre nun $\bar{u}$ auch in $\mathscr{W}$, so gäbe es ein $B \in \operatorname{fin}(V)$ mit $\chi_B \subseteq \bar{u}$. Dann wäre

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A \cap \chi_B \subseteq u \cap \bar{u} = \emptyset$$

was aber nicht sein kann, da $A \cup B$ eine endliche Teilmenge von V ist und somit $\chi_{A \cup B}$ nicht leer ist.

zu (b): Seien $u, v \in \mathscr{W}$, und seien $A, B \in \text{fin}(V)$ so, dass $\chi_A \subseteq u$ und $\chi_B \subseteq v$. Dann ist $\chi_{A\cup B} \subseteq u \cap v$, also $u \cap v \in \mathscr{W}$.

Nun zeigen wir, dass jeder endliche Teilgraph von G_3 3-färbbar ist. Dazu nehmen wir irgend eine endliche Teilmenge $A \in \text{fin}(V_3)$. Indem wir die Menge A erweitern dürfen wir annehmen, dass mit jedem Knoten $u \subseteq S$ der in A ist auch $\bar{u}$ in A ist. Für

$$\bar{\mathscr{W}} := \{\bar{u} : u \in \mathscr{W}\}$$

betrachten wir folgende beiden Teilmengen von A:

$$\begin{aligned} \{u_1, \ldots, u_m\} &:= A \cap \mathscr{W} \\ \{v_1, \ldots, v_n\} &:= \big(A \cap \{v : v \subseteq S\}\big) \setminus (\mathscr{W} \cup \bar{\mathscr{W}}) \end{aligned}$$

Die Menge $\{u_1, \ldots, u_m\}$ sind diejenigen Knoten aus A die zwingend weiss gefärbt werden, und die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sind diejenigen Knoten aus A, die Teilmengen von S sind und deren Farbe noch nicht festgelegt ist. Da $\{u_1, \ldots, u_m\}$ eine endliche Teilmenge von $\mathscr{W}$ ist, folgt aus den Eigenschaften von $\mathscr{W}$, dass auch $\bigcap_{i=1}^m u_i$ in $\mathscr{W}$ ist. Es gilt sogar, weil V unendlich ist, dass $\bigcap_{i=1}^m u_i$ eine unendliche Menge ist. Nun färben wir v_1 wie folgt: Ist $v_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$ unendlich, so färben wir v_1 weiss, andernfalls ist $\bar{v}_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$ unendlich und wir färben $\bar{v}_1$ weiss. Für v_2 betrachten wir, im Fall dass v_1 weiss gefärbt wurde, die Mengen $v_2 \cap v_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$ und $\bar{v}_2 \cap v_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$, wobei wieder mindestens eine dieser Mengen unendlich ist und wir das entsprechende v_2 oder $\bar{v}_2$ weiss färben. Wurde $\bar{v}_1$ weiss gefärbt, so betrachten wir die Mengen $v_2 \cap \bar{v}_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$ und $\bar{v}_2 \cap \bar{v}_1 \cap \bigcap_{i=1}^m u_i$. Analog gehen wir vor für $v_3, \ldots, v_n$. Diese Färbung lässt sich dann zu einer 3-Färbung von $G_3|_A$ erweitern, womit gezeigt ist, dass jeder endliche Teilgraph von G_3 3-färbbar ist. Mit P_3 ist also der ganze Graph G_3 3-färbbar.

Im letzten Schritt konstruieren wir aus einer 3-Färbung F von G_3 eine n-Färbung von G. Sei also $F : V_3 \to \{\mathtt{g}, \mathtt{s}, \mathtt{w}\}$ eine 3-Färbung von G_3. Für $x \in V$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$u_{x,i} := \{f \in S : f(x) = i\}.$$

Dann ist $\bigcup_{i=1}^n u_{x,i} = S$ und für $i \neq i'$ gilt $u_{x,i} \cap u_{x,i'} = \emptyset$. Damit erhalten wir für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\bar{u}_{x,i} = \{f \in S : f(x) \neq i\}$, d.h.

$$\bar{u}_{x,i} = \bigcup_{j \neq i} u_{x,j}.$$

Weil $u_{x,i} \subseteq S$, erhalten wir mit der Färbung F für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$, dass entweder $u_{x,i}$ oder $\bar{u}_{x,i}$ weiss gefärbt ist. Weiter gilt für $i \neq i'$, dass nicht beide Knoten $u_{x,i}$ und $\bar{u}_{x,i}$ weiss gefärbt sein können, da sonst auch $\emptyset$ weiss gefärbt wäre, was aber nicht sein kann da $S \in \mathscr{W}$ und somit $\emptyset \in \bar{\mathscr{W}}$. Daraus folgt, dass es höchstens ein $i_x \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass u_{x,i_x} durch die Färbung F weiss gefärbt ist. Andererseits lässt sich mit ähnlichen Überlegungen zeigen, dass es mindestens ein $i_x \in \{1, \ldots, n\}$ geben muss, so dass u_{x,i_x} durch die Färbung F weiss gefärbt ist. Somit gibt es für jedes $x \in V$ *genau ein* $i_x \in \{1, \ldots, n\}$, so dass u_{x,i_x} durch die Färbung F weiss gefärbt ist.

Für jeden Knoten $x \in V$ sei nun $i_x \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass gilt:

$$F\big(u_{x,i_x}\big) = \mathtt{w}$$

Die daraus abgeleitete Färbung

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & V & \to & \{1, \ldots, n\} \\ & x & \mapsto & i_x \end{array}$$

der Knotenmenge V ist dann eine Färbung von $G = (V, E)$ mit n Farben, so dass nach Konstruktion die Einschränkung der Färbung γ auf einen endlichen Teilgraphen von G eine n-Färbung des Teilgraphen ist. Somit ist γ eine n-Färbung von G, *d.h.* der Graph G ist n-färbbar, was zu zeigen war.

References

[1] Robert H. Cowen, *Two hypergraph theorems equivalent to BPI*, **Notre Dame Journal of Formal Logic**, vol. 31(2), 1990, 232–240.

[2] Hans Läuchli, *Coloring infinite graphs and the Boolean prime ideal theorem*, **Israel Journal of Mathematics**, vol. 9, 1971, 422–429.

[3] Jan Mycielski, *Some remarks and problems on the colouring of infinite graphs and the theorem of Kuratowski*, **Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae**, vol. 12, 1961, 125–129.

[4] Larry Stockmeyer, *Planar* 3*-colorability is polynomial complete*, **ACM SIGACT News**, vol. 5(3), 1973, 19–25.