Autor-Referat der Habilitationsschrift

COMBINATORIAL PROPERTIES OF SETS OF PARTITIONS

von Lorenz Halbeisen

Kombinatorik, insbesondere unendliche Kombinatorik, ist ein facettenreiches Gebiet der Mathematik, welches schwierig zu definieren ist. Wir wollen trotzdem versuchen, eine Definition von Kombinatorik zu geben. Diese ist hinreichend für das Weitere.

> *Kombinatorik ist das Gebiet der Mathematik welches Mengen von Objekten mit gewissen Eigenschaften untersucht, wobei im Speziellen danach gefragt wird, wie gross oder wie klein solche Mengen sein können.*

Die folgenden fünf Aussagen werden verschiedene Aspekte der unendlichen Kombinatorik illustrieren, welche in der vorgelegten Arbeit eine Rolle spielen. Zuerst sollen jedoch eine Anzahl Grundbegriffe erklärt werden.

Axiome sind die elementaren Bausteine einer mathematischen Theorie. Ein Axiom ist eine Aussage, die nicht aus den übrigen Axiomen derselben Theorie folgt. Zum Beispiel ist die Aussage "durch zwei verschiedene Punkte der Ebene geht genau eine Gerade" ein Axiom der Geometrie Euklids; oder "für jede natürliche Zahl n gilt: $n + 0 = n$" ist ein Axiom der Arithmetik, wobei man unter den natürlichen Zahlen die Zahlen $0, 1, 2, \dots$ versteht. Eine Menge von Axiomen nennt man Axiomensystem. Ein Axiomensystem heisst *widerspruchsfrei* wenn aus ihm kein Widerspruch hergeleitet werden kann. Es lässt sich zeigen, dass aus einer nicht widerspruchsfreien Menge von Aussagen (oder Axiomen) jede beliebige Aussage hergeleitet werden kann. Widerspruchsvolle Aussagenmengen sind also nutzlos. Zu zeigen, dass ein Axiomensystem widerspruchsfrei ist, ist im Allgemeinen unmöglich. Dennoch nimmt man an, dass zum Beispiel die Arithmetik widerspruchsfrei ist, denn in den letzten mehr als dreitausend Jahren ist noch kein Widerspruch beim Rechnen mit natürlichen Zahlen aufgetreten. Mit Gödels Vollständigkeitssatz gilt auch: ein Axiomensystem ist genau dann widerspruchsfrei, wenn es ein mathematisches oder reales Modell dafür gibt. Ein Modell der Euklidschen Geometrie wäre zum Beispiel der dreidimensionale Raum, so wie man sich ihn vorstellt; und ein Modell der Arithmetik sind die natürlichen Zahlen.

Eine Aussage heisst *konsistent* mit einem widerspruchsfreien Axiomensystem, wenn die Aussage aus dem Axiomensystem folgt, oder wenn das um die Aussage erweiterte Axiomensystem widerspruchsfrei bleibt. Ferner ist eine Aussage *unabhängig* von einem Axiomensystem, wenn weder die Aussage noch ihre Negation aus dem Axiomensystem herleitbar ist. Zum Beispiel war lange unklar, ob sich das Parallelenaxiom, das besagt, dass sich zwei Parallelen nie schneiden, aus den übrigen Axiomen der Geometrie von Euklid herleiten lässt. Im neunzehnten Jahrhundert konnte man aber zeigen, dass das Parallelenaxiom von den übrigen Axiomen der Geometrie unabhängig ist.

Das erste Beispiel zur Illustration der unendlichen Kombinatorik stammt aus der Graphentheorie:

AUSSAGE 1 (Königs Lemma). Ein sogenannter Graph besteht aus Knoten und Verbindungslinien zwischen Knoten, welche Kanten genannt werden. Typische Beispiele für Graphen sind Strassennetze, wobei die Kreuzungen den Knoten und die Strassenabschnitte zwischen Kreuzungen den Kanten entsprechen. Andere Beispiele für Graphen sind Bäume, wobei die Verästelungen den Knoten und die dazwischenliegenden Astabschnitte den Kanten entsprechen. Ein Graph ist *unendlich*, wenn er unendlich viele Knoten enthält, und er ist *endlich verzweigend*, wenn von jedem Knoten nur endlich viele Kanten ausgehen. Königs Lemma [8, VI, §2, Satz 6] besagt nun, dass ein unendlicher Baum, der endlich verzweigend ist, immer einen unendlich langen Ast besitzt.

Obwohl dieser Sachverhalt einleuchtend ist, lässt sich Königs Lemma nicht ohne Hilfe einer schwachen Form des Auswahlaxioms beweisen. Das volle *Auswahlaxiom* besagt, dass es für jede Familie von nicht-leeren Mengen eine Funktion gibt, die aus jeder Menge eines ihrer Elemente auswählt. Wenn wir zum Beispiel unendlich viele Paar Schuhe haben, so können wir aus jedem Paar Schuhe den linken Schuh auswählen, aber wenn wir anstelle der Schuhe unendlich viele Paar Socken nehmen, so können wir ohne die Hilfe des Auswahlaxioms nicht mehr aus jedem Paar Socken einen auswählen. Dies liegt daran, dass wir kein direktes Auswahlkriterium (es gibt keine linken Socken) haben und somit der Auswahlprozess unendlich lange dauern würde. Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass Königs Lemma aus dem Auswahlaxiom folgt. Andererseits ist Königs Lemma äquivalent zu einer schwachen Form des Auswahlaxioms (siehe [7, Form 10]). Es ist bekannt, dass nicht nur das Auswahlaxiom, sondern auch Königs Lemma und viele andere abgeschwächte Versionen des Auswahlaxioms unabhängig sind vom sogenannten *Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem der Mengenlehre*, abgekürzt ZF. Im Folgenden nehmen wir immer an, dass das Axiomensystem ZF wiederspruchsfrei ist. Das Axiomensystem ZF besteht aus acht Axiomen. Eines davon ist zum Beispiel das Unendlichkeitsaxiom, welches besagt, dass es unendliche Mengen gibt. Da Königs Lemma unabhängig ist vom Zermelo-Fraenkelschen

Axiomensystem ZF, gibt es also sowohl Modelle vom Axiomensystem ZF, das heisst Modelle der Mengenlehre, in welchen Königs Lemma wahr ist, wie auch Modelle in welchen Königs Lemma falsch ist. Wir sehen also, dass sogar solch ein grundlegendes kombinatorisches Resultat wie Königs Lemma mit den Axiomen aus ZF weder bewiesen noch widerlegt werden kann.

Dieses erste Beispiel zeigt, dass, abhängig vom zugrunde gelegten Modell der Mengenlehre, Objekte gewisse Eigenschaften haben oder nicht.

Das Axiomensystem der Mengenlehre, das im Folgenden betrachtet wird, ist das Axiomensystem ZF zusammen mit dem Auswahlaxiom, und das gesamte Axiomensystem wird mit ZFC bezeichnet, wobei C für "choice" steht.

Wie bereits oben erwähnt versteht man unter den natürlichen Zahlen die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$. Im Folgenden werden immer wieder die natürlichen Zahlen, oder gewisse Mengen natürlicher Zahlen, mit zwei Farben gefärbt, und es wird untersucht ob es eine "grosse" monochromatische (*d.h.* einfärbige) Menge gibt. Eine Färbung mit zwei Farben nennt man auch eine 2-Färbung. Eine 2-Färbung der natürlichen Zahlen mit rot und blau ist zum Beispiel die Färbung, wo n rot ist, wenn n eine Primzahl ist. Bezüglich dieser Färbung findet sich sowohl eine unendliche monochromatisch rote wie auch eine unendliche monochromatisch blaue Menge natürlicher Zahlen. Betrachtet man zum Beispiel die 2-Färbung der 2-elementigen Mengen natürlicher Zahlen mit rot und blau, wo das Paar $\{n, n+2\}$ rot ist, wenn beide Zahlen Primzahlen sind (*z.B.* sind die Paare $\{3, 5\}$, $\{5, 7\}$, $\{11, 13\}$, $\{17, 19\}$ alle rot), so weiss man nicht, ob die Menge der roten Paare unendlich ist.

Das nächste Beispiel ist aus dem Gebiet der Extremalkombinatorik und illustriert den zweiten Teil unserer Definition: "wie gross oder wie klein Mengen von Objekten mit gewissen Eigenschaften sein können". Ein typisches Beispiel aus der Extremalkombinatorik ist die Frage, wieviele Personen an einer Party anwesend sein müssen, damit wir sicher drei Personen finden, die sich alle gegenseitig kennen, oder alle gegenseitig nicht kennen.

AUSSAGE 2. Eine Menge von unendlichen Mengen natürlicher Zahlen heisst *ausschöpfend* (*engl. reaping*) wenn es für jede 2-Färbung der natürlichen Zahlen eine monochromatische Menge aus dieser Menge gibt. Die sogenannte *Ausschöpfungszahl* (*engl. reaping number*) $\mathfrak{r}$ ist die minimale Grösse einer ausschöpfenden Menge. Nun ergibt sich die Frage: Wie gross ist die Ausschöpfungszahl $\mathfrak{r}$?

Um diese Frage zu beantworten, muss zuerst der Kardinalzahlbegriff eingeführt werden. Kardinalzahlen, oder Kardinalitäten, messen die Grösse von Mengen. Zwei Mengen sind gleich gross, wenn sie dieselbe Kardinalität haben. Zum Beispiel sind alle natürlichen Zahlen auch Kardinalzahlen (*z.B.* ist 1 die Kardinalität einer Menge, die genau ein Element enthält). Kardinalzahlen können aber auch unendlich sein.

Die kleinste unendliche Kardinalzahl ist die Kardinalität der Mengen, die abgezählt werden können aber nicht endlich sind. Offensichtlich ist die Menge der natürlichen Zahlen von dieser Kardinalität. Aber auch die Menge der rationalen Zahlen, das heisst Zahlen der Form p/q, wobei p und $q \neq 0$ ganze Zahlen sind, ist abzählbar und so ebenfalls von der kleinsten unendlichen Kardinalität. Georg Cantor hat gezeigt, dass die reellen Zahlen nicht abgezählt werden können, was bedeutet, dass die Kardinalität der Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist. Da die Menge der reellen Zahlen auch das "Continuum" genannt wird, bezeichnet man die Kardinalität der reellen Zahlen mit $\mathfrak{c}$.

Zurück zur Frage wie gross die Ausschöpfungszahl $\mathfrak{r}$ ist: Es lässt sich einfach zeigen, dass $\mathfrak{r}$ nicht abzählbar sein kann und dass stehts $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{c}$ gilt. Wenn wir die *Continuumshypothese* annehmen, die besagt, dass jede überabzählbare Menge mindestens so gross ist, wie die Menge der reellen Zahlen, so ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{c}$. Andererseits kann mit Paul Cohens sogenannter *Forcing Technik* gezeigt werden, dass diese Aussage unabhängig ist von ZFC. Mit anderen Worten, mit den Axiomen ZFC alleine lässt sich weder entscheiden, ob $\mathfrak{r}$ gleich $\mathfrak{c}$ ist, oder ob $\mathfrak{r}$ echt kleiner als $\mathfrak{c}$ ist. Die Forcing Technik ist eine raffinierte Methode um solche und andere Unabhängigkeitsresultate zu erreichen.

Dieses zweite Beispiel zeigt, dass wir – abhängig vom zugrunde gelegten Modell der Mengenlehre – verschiedene Antworten, auf die Frage "wie gross oder wie klein Mengen von Objekten mit gewissen Eigenschaften sein können", erhalten.

Ein anderes Gebiet der Kombinatorik ist die sogenannte Ramsey Theorie. Weil viele Resultate der vorliegenden Arbeit "Partitions-Versionen" von klassischen Theoremen aus der Ramsey Theorie sind, möchte ich eine kurze Beschreibung der Ramsey Theorie geben.

Grob gesprochen ist die Ramsey Theorie das Gebiet der Kombinatorik, welches Strukturen untersucht, die erhalten bleiben wenn man die Grundmenge färbt oder partitioniert. Zum Beispiel das Theorem von van der Waerden: Färbt man die natürlichen Zahlen mit endlich vielen Farben, so findet man immer beliebig lange monochromatische arithmetische Folgen (eine arithmetische Folge der Länge vier ist *z.B.* $23, 26, 29, 32$). Oder ein anderes Resultat sagt, dass wenn alle Punkte der Ebene mit endlich vielen Farben gefärbt werden, dann gibt es immer drei monochromatische Punkte, die ein rechtwinkliges Dreieck der Fläche eins bilden. Auch das obengenannte Partyproblem ist ein typisches Beispiel aus der Ramsey Theorie, und es lässt sich einfach zeigen, dass mindestens sechs Personen eingeladen werden müssen. Auf die Frage, wieviele Personen mindestens eingeladen werden müssen, um sicherzustellen, dass mindestens fünf Personen darunter sind, die sich alle gegenseitig kennen oder alle gegenseitig nicht kennen, ist die Antwort jedoch noch immer unbekannt. Es wird aber vermutet, dass mindestens 43 Personen eingeladen werden müssen (siehe [10]).

Sicherlich das berühmteste Resultat der Ramsey Theorie ist Ramseys Theorem.

Das folgende Beispiel ist eine leicht vereinfachte Version des Ramsey Theorems [11, Theorem A]:

AUSSAGE 3 (Ramsey Theorem). Werden alle 2-elementigen Mengen natürlicher Zahlen mit zwei Farben gefärbt, so gibt es immer eine unendliche Menge natürlicher Zahlen, so dass all deren 2-elementigen Teilmengen dieselbe Farbe haben.

Aus dem Ramsey Theorem folgt zum Beispiel, dass wenn man alle Paare natürlicher Zahlen mit den zwei Farben rot und blau färbt, und zwar so, dass $\{n, m\}$ rot ist, wenn $2 \cdot n \cdot m + 1$ eine Primzahl ist, und blau sonst, so findet man eine unendliche Menge natürlicher Zahlen, so dass all deren 2-elementigen Teilmengen dieselbe Farbe haben. Mit anderen Worten, entweder gilt für jedes Paar $\{n, m\}$ aus dieser Menge, dass $2 \cdot n \cdot m + 1$ eine Primzahl ist, oder keine der Zahlen $2 \cdot n \cdot m + 1$ ist eine Primzahl.

Das Ramsey Theorem hat Anwendungen in den verschiedensten Gebieten der Mathematik, wie zum Beispiel der Banachraumtheorie (siehe [9] oder [5]), oder der Mengenlehre ohne Auswahlaxiom (siehe *z.B.* [6, Proposition 7.3.1]).

Wenn die zu färbenden Objekte unendlich sind, kann man nicht mehr damit rechnen, grosse homogene monochromatische Strukturen zu finden. Man kann aber untersuchen, welche Färbungen solche Strukturen erzeugen. Dieses Vorgehen illustriert folgendes Beispiel.

AUSSAGE 4 (Ramsey Eigenschaft). Eine 2-Färbung aller unendlichen Mengen natürlicher Zahlen hat die *Ramsey Eigenschaft*, wenn es eine unendliche Menge natürlicher Zahlen gibt, so dass all deren unendlichen Teilmengen dieselbe Farbe haben.

Mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man eine 2-Färbung der unendlichen Mengen natürlicher Zahlen definieren, welche nicht die Ramsey Eigenschaft hat. Andererseits ist es konsistent mit dem Axiomensystem ZF, dass alle 2-Färbungen die Ramsey Eigenschaft haben.

Kehren wir nochmals zum Ramsey Theorem zurück, welches besagt, dass es für jede 2-Färbung der 2-elementigen Mengen natürlicher Zahlen eine unendliche Menge natürlicher Zahlen gibt, so dass all deren 2-elementigen Mengen dieselbe Farbe haben. Das Ramsey Theorem sagt nichts darüber aus, wo diese unendliche monochromatische Menge liegt. Von einem kombinatorischen Gesichtspunkt aus gesehen wäre es zum Beispiel nützlich, wenn es einen Ultrafilter geben würde, so dass man für jede 2-Färbung eine monochromatische Menge im Ultrafilter finden würde.

Ein Ultrafilter ist eine Mengen von unendlichen Mengen natürlicher Zahlen, welche folgendes erfüllt: Mit zwei Mengen aus dem Ultrafilter ist auch deren Durchschnitt im Ultrafilter; und für jede Menge natürlicher Zahlen ist entweder die Menge oder ihr Komplement im Ultrafilter. Ultrafilter enthalten also grob gesprochen nur etwa die

Hälfte der Mengen natürlicher Zahlen und haben schöne kombinatorische Eigenschaften. Allerdings lässt sich kein einziger Ultrafilter direkt angeben und ihre Existenz ist nur mit Hilfe des Auswahlaxioms gesichert.

Wenn man nun verlangt, dass man für jede 2-Färbung der 2-elementigen Mengen natürlicher Zahlen eine monochromatische Menge in einem gegebenen Ultrafilter findet, so führt dies zu Folgendem:

AUSSAGE 5 (Ramsey Ultrafilter). Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ heisst *Ramsey Ultrafilter* wenn es für jede 2-Färbung der 2-elementigen Mengen natürlicher Zahlen eine unendliche Menge natürlicher Zahlen gibt die in $\mathcal{U}$ liegt, und deren 2-elementigen Teilmengen alle dieselbe Farbe haben.

Es kann gezeigt werden, dass die Continuumshypothese die Existenz von Ramsey Ultrafiltern impliziert. Andererseits ist es konsistent mit dem Axiomensystem ZFC, dass es keinen einzigen Ramsey Ultrafilter gibt. Ramsey Ultrafilter, zusammen mit dem sogenannten Mathias Forcing, spielen eine zentrale Rolle in der Untersuchung der Ramsey Eigenschaft, und das schöne Zusammenspiel von Ramsey Ultrafiltern, Mathias Forcing und der Ramsey Eigenschaft war einer der Gründe um die entsprechende Theorie für Partitionen zu untersuchen.

❀ ❀ ❀

Das Ziel der vorgelegten Arbeit ist, die kombinatorischen Eigenschaften von Mengen von Partitionen zu untersuchen, wobei wir uns an die oben aufgeführten Beispiele halten. Bevor ich auf die einzelnen Resultate näher eingehe, möchte ich kurz etwas zur Motivation sagen.

In den Aussagen 2–5 kommen immer wieder Mengen (oder Mengen von Mengen) natürlicher Zahlen vor. Anstelle von Mengen natürlicher Zahlen könnten wir auch Partitionen der natürlichen Zahlen betrachten, wobei eine Partition der natürlichen Zahlen eine Menge von paarweise fremden (disjunkten) Mengen natürlicher Zahlen ist, welche die Menge aller natürlichen Zahlen überdeckt. Wenn wir anstelle der natürlichen Zahlen an einen Kuchen denken, den wir in Stücke schneiden, so bilden die Kuchenstücke eine Partition des Kuchens (denn sie überschneiden sich nicht und alle Stücke zusammen ergeben den ganzen Kuchen). Von einem abstrakten Standpunkt aus gesehen sind die Partitionen der natürlichen Zahlen *dual* zu den Mengen natürlicher Zahlen. Zum Beispiel entsprechen den endlichen Mengen natürlicher Zahlen die Partitionen, die nur endlich viele Teile haben. Ferner entsprechen "kleineren" Mengen "gröbere" Partitionen. Es ist deshalb naheliegend zu versuchen, die kombinatorischen

Eigenschaften von Mengen natürlicher Zahlen zu "dualisieren", das heisst auf Partitionen der natürlichen Zahlen zu übertragen, was in der vorgelegten Arbeit getan wird. Auf den ersten Blick mag das recht einfach und symmetrisch erscheinen, aber je tiefer man in die Theorie eindringt, desto mehr sieht man die Unterschiede und die Asymmetrien und es überrascht immer wieder, wie verschieden sich Partitionen und Teilmengen verhalten.

Die Habilitationsschrift ist eine kumulative Habilitationsschrift und besteht im Wesentlichen aus den Arbeiten [1], [2], [3] und [4] (wobei ich aus der Gemeinschaftsarbeit [4] nur meine eigenen Resultate einbezogen habe), die alle in begutachteten Zeitschriften erschienen sind. Um die Habilitationsschrift kohärenter und lesbarer zu machen, habe ich die einzelnen Arbeiten an manchen Stellen etwas modifiziert (zum Beispiel die Notation aufeinander abgestimmt). Im Folgenden möchte ich skizzieren, wie die Arbeit aufgebaut ist:

Zu Beginn wird die Terminologie und ein paar grundlegende Definitionen bezüglich Partitionen der natürlichen Zahlen eingeführt. Ferner wird gezeigt warum vom kathegorietheoretischen Standpunkt aus gesehen Partitionen das Duale von Teilmengen sind, was den Begriff "Dualisation" für den Übergang von Teilmengen zu Partitionen motiviert. Demgemäss bezeichnen wir das Duale einer Eigenschaft, wie zum Beispiel der *Ramsey Eigenschaft*, oder einer sogenannten *Kardinalzahlinvarianten*, wie zum Beispiel der Ausschöpfungszahl et cetera, als die *duale Ramsey Eigenschaft* beziehungsweise als die *duale Ausschöpfungszahl* et cetera.

Nach diesem einleitenden Kapitel beginnt die Dualisierung der Theorie der Mengen von Mengen natürlicher Zahlen, sowie die Untersuchung der kombinatorischen Eigenschaften der dualisierten Objekte, das heisst der Mengen von Partitionen.

Zuerst werden klassische sogenannte Kardinalzahlinvarianten, wie zum Beispiel die Ausschöpfungszahl (siehe Aussage 2), dualisiert. Es wird gezeigt, dass die dualen Formen und die klassischen Formen der Kardinalzahlinvarianten verschieden gross sein können. Zum Beispiel ist es konsistent mit ZFC, dass die duale Ausschöpfungszahl echt kleiner ist als die klassische Ausschöpfungszahl $\mathfrak{r}$, und im Allgemeinen können duale Kardinalzahlinvarianten konsistenterweise sowohl kleiner, gleich, oder grösser als ihre klassischen Varianten sein. Ferner existieren duale Kardinalzahlinvarianten die konsistenterweise grösser oder kleiner gemacht werden können, während ihre klassischen Varianten fest bleiben, und umgekehrt. Die duale Theorie der Kardinalzahlinvarianten unterscheidet sich also wesentlich von der klassischen Theorie.

Als nächstes werden vier topologische Räume untersucht. Die zugrundegelegte Menge ist in allen vier Räumen dieselbe, nämlich die Menge der Partitionsultrafilter. Sind Ultrafilter schon relativ komplexe Strukturen, es sind Mengen von Mengen natürlicher Zahlen, so sind Partitionsultrafilter noch eine Stufe abstrakter, denn es sind Mengen von Mengen von Mengen natürlicher Zahlen. Ich möchte deshalb hier nicht näher auf den Begriff "Partitionsultrafilter" eingehen. Was ich aber kurz erläutern möchte ist der Begriff "Topologie":

Ein topologischer Raum ist eine Menge, auf der Umgebungen definiert werden. Nun können wir auf einer gegebenen Menge im Allgemeinen mehr als nur eine sogenannte Topologie definieren. Nehmen wir zum Beispiel die Stadt Bern. Einerseits können wir den Abstand zwischen zwei Orten mit Hilfe der Luftlinie definieren und sagen, dass die Umgebung eines Ortes jene Orte sind, die nahe liegen bezüglich dem so definierten Abstand. Andererseits können wir den Abstand zwischen zwei Orten auch definieren als die Länge der kürzesten Verbindung zu Fuss. Orte, die im ersten Fall nahe beieinander liegen (zwei Orte links und rechts der Aare) können im zweiten Fall weit auseinander liegen. Das heisst, Umgebungen eines Ortes ändern sich, wenn wir die Topologie auf dem Raum verändern.

Es wird nun gezeigt, dass die vier Topologien auf der Menge der Partitionsultrafilter alle wesentlich verschieden sind von den Topologien, die auf der Menge der Ultrafilter definiert werden. Um dies zu zeigen werden kombinatorische Hilfsmittel, wie zum Beispiel Königs Lemma (*vgl.* Aussage 1) benutzt.

Wie oben gezeigt wurde, ist die Ramsey Theorie ein wichtiges Gebiet der Kombinatorik, welches viele Anwendungen ausserhalb der Kombinatorik hat. So ist es natürlich, auch die Resultate der klassischen Ramsey Theorie zu dualisieren.

Zuerst wird eine Partitionsform des Ramsey Theorems gegeben (*vgl.* Aussage 3), welches später für die Definition von sogenannten Ramseyschen Partitionsultrafiltern benutzt wird. Dann wird die duale Form der Ramsey Eigenschaft (*vgl.* Aussage 4) untersucht. Wichtig in dieser Untersuchung ist die Additivität eines bestimmten Ideals.

Ein *Ideal* ist eine Menge von "kleinen" Mengen und die Additivität misst, wieviele solcher kleinen Mengen wir vereinigen müssen, damit die Vereinigung nicht mehr klein ist. Zum Beispiel bildet die Menge der endlichen Mengen natürlicher Zahlen ein Ideal. "Klein" heisst in diesem Falle "endlich". Da die Vereinigung endlich vieler endlicher Mengen wieder endlich ist, müssen wir unendlich viele solcher kleinen Mengen vereinigen, damit die Vereinigung nicht mehr klein ist, die Additivität dieses Ideals ist also abzählbar unendlich.

Die Additivität des obengenannten Ideals der dualen Ramsey Theorie ist überabzählbar, kann aber – abhängig vom zugrundegelegten Modell der Mengenlehre – sowohl kleiner wie auch gleich dem Continuum $\mathfrak{c}$ sein, das Letztere auch wenn das Continuum gross ist, was ebenfalls gezeigt wird.

Nach all den Asymmetrien im Dualisierungsprozess werden schliesslich die Symmetrien zwischen der Ramsey Eigenschaft und der dualen Ramsey Eigenschaft betrachtet. Einige Resultate der dualen Ramsey Eigenschaft sind einfach Dualisierungen der entsprechenden Resultate der Ramsey Eigenschaft. Andererseits sind die Beweise fast immer komplizierter und erfordern neue Techniken und Ideen. Der Grund liegt darin, dass Partitionen, im Gegensatz zu Teilmengen, keine Komplemente haben. In der klassischen Theorie spielt das Komplement einer Menge eine äusserst wichtige Rolle, und dieser Defekt in der dualen Theorie muss durch stärkere kombinatorische Hilfsmittel wettgemacht werden.

Zum Schluss werden spezielle Partitionsultrafilter untersucht. Dafür wird zuerst eine Ordnung auf der Menge der Partitionsultrafiltern definiert die der Rudin-Keisler Ordnung der Ultrafilter ähnlich ist. Ferner wird eine Partitionsform von Ramsey Ultrafiltern (*vgl.* Aussage 5) definiert. Diese sehr speziellen Partitionsultrafilter werden Ramseysche Partitionsultrafilter (*engl.* Ramseyan ultrafilter) genannt. Bezüglich der Rudin-Keisler Ordnung sind die Ramsey Ultrafilter die minimalen Elemente, und es wird gezeigt, dass etwas ähnliches auch bezüglich der auf den Partitionsultrafiltern eingeführten Ordnung für die Ramseyschen Partitionsultrafilter gilt. Zusätzlich wird gezeigt, dass die Existenz von Ramseyschen Partitionsultrafiltern immer auch die Existenz von Ramsey Ultrafiltern impliziert – das heisst also, dass die Ramseyschen Partitionsultrafilter stärker sind als die Ramsey Ultrafilter – und dass die Continuumshypothese die Existenz von sehr vielen, paarweise verschiedenen Ramseyschen Partitionsultrafiltern impliziert (es ist aber auch konsistent mit ZFC, dass es keinen einzigen Ramseyschen Partitionsultrafilter gibt). Ferner wird gezeigt, dass das duale Mathias Forcing restringiert auf einen Ramseyschen Partitionsultrafilter im Wesentlichen dieselben kombinatorischen Eigenschaften hat, wie das Mathias Forcing restringiert auf einen Ramsey Ultrafilter. Das ist insofern wichtig, da das Mathias Forcing eine Schlüsselrolle in der Untersuchung der Ramsey Eigenschaft gewisser Mengen einnimmt und demgemäss auch das duale Mathias Forcing eng verbunden ist mit der dualen Ramsey Eigenschaft. Schliesslich werden noch Kardinalzahlinvarianten betrachtet, die mit der dualen Ramsey Eigenschaft zu tun haben.

❀ ❀ ❀

Da das Vorausgehende etwas technisch war, möchte ich abschliessend nochmals die Kernpunkte der Arbeit zusammenfassen: In der klassischen Theorie werden unter anderem kombinatorische Eigenschaften von Mengen von Mengen natürlicher Zahlen untersucht. Nun kann man die Mengen natürlicher Zahlen durch Partitionen der natürlichen Zahlen ersetzten und erhält eine sogenannte duale Theorie. Die duale Theorie unterscheidet sich wesentlich von der klassischen Theorie und es sind komplexere Beweismethoden nötig um diese herzuleiten. Von einem anderen Standpunkt aus gesehen ist die duale Theorie eine Verallgemeinerung der klassischen Theorie und enthält die Letztere. Sie ist somit in der Lage, klassische kombinatorische Probleme in einem neuen Licht erscheinen zu lassen.

Literatur

[1] Lorenz Halbeisen, *On shattering, splitting and reaping partitions*, ***Mathematical Logic Quarterly***, vol. 44 (1998), 123–134.

[2] ______, *Symmetries between two Ramsey properties*, ***Archive for Mathematical Logic***, vol. 37 (1998), 241–260.

[3] ______, *Ramseyan ultrafilters*, ***Fundamenta Mathematicae***, vol. 169 (2001), 233–248.

[4] Lorenz Halbeisen and Benedikt Löwe, *Ultrafilter spaces on the semilattice of partitions*, ***Topology and its Applications***, vol. 115 (2001), 317–332.

[5] Lorenz Halbeisen and Edward W. Odell, *On asymptotic models in Banach spaces*, erscheint im ***Israel Journal of Mathematics***.

[6] Lorenz Halbeisen and Saharon Shelah, *Relations between some cardinals in the absence of the axiom of choice*, ***Bulletin of Symbolic Logic***, vol. 7 (2001), 237–261.

[7] Paul Howard and Jean E. Rubin, ***Consequences of the Axiom of Choice***, [Mathematical Surveys and Monographs], vol. 59, American Mathematical Society, 1998.

[8] Dénes König, ***Theorie der endlichen und unendlichen Graphen***, Chelsea Publishing Company, New York, 1950.

[9] Edward W. Odell, *Applications of Ramsey theorems to Banach space theory*, in ***Notes in Banach Spaces*** (E. Lacey, H. ed.), University Press, Austin and London, Austin TX, 1980, pp. 379–404.

[10] Stanisław P. Radziszowski, *Small Ramsey numbers*, ***The Electronic Journal of Combinatorics,*** Dynamic Surveys 1, (July 15, 2002), 42pp.

[11] Frank P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, ***Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. II***, vol. 30 (1930), 264–286.