

5. Harmonische Funktionen, Dirichlet-Problem

- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt begrenztes, beschränktes Gebiet. Funktionen $u \in C^2(D)$ mit

$$\Delta u = 0 \text{ in } D$$

heissen **harmonische Funktionen**. Beispiele sind $u = \text{const.}$, $u(x) = x_j$, oder für $n=2$: $u(x_1, x_2) = \text{Re } v(x_1 + ix_2)$, v **holomorph**.

- Typische Randwertprobleme sind:

- Dirichlet-Problem**:
$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in D, \\ u(x) = f(x), & x \in \partial D. \end{cases} \quad (D)$$

(Spannung f am Rand des Gebiets $\Rightarrow u =$ elektrostatisches Potential im Inneren des Gebiets.)

- Neumann-Problem**:
$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x), & x \in \partial D. \end{cases} \quad (N)$$

(Normale Komponente der elektrischen Stromdichte g am Rand $\Rightarrow u =$ elektrostatisches Potential. **Begründung**: $\frac{\partial u}{\partial n} = -\vec{n} \cdot \vec{E}$, $\vec{E} = -\nabla u$.)

Satz 5.1. (i) Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (D) (mit demselben f).

Dann gilt $u_1 = u_2$.

(ii) Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (N) (mit demselben g). Dann gilt $u_1 = u_2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. $u := u_1 - u_2$ erfüllt $\Delta u = 0$, $u|_{\partial D} = 0$ (für (i)) oder $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0$ (für (ii)). Der **Gauss'sche Divergenzatz** gibt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n u \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u}_{=\Delta u=0} dx \\ &= \int_{\partial D} u(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\Omega(x) = 0, \end{aligned}$$

also muss $\int_D \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = 0$ gelten $\Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = c$.
 Im Fall (i) ist aber dann $c = u|_D = 0$. \square

Satz 5.2. Falls (N) eine Lösung besitzt, muss gelten $\int_{\partial D} g(x) d\Omega(x) = 0$.
Beweis. Satz 4.25 mit $v := 1$ gibt

$$0 = \int_D \underbrace{\Delta u}_{=0} \cdot \underbrace{1}_{=0} - u \cdot \underbrace{\Delta 1}_{=0} dx = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} 1 d\Omega(x). \quad \square$$

Satz 5.3. (D) besitzt für alle stetigen f eine eindeutige Lösung;
 (N) besitzt für alle stetigen g mit $\int_{\partial D} g(x) d\Omega(x) = 0$ eine Lösung,
 die eindeutig ist bis auf eine \mathbb{R} -additive Konstante.

Wir werden diesen Satz nicht beweisen (\rightarrow Functional Analysis II), ausser
 (D) für $D = \text{Einheitsball}$ (§ 5.2).