

1.3. Poissonsche Summationsformel

Als Vorbereitung für die Diskussion der Wärmeleitungsgleichung betrachten wir eine Funktion $f = f(x)$ unter den Annahmen

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \quad |f(x)|, |f'(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}. \quad (*)$$

Wir setzen $g(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+kL). \quad (**)$

Behauptung: $g \in C^1(\mathbb{R})$, und $g(x) = g(x+L)$.

Beweis: (i) Gleichmäßige Konvergenz von $(**)$ für $x \in [0, L]$.

Für die Summe über k mit $|k| > N$ gilt die Abschätzung

$$\left| \sum_{|k| > N} f(x+kL) \right| \leq \sum_{|k| > N} \frac{C}{1+(x+kL)^2} \leq C \sum_{|j| \geq N} \frac{1}{(jL)^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Also gilt $g \in C^0([0, L])$.

(ii) Nach demselben Argument konvergiert auch $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f'(x+kL)$ gleichmäßig.

Nach einem Resultat aus Analysis I/II folgt $g \in C^1([0, L])$.

(iii) Die L -Periodizität von g folgt direkt aus der Definition. \square

Wir können nach Satz 1.9 g aus ihren Fourierreihen erhalten.

Diese sind

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{1}{L} \int_0^L g(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L} \int_0^L f(x+kL) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx \\ \stackrel{\substack{y=x+kL \\ (x=y-kL)}}{=} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L} \int_{kL}^{(k+1)L} f(y) e^{-\frac{2\pi i n y}{L}} \underbrace{e^{\frac{2\pi i n k L}{L}}}_{=1} dy \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{2\pi i n y}{L}} dy. \end{aligned} \quad (***)$$

Definition 1.14. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

Dann ist die Fouriertransformation von f die Funktion

$$\hat{f}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Wir können also ~~(xxx)~~ weiter schreiben als

$$g_n = \frac{1}{L} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{L}\right).$$

Satz 1.15. (Poissonsche Summationsformel.) Unter der Annahme (*) gilt

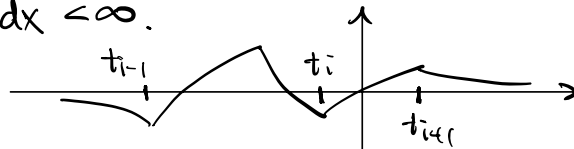
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nL) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{L}\right).$$

Beweis. Mit obiger Notation gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+kL) = g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{L}\right) e^{\frac{2\pi i n x}{L}}.$$

Setzt man $x=0$ ein, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Es genügt, anzunehmen, dass f stetig und stückweise C^1 ist, mit $\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f'(x)| dx < \infty$.



Beispiel 1.16. $f(x) = e^{-|x|} \Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{2}{1+k^2}$. Satz 1.15 gibt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1}. \quad (\text{Übung.})$$