

5.1 Greensche Funktion

Wir betrachten (D). Wie können wir u aus f bestimmen?

• Wir erinnern uns an die Fundamentallösung

$$E(x) = \begin{cases} c_n |x|^{-n+2}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \end{cases}$$

mit

$$\Delta E = \delta, \quad \text{d.h.} \quad \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y) \Delta u(y) dy = u(x) \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Lemma 5.4. Sei $u \in C^2(\bar{D})$. Dann gilt $\forall x \in D$:

$$u(x) = \int_D E(x-y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial D} \left[E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} \right] d\sigma(y).$$

Ist u harmonisch, gilt also

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[-E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) + u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} \right] d\sigma(y). \quad (*)$$

Beweis. Der Beweis ist ganz analog zu dem von Satz 4.25. Sei

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in D : |x-y| < \varepsilon\}; \text{ dann}$$

$$\int_D E(x-y) \Delta u(y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus B_\varepsilon(x)} E(x-y) \Delta u(y) dy$$

$$= \underbrace{u(x)}_{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} E(x-y) \Delta u(y) dy} + \int_{\partial D} \left[E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right] d\sigma(y).$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ der Randterme
auf $\partial B_\varepsilon(x)$ nach
Anwendung der Greenschen
Identität (Satz 4.25)

□

Wenn man sowohl $u|_{\partial D}$ als auch $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D}$ kennt, kann man mittels (*) u in D bestimmen. Der Eindeigkeitsatz Satz 5.1(i) suggeriert aber, dass die Angabe von $u|_{\partial D}$ genügen sollte (d.h. $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D}$ ist überflüssig, oder anders ausgedrückt: ist durch $u|_{\partial D}$ eindeutig bestimmt).

Wir ersetzen also $E(x,y)$ durch eine Funktion $G(y,x)$ mit $\Delta_x G(y,x) = \delta(x)$ und $G(y,x) = 0$ für $x \in \partial D$.

Definition 5.5. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand. Eine glatte Funktion $G(y,x)$ auf $\bar{D} \times \bar{D} \setminus \{(x,y) \in \bar{D} \times \bar{D} : x=y\}$ heißt **Greensche Funktion**, falls:

- (i) $G(y,x) = E(x,y) + v(y,x)$ mit $v \in C^\infty(\bar{D} \times \bar{D})$,
 $\Delta_x v(y,x) = 0$;
- (ii) $G(y,x) = 0$ für $x \in \partial D, y \in \bar{D}$.

Nach (ii) muss für $x \in \partial D$ gelten $v(y,x) = -E(x,y)$; mit $\Delta_x v(y,x) = 0$ ist also $v(y, \cdot)$ für alle $y \in \bar{D}$ eindeutig bestimmt (nach Satz 5.1(i)).

Satz 5.6. Falls u eine Lösung von (D) ist, so gilt

$$u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n_y}(y,x) f(y) d\Omega(y), \quad x \in D.$$

Beweis. Wir subtrahieren von (*) die Identität

$$0 = \int_{\partial D} v(y,x) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - u(y) \frac{\partial v}{\partial n_y}(y,x) d\Omega(y).$$

□

Wir werden im nächsten Abschnitt ein solches G für $D = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ konstruieren.