

## 1.2. Rekonstruktion von Funktionen aus Fourerkoeffizienten

Gegeben eine  $L$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und ihre Fourier-Koeffizienten  $f_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx$ , ist es nun naheliegend,  $f$  aus  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  rekonstruieren zu wollen via

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}.$$

Um den Grenzwert der Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$  zu ermitteln, betrachten wir die Partialsummen

$$\begin{aligned} (S_N f)(x) &:= \sum_{n=-N}^N f_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L f(y) \sum_{n=-N}^N e^{\frac{2\pi i n x}{L}} e^{-\frac{2\pi i n y}{L}} dy \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L f(y) D_N\left(\frac{x-y}{L}\right) dy, \end{aligned}$$

wobei wir den Dirichlet-Kern

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n t} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

eingeführt haben.

Lemma 1.8. Der Dirichlet-Kern hat folgende Eigenschaften:

(i)  $D_N(t+1) = D_N(t)$  (1-periodisch),  $D_N(-t) = D_N(t)$ .

(ii)  $\int_0^1 D_N(t) dt = 1$

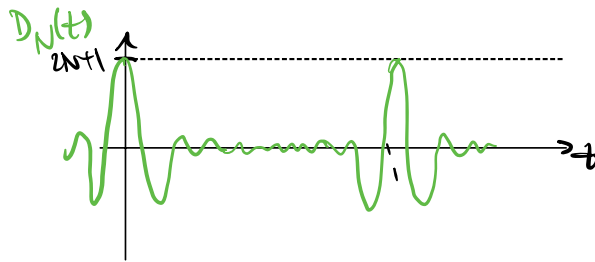
(iii)  $D_N(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)} & , t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 2N+1 & , t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Beweis. (i) folgt direkt aus der Definition.

(ii) folgt aus Satz 1.3 (mit  $f_n = \begin{cases} 0, & |n| > N \\ 1, & |n| \leq N \end{cases}$ ).

(iii):  $D_N(t) = \sum_{n=0}^{2N} e^{2\pi i (n-N)t}$

$$\begin{aligned}
&= e^{-2\pi i N t} \sum_{n=0}^{2N} (e^{2\pi i t})^n = e^{-2\pi i N t} \frac{e^{2\pi i (2N+1)t} - 1}{e^{2\pi i t} - 1} \\
&= \frac{e^{2\pi i (N+\frac{1}{2})t} - e^{-2\pi i (N+\frac{1}{2})t}}{e^{\pi i t} - e^{-\pi i t}} = \frac{2i \cdot \sin(2\pi (N+\frac{1}{2})t)}{2i \cdot \sin(\pi t)}. \quad \square
\end{aligned}$$



Satz 1.9. Sei  $f \in C^1(\mathbb{R})$   $L$ -periodisch, mit Fourerkoeffizienten  $\hat{f}_n$ .  
Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f)(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
f(x) - (S_N f)(x) &= \frac{1}{L} \int_0^L f(y) D_N\left(\frac{x-y}{L}\right) dy - f(x) \\
&\stackrel{\text{Lemma 1.8(ii)}}{=} \frac{1}{L} \int_0^L (f(y) - f(x)) D_N\left(\frac{x-y}{L}\right) dy. \\
&\stackrel{\text{Lemma 1.8(iii)}}{=} \frac{1}{L} \int_0^L \underbrace{\frac{f(y) - f(x)}{\sin(\pi \frac{x-y}{L})}}_{=: F_x(y)} \sin(\pi (2N+1) \frac{x-y}{L}) dy
\end{aligned}$$

Mehr Detail:  $\frac{1}{L} \int_0^L D_N\left(\frac{x-y}{L}\right) dy \xrightarrow{y=x+Lt} \int_0^1 D_N(-t) dt = 1$

Setzen wir  $F_x(y)$  auf  $\frac{x-y}{L} = n \in \mathbb{Z}$  fort durch  $-\frac{f'(x)}{\pi} (-1)^n$ ,  
so ist  $F_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig (nach L'Hôpital, da  $f \in C^1$ ), und  
 $2L$ -periodisch.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) - (S_N f)(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L} \int_0^L \underbrace{F_x(y)}_{L\text{-periodisch in } y!} \sin(\pi (2N+1) \frac{x-y}{L}) dy \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{L} \int_L^{2L} F_x(y) \sin(\pi (2N+1) \frac{x-y}{L}) dy \right) \\
&= \frac{1}{2L} \int_0^{2L} F_x(y) \sin(\pi (2N+1) \frac{x-y}{L}) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2L \cdot 2i} \int_0^{2L} \mathcal{F}_x(y) \left[ e^{\frac{i\pi(2N+1)x}{L}} e^{-\frac{i\pi(2N+1)y}{L}} - e^{-\frac{i\pi(2N+1)x}{L}} e^{\frac{i\pi(2N+1)y}{L}} \right] dy \\
&= \frac{1}{4iL} \left( e^{\frac{i\pi(2N+1)x}{L}} (\mathcal{F}_x)_{2N+1} - e^{-\frac{i\pi(2N+1)x}{L}} (\mathcal{F}_x)_{-(2N+1)} \right).
\end{aligned}$$

Nach Satz 1.6 (angewendet auf  $\mathcal{F}_x$ ) gilt also

$$|f(x) - (S_N f)(x)| \leq \frac{1}{L} \left( |(\mathcal{F}_x)_{2N+1}| + |(\mathcal{F}_x)_{-(2N+1)}| \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Dieser Satz kann **nicht** auf die Sägezahnfunktion  $f(x) = \frac{1}{2} - x$  ( $0 \leq x < 1$ , 1-periodisch fortgesetzt) von Beispiel 1.5 angewendet werden, da diese an  $x \in \mathbb{Z}$  unstetig (und daher erst recht nicht differenzierbar) ist. Allerdings ist **diese Funktion** von **beschränkter Variation**.

Definition 1.10. Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ist von **beschränkter Variation**, falls  $\exists V < \infty$  sodass  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ :

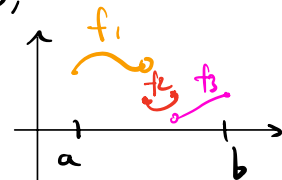
$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq V.$$

Weitere Beispiele sind stückweise stetig differenzierbare Funktionen, d.h.

$$f(x) = f_i(x) \quad \text{für } t_i \leq x < t_{i+1} \quad (\text{oder } t_i < x \leq t_{i+1}),$$

wobei  $f_i \in C^1([t_i, t_{i+1}])$ ,

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$



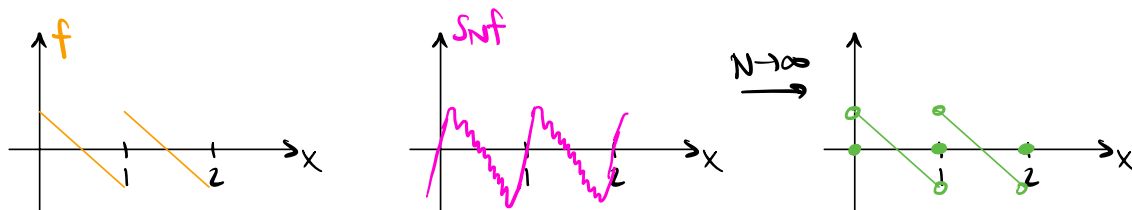
Satz 1.11. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  L-periodisch und von **beschränkter Variation** auf  $[0, L]$ . Sei  $(S_N f)(x) = \sum_{n=-N}^N f_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$  die N-te Partialsumme von f. Dann:

(i)  $\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f)(x) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0))$ .  
 (Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte  $f(x \mp 0) = \lim_{a \rightarrow x \mp} f(a)$  existieren  $\forall x \in \mathbb{R}$ .)  
 Insbesondere gilt  $\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f)(x) = f(x)$ , wenn  $f$  an  $x$  stetig ist.

(ii) Ist  $f$  an jedem Punkt eines abgeschlossenen Intervalls  $I$  stetig, so gilt  $S_N f(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x)$  **gleichmässig** für  $x \in I$ .

Beispiel 1.12. Für die Sägezahnfunktion  $f(x) = \frac{1}{2} - x$  gilt

$$(S_N f)(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 0, & x = 0, 1 \end{cases} \quad (1\text{-periodisch fortgesetzt})$$



- **Gibbs-Phänomen.** Die Konvergenz von  $S_N f$  nahe einer Sprungstelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  von  $f$  ist natürlich **nicht gleichförmig** (ansonsten müsste  $f$  als gleichmässiger Grenzwert der stetigen Funktionen  $S_N f$  selbst stetig sein). Wie sehen die Partialsummen  $S_N f$  nahe einer Sprungstelle aus?

**Antwort:** ist  $f(x_0 \pm 0) = c \pm h$ , so erreicht  $S_N f$  nahe  $x_0$  für beliebig hohe  $N$  die Werte  $\approx c \pm 1.18 h$ , d.h. die Sprunghöhe von Partialsummen ist mit  $\approx 2.36 h$  um **18% höher** als die Sprunghöhe  $2h$  von  $f$ .

**Quantitative Analyse:** Wir betrachten nur den Fall der Sägezahnfunktion  $f$  (siehe Beispiel 1.5), also  $f_n = \frac{1}{2\pi i n}$  ( $n \neq 0$ ),  $f_0 = 0$ . Für  $0 < x < 1$  ist

$$g_N(x) := (S_N f)(x) - f(x) = \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{1}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} - (\tfrac{1}{2} - x).$$

Wir wollen das **erste lokale Maximum** von  $g_N$  in  $x > 0$  finden.

Berechnen also

$$g'_N(x) = \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N e^{2\pi i n x} + 1 \stackrel{\text{Lemma 8.1(iii)}}{=} D_N(x) = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}.$$

Die erste Nullstelle ist  $x_0 = \frac{1}{2N+1}$ . Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gibt

$$\begin{aligned} g_N(x_0) &= g_N(0+) + \int_0^{x_0} g'_N(x) dx \\ &= (0 - \tfrac{1}{2}) + \int_0^{x_0} \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)} dx \\ x = \frac{y}{2N+1} &= -\tfrac{1}{2} + \int_0^1 \frac{\sin(\pi y)}{\sin(\frac{\pi y}{2N+1})} \cdot \frac{1}{2N+1} dy \\ &= -\tfrac{1}{2} + \int_0^1 \frac{\sin(\pi y)}{\pi y} \cdot \underbrace{\frac{\frac{\pi y}{2N+1}}{\sin(\frac{\pi y}{2N+1})}}_{= 1 + O(\frac{1}{N})} dy \\ &= -\tfrac{1}{2} + \int_0^1 \frac{\sin(\pi y)}{\pi y} dy + O(\tfrac{1}{N}) \\ &\approx 0.0895 + O(\tfrac{1}{N}) \end{aligned}$$

Die Sprunghöhe von  $S_N f$  nahe 0 ist also  $2 \cdot (\tfrac{1}{2} + 0.0895) = 1 + 0.179$ , also knapp **18%** höher als die Sprunghöhe  $2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1$  von  $f$ .

**Konsequenz:** sendet man ein Signal mit Sprungstellen, und Amplitude  $h$ , über einen Kanal, und werden hohe Fourierkoeffizienten unterdrückt (z.B. durch Verluste), so entsteht ein Signal mit Amplitude  $\approx$  **9%** größer als  $h$ .

• **Satz von Fejér.** Man kann die Konvergenz der Partialsummen verbessern.

**Satz 1.13. (Fejér.)** Sei  $f \in C^0(\mathbb{R})$  (d.h. stetig) und  $L$ -periodisch.

Schreibe  $f_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx$ .

Setze  $(G_N f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (G_n f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{m=-n}^n f_m e^{\frac{2\pi i m x}{L}} \right) (*)$

Dann gilt  $G_N f(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x)$ , mit gleichmässiger Konvergenz.

Beweis. siehe Skript.  $\square$

Korollar 1.14. Jede stetige  $L$ -periodische Funktion kann gleichmässig durch trigonometrische Polynome (Linearkombinationen von  $e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ ) approximiert werden.

Beweis. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $L$ -periodisch,  $\varepsilon > 0$ . Für grosse  $N$  gilt  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - (G_N f)(x)| < \varepsilon$ ; und  $(G_N f)(x) = (*)$  ist ein trigonometrisches Polynom!  $\square$

• Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch die Fourierreihen von reellwertigen Funktionen betrachten.

Sei also  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$ ,  $L$ -periodisch,  $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ .

Dann gilt 
$$\overline{f_n} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx \stackrel{f(x) = \overline{\overline{f(x)}}}{=} \frac{1}{L} \int_0^L \overline{f(x)} e^{\frac{2\pi i n x}{L}} dx = f_{-n}.$$

Schreibe also

$$f_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad f_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (a_n, b_n \in \mathbb{R}),$$

so gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \left( \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \left( \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right). \end{aligned}$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} a_n &= f_n + f_{-n} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \\ b_n &= i(f_n - f_{-n}) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$