

4.2. Operationen auf Distributionen

(a) Translationen um $a \in \mathbb{R}^n$.

Für $\varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ definiert $(T_a \varphi)(x) := \varphi(x-a)$ ebenfalls eine Schwartz-Funktion. Außerdem ist die Abbildung

$$T_a: \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto T_a \varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$$

linear und stetig. Fassen wir nun $T_a f$, $f \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$, als Distribution auf, so berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle T_a f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-a) \varphi(x) dx \\ &\stackrel{x \rightarrow x+a}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x+a) dx = \langle f, T_{-a} \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Nun gilt aber ganz allgemein für $f \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$, dass die Abbildung

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \langle f, T_{-a} \varphi \rangle$$

eine temperierte Distribution definiert.

Definition 4.10. $\langle T_a f, \varphi \rangle := \langle f, T_{-a} \varphi \rangle$ ($f \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$).

Zum Beispiel ist $\delta_a := T_a \delta$ die Distribution $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$.

(b) Lineare Koordinatentransformationen. Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

Wir berechnen, zunächst für $f, \varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ und $(U_A f)(x) := f(A^{-1}x)$:

$$\begin{aligned} \langle U_A f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(A^{-1}x) \varphi(x) dx \\ &\stackrel{x=Ay}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(Ay) |\det A| dy \\ &= \langle f, |\det A| U_{A^{-1}} \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ergibt auch Sinn für $f \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$ und definiert $U_A f$ als Distribution:

Definition 4.11. $\langle U_A f, \varphi \rangle := \langle f, |\det A| U_{A^{-1}} \varphi \rangle \quad (f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$

Hier verwenden wir, dass die Abbildung $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto |\det A| U_{A^{-1}} \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig und linear ist.

Beispiel 4.12. $\langle U_A \delta, \varphi \rangle = |\det A| \varphi((A^{-1})^{-1} 0) = |\det A| \varphi(0) = \langle |\det A| \delta, \varphi \rangle.$

Also $U_A \delta = |\det A| \delta$. (Physik-Schreibweise: $\delta(A^{-1}x) = |\det A| \delta(x)$.
(z.B. $\delta(2x) = 2^{-n} \delta(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$)

(c) Multiplikation mit glatten Funktionen.

Definition 4.13. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ oder $g = \text{Polynom}$
 $\Rightarrow \langle gf, \varphi \rangle := \langle f, \underbrace{g\varphi}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$

z.B. gilt $g\delta = g(0)\delta$ (Physik: $g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$)

(d) Ableitungen. Für $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt mit partieller Integration

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\partial^\alpha \varphi)(x) dx.$$

Definition 4.14. Für $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert als

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Beispiel 4.15. Wir berechnen die Ableitung der Heaviside-Funktion

$$\theta(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

im Distributionssinne. θ definiert ein Element von $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ via

$$\langle \theta, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x) dx \quad (\varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R})).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \langle \theta', \varphi \rangle &= -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = -\varphi(x) \Big|_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \\ \Rightarrow \theta' &= \delta. \end{aligned}$$

Beispiel 4.16. $\langle \partial^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \varphi)(0).$

(e) Fouriertransformation. Für $f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(\xi) \varphi(x) d\xi dx \\ &= \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Definition 4.17. Für $f \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}f = \hat{f}$ definiert als

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)).$$

Analog: $\langle \mathcal{F}'f, \varphi \rangle = \langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle.$

Dass dadurch temperierte Distributionen definiert werden, folgt aus Lemma 2.7.

Satz 4.18. $\mathcal{F}, \mathcal{F}': \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$ sind bijektive lineare Abbildungen und invers zueinander.

Beweis. $\langle \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f), \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi) \rangle$
 $= \langle f, \varphi \rangle$

nach Satz 2.5, also gilt: $\hat{\hat{f}} = f$. Auf dieselbe Art und Weise zeigt man $\check{\check{f}} = f$. \square

Beispiel 4.19. (i) Wir betrachten die konstante Funktion 1 als Distribution

via $\langle 1, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx$. Dann gilt

$$\langle \hat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) dk$$

$$= (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi})(0) = (2\pi)^n \varphi(0)$$

$$\Rightarrow \hat{1} = (2\pi)^n \delta. \quad (\text{In der Physik: } \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot k} dx = (2\pi)^n \delta(k).)$$

(f) Faltung mit einer Schwartz-Funktion $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\langle g * f, \varphi \rangle = \int \left(\int g(x-y) f(y) dy \right) \varphi(x) dx$$

$$= \int f(y) \left(\int g(x-y) \varphi(x) dx \right) dy$$

$$= \langle f, \tilde{g} * \varphi \rangle, \quad \text{wobei } \tilde{g}(z) = g(-z).$$

Es gilt: $\varphi \mapsto \tilde{g} * \varphi$ (für \tilde{g} Schwartz) ist eine stetige lineare Abbildung $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Also:

Definition 4.20. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow g * f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch $\langle g * f, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{g} * \varphi \rangle$.

Beispiel 4.21. " $(g * \delta)(x) = \int g(x-y) \delta(y) dy = g(x)$ "; rigoros:

$$\begin{aligned} \langle g * \delta, \varphi \rangle &= \langle \delta, \tilde{g} * \varphi \rangle = (\tilde{g} * \varphi)(0) = \int \tilde{g}(-x) \varphi(x) dx \\ &= \int g(x) \varphi(x) dx = \langle g, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Die üblichen Rechenregeln für Faltungen gelten auch für Distributionen:

Lemma 4.22. $\omega \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$(i) \partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha f * g = f * \partial^\alpha g$$

$$(ii) \partial^\alpha (f * \omega) = (\partial^\alpha f) * \omega = f * \partial^\alpha \omega.$$

Beweis. Übung. \square