

2.5. L^1 , Riemann-Lebesgue.

Eine andere Abschätzung für die Fouriertransformation, die häufig nützlich ist, ist die folgende:

Lemma 2.16. Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(k)| \leq \|\varphi\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx.$$

Beweis. $|\hat{\varphi}(k)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix \cdot k} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx. \quad \square$

Dies suggeriert, ganz analog zu Definition 2.9:

Definition 2.17. $L^1(\mathbb{R}^n) :=$ Vervollständigung von $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^n)})$

$$= \left\{ (\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} : \varphi_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\varphi_i - \varphi_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int |\varphi_i(x) - \varphi_j(x)| dx \xrightarrow{i,j \rightarrow \infty} 0 \right\} / \sim,$$

wobei $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (\psi_i)_{i \in \mathbb{N}} \iff \|\varphi_i - \psi_i\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. Für

$\varphi = [(\varphi_i)]$ setzen wir

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} := \lim_{i \rightarrow \infty} \|\varphi_i\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Wieder kann man zeigen, dass jede Funktion $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\int |\varphi(x)| dx < \infty$ als L^1 -Grenzwert einer Folge von Schwartzfunktionen geschrieben werden kann. Überdies kann man (vgl. Bemerkung 2.13) $L^1(\mathbb{R}^n)$ auch mittels Masstheorie definieren; Elemente von $L^1(\mathbb{R}^n)$ sind dann "fast überall" definierte Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Ist nun $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = L^1\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j$ mit $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (oder ganz formal $\varphi = [(\varphi_j)]$), so ist

$$\|\hat{\varphi}_j - \hat{\varphi}_k\|_{L^\infty} \leq \|\varphi_j - \varphi_k\|_{L^1} \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0.$$

Also konvergiert $\hat{\varphi}_j(k)$ für alle $k \in \mathbb{R}^n$ gegen eine Zahl $\psi(k) \in \mathbb{C}$, und die Konvergenz ist **gleichmäßig**. Folglich ist $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ als **gleichmäßiger Grenzwert** der (stetigen) Schwartz-Funktionen $\hat{\varphi}_j$ stetig.

Wir setzen dann $\hat{\varphi} := \psi$ (= Fourier-Transformation von φ .)

Satz 2.18. (Riemann-Lebesgue-Lemma). $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\varphi} \in C^0(\mathbb{R}^n)$,
 $|\hat{\varphi}(k)| \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\|\varphi_0 - \varphi\|_{L^1} < \varepsilon$. Dann ist

$$\sup_{k \in \mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(k) - \hat{\varphi}_0(k)| < \varepsilon \quad (*)$$

nach Lemma 2.17. Da $\hat{\varphi}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, existiert $R < \infty$, sodass für $k \in \mathbb{R}^n$ mit $|k| > R$ gilt: $|\hat{\varphi}_0(k)| < \varepsilon$. Zusammen mit $(*)$ gilt für solche $k \in \mathbb{R}^n$ also
 $|\hat{\varphi}(k)| < |\hat{\varphi}(k) - \hat{\varphi}_0(k)| + |\hat{\varphi}_0(k)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. \square

Ganz analog zu Satz 1.7 gilt: höhere Regularität von f impliziert schnelleren Abfall von \hat{f} . zur Illustration:

Satz 2.19. Sei $f \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$, d.h. $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ und $\exists R > 0$ sodass $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, |x| \geq R$. Dann gibt es $C < \infty$, sodass

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{(1+|k|)^m}, \quad k \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Übung. \square