

2.1. Beispiele

(i) $n=1$, $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Behauptung: $\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{k^2}{2}}$.

Beweis: • Wir können

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ikx} dx$$

nach k ableiten und die Ableitung unter das Integral nehmen

(da $\frac{d}{dk}(e^{-ikx}) = -ix e^{-ikx}$, und $\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-ix) e^{-ikx}| dx < \infty$ — Details als Übung)

$$\Rightarrow \frac{d}{dk} \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (-ix) e^{-ikx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} i \left(\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) e^{-ikx} dx$$

$$= \underbrace{i e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ikx}}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} i e^{-\frac{x^2}{2}} \overbrace{\frac{d}{dx} e^{-ikx}}^{-ike^{-ikx}} dx$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ikx} dx = -\hat{f}(k)$$

Also erfüllt $k \mapsto \hat{f}(k)$ die Differentialgleichung

$$\hat{f}'(k) + k \hat{f}(k) = 0 \quad (*)$$

— genau wie auch $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (d.h. $f'(x) + x f(x) = 0$).

- Die Gleichung (*) hat eine eindeutige Lösung, sobald $\hat{f}(0)$ bekannt ist, nämlich

$$\hat{f}(k) = \hat{f}(0) e^{-\frac{k^2}{2}}.$$

- Zuletzt bestimmen wir also

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

□

(ii) $f(x) = e^{-\alpha x^2} \Rightarrow \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$. (Lemma 1.18.)

Kann durch Variablensubstitution auf (i) zurückgeführt werden. (Übung.)

(iii) $f(x) = e^{-|x|^2/2} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f}(k) = (2\pi)^{n/2} e^{-|k|^2/2}$

Beweis. $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2/2} \dots e^{-x_n^2/2} e^{ik_1 x_1} \dots e^{ik_n x_n} dx_1 \dots dx_n$
 $= \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_j^2/2} e^{ik_j x_j} dx_j \stackrel{(i)}{=} \prod_{j=1}^n \sqrt{2\pi} e^{-k_j^2/2} \quad \square$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$. Berechnen dann

$\hat{f}(k) = \int_{-1}^1 e^{-ikx} dx = \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \Big|_{-1}^1 = \frac{e^{-ik} - e^{ik}}{-ik} = \frac{2 \sin k}{k}$.

Bemerkung. Die Funktion $|\hat{f}(k)|$ ist nicht integrierbar. Es ist also nicht unmittelbar klar, wie man $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2 \sin k}{k}\right)$ definieren kann.

(v) $f(x) = e^{-\alpha|x|} \quad (x \in \mathbb{R}, \alpha > 0)$. Berechnen dann

$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-ikx} dx = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+ik)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-ik)x} dx$
 $= \frac{1}{\alpha+ik} + \frac{1}{\alpha-ik} = \frac{2\alpha}{k^2 + \alpha^2}$.

Beispiele (iv) und (v) deuten an, dass ein Zusammenhang besteht zwischen

- Regularität von $f \iff$ Abfall von $\hat{f}(k)$ ($|k| \rightarrow \infty$)
- Abfall von $f(x)$ ($|x| \rightarrow \infty$) \iff Regularität von \hat{f} .

(Erstes ist analog zu unserer Diskussion von Fourierreihen in §1.1.)

Um f und \hat{f} so gleich wie möglich behandeln zu können (und die Umkehrformel (\mathcal{F}^{-1}) in einigen Fällen beweisen zu können), werden wir zunächst verlangen, dass f sehr regulär ist und schnell abfällt — dies suggeriert die Definition des Schwartz-Raums $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.