

3.2. L^2 -Theorie der Fourierreihen

Da die Plancherel-Formel eine entscheidende Motivation für die Definition von $L^2(\mathbb{R}^n)$ war, und da auch für Fourierreihen eine analoge Formel gilt (s.u.), betrachten wir hier Fourierreihen von $L^2([0,1])$ -Funktionen.

Lemma 3.15. Sei $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ mit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n| < \infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{L} \int_0^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2.$$

Beweis. (Siehe Serie 3, Aufgabe 1.) Ist $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ mit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n| < \infty$, so gilt

$$\frac{1}{L} \int_0^L \overline{f(x)} g(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \int_0^L \overline{f_n} e^{\frac{2\pi i n x}{L}} g(x) dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{f_n} \frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} g(x) dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{f_n} g_n. \quad (\text{Die Summe konvergiert übrigens, da } |g_n| \text{ beschränkt ist und } \sum |f_n| < \infty.)$$

Für $g = f$ folgt die Behauptung. \square

Es bietet sich nun an, einen Raum $L^2([0,1])$ einzuführen, indem man einen Raum von "netten" Funktionen vervollständigt.

Definition 3.16. $L^2([0,1]) :=$ Vervollständigung von $C^\infty([0,1])$ in Bezug auf

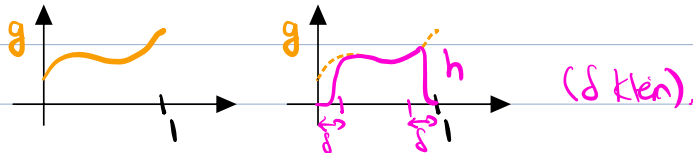
$$\|f\|_{L^2([0,1])} := \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$= \{ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} : f_n \in C^\infty(\mathbb{R}), \|f_n - f_m\|_{L^2} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \} / \sim,$$

$$(f_n) \sim (g_n) : \Leftrightarrow \|f_n - g_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

• **Skalarprodukt:** $(f, g)_{L^2([0,1])} = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx$, **Norm:** $\|f\|_{L^2([0,1])}$.

Bemerkung 3.17. Wir können jedes $f \in L^2([0,1])$ als L^2 -Grenzwert einer Folge von 1-periodischen Funktionen $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ schreiben. (Argument: ist $g \in C^\infty([0,1])$ mit $\|g - f\|_2 < \varepsilon$, müssen wir nur $h \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ mit $\|g - h\|_2 < \varepsilon$ finden. Können dies tun, indem wir g nahe 0 und 1 auf 0 abschneiden; Bild:



Natürlich gilt $e^{2\pi i n x} \in L^2([0,1])$, und $\{e^{2\pi i n x} : n \in \mathbb{Z}\}$ ist ein orthogonales System.

Satz 3.18. $\{e^{2\pi i n x} : n \in \mathbb{Z}\}$ ist ein vollständiges orthogonales System in $L^2([0,1])$. (Insbesondere ist $L^2([0,1])$ separabel.)

Beweis. Sei $f \in L^2([0,1])$, $(f, e^{2\pi i n x}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

• Wähle eine Folge $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ mit L^2 -Grenzwert f .

Dann wissen wir (Satz 1.11)

$$f_j(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{j,n} e^{2\pi i n x} \quad (\text{gleichmäßige Konvergenz}),$$

und nach Lemma 3.15 gilt

$$\begin{aligned} \|(f_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}} - (f_{k,n})_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_{j,n} - f_{k,n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f_j - f_k\|_{L^2([0,1])} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d.h. $((f_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}})_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\ell^2(\mathbb{Z})$.

• Was ist ihr Grenzwert?

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{j,n} = \lim_{j \rightarrow \infty} (f_j, e^{2\pi i n x}) = (f, e^{2\pi i n x}) = 0$$

$\Rightarrow (f_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ in $\ell^2(\mathbb{Z})$, folglich $f_j \rightarrow 0$ in $L^2([0,1])$.

Aber $f_j \rightarrow f$ in $L^2([0,1])$! Daher $f=0$.

□

Satz 3.11 gibt uns sofort:

Korollar 3.19. Sei $f \in L^2([0,1])$ und $f_n = (f, \varphi_n)$, $\varphi_n(x) = e^{2\pi i n x}$. Dann:

(i) $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \varphi_n$ (mit Konvergenz in $L^2([0,1])$).

(ii) $\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2$. (Plancherel/Parseval.)

(Oder kurz: $\|f\|_{L^2([0,1])} = \|(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$.)