

2.2. Der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Zunächst ein wenig Notation:

- Multiindex: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ($\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$).

Schreiben $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$

- $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n \Rightarrow x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$
- $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$$C^0(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ stetig}\},$$

$$C^k(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \partial^\alpha f \in C^0(\Omega) \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \partial^\alpha f \in C^0(\Omega) \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

Definition 2.1. (i) Für $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}_0$, definieren wir

$$\|\varphi\|_m := \sup_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|, |\beta| \leq m \\ x \in \mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|.$$

(ii) Der Schwartz-Raum (nach Laurent Schwartz) ist

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_m < \infty \forall m \in \mathbb{N}_0\}.$$

In Worten: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum aller Funktionen, die unendlich oft stetig differenzierbar sind, und deren Ableitungen sämtlich schneller abfallen als $C_m(1+|x|)^{-m}$ für alle m . (Siehe Lemma 2.3 unten.)

Beispiel 2.2. (i) Sei $a > 0$ und $\varphi(x) = e^{-ax^2}$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Dann gilt $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(Begründung: $x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) = P_{\alpha\beta}(x) e^{-ax^2}$, wobei $P_{\alpha\beta}(x)$ ein Polynom vom Grad $|\alpha| + |\beta|$ ist. Also ist $|P_{\alpha\beta}(x) e^{-ax^2}|$ beschränkt.)

(ii) $\varphi(x) = e^{-a|x|} \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, da φ an $x=0$ nicht differenzierbar ist.

(iii) $\varphi(x) = 1 \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, da $x_i \varphi(x) = x_i$ nicht beschränkt ist
($\Rightarrow \|\varphi\|_1 = \infty$).

(iv) $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Vektorraum: $\varphi, \psi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda\varphi, \varphi + \psi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.
(Übung.)

Lemma 2.3. Sei $\varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $m \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante C sodass

$$|\partial^\beta \varphi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^m}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Setze $P(x) = (1+|x|^2)^m$. Dann ist $|P(x) \partial^\beta \varphi(x)|$ beschränkt, also $\exists C' < \infty$, sodass $|P(x) \partial^\beta \varphi(x)| \leq C' \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, also
 $|\partial^\beta \varphi(x)| \leq \frac{C'}{(1+|x|)^m} \leq \frac{C}{(1+|x|)^m}.$ \square

Ein natürlicher und nützlicher Konvergenzbegriff für Folgen von Schwartz-Funktionen ist der folgende:

Definition 2.4. (i) Eine Folge $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, falls $\|\varphi_j - \varphi\|_m \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.
Wir schreiben dann $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{J}} \varphi$.

(ii) Eine Abbildung

$$F: \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$$

ist stetig, falls für alle konvergenten Folgen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{J}} \varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, gilt: $F(\varphi_j) \xrightarrow{\mathcal{J}} F(\varphi)$.

Da $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x) - \varphi_j(x)| \leq \|\varphi - \varphi_j\|_0 \rightarrow 0$, konvergiert also insbesondere φ_j gleichmäßig gegen φ ; und gleichmassen konvergiert $\partial^\alpha \varphi_j$ gleichmäßig gegen $\partial^\alpha \varphi$.