

### 3.5. Orthogonale Polynome

- Die Hermite-Polynome  $H_n(x)$  aus Definition 3.21 (vom Grad  $n$ ) sind orthogonal bzgl. des Skalarprodukts

$$(H_n, H_m) := \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \overline{H_m(x)} e^{-x^2} dx.$$

(Dies folgt aus der Orthogonalität in  $L^2(\mathbb{R})$  der Funktionen  $\psi_n(x) \sim e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$  in Satz 3.22.)

- Allgemeiner kann man ein beliebiges Gewicht  $g: I \rightarrow (0, \infty)$  betrachten ( $I \subseteq \mathbb{R}$  ist ein Intervall) mit der Eigenschaft

$$\int_I g(x) |x|^n dx < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Daten  $(I, g)$  bestimmen eindeutig eine Familie von orthogonalen Polynomen  $P_0, P_1, \dots$  wie folgt:

- (i)  $P_n(x)$  ist ein Polynom vom Grad  $n$  mit Leitkoeffizient 1, d.h.  $P_n(x) = x^n + \dots$ . (Andere Normalisierungen können auch nützlich sein.)

- (ii) Die  $P_n$  sind orthogonal für das Skalarprodukt

$$(P_n, P_m) := \int_I \overline{P_n(x)} P_m(x) g(x) dx.$$

Man kann diese Polynome mit dem Gram-Schmidt-Verfahren finden, angewendet auf  $m_n(x) := x^n$ :

$$P_0 = m_0, \quad P_n = m_n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(P_j, m_n)}{(P_j, P_j)} P_j.$$

Beispiel 3.24.  $(I, g) = ((-\infty, \infty), e^{-x^2}) \Rightarrow P_n = 2^{-n} H_n.$

Leitkoeffizient 1      Leitkoeffizient  $2^n$

Beispiel 3.25.  $I = [-1, 1]$ ,  $\rho(x) = 1$ . Die zugehörigen orthogonalen Polynome heißen (bis auf Normalisierung) Legendre-Polynome  $P_l$ . (Satz 3.26 gibt eine explizite Formel für sie an.)

Satz 3.26. (Rodriguez-Formel.) Wir definieren das  $l$ -te Legendre-Polynom als

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (l \in \mathbb{N}_0).$$

Dann gilt: (i)  $P_l$  hat Grad  $l$ , und  $P_l(1) = 1$  (Normalisierung).

(ii) 
$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Beweis. (i)  $P_l$  ist die  $l$ -te Ableitung des Polynoms  $(x^2 - 1)^l$  vom Grad  $2l$ , hat also Grad  $l$ .

$$\begin{aligned} P_l(1) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} ((x+1)^l (x-1)^l) \Big|_{x=1} = \frac{1}{2^l l!} \cdot \left( (x+1)^l \frac{d^l}{dx^l} (x-1)^l \right) \Big|_{x=1} \\ &= \frac{1}{2^l l!} \cdot 2^l l! = 1. \end{aligned}$$

(ii) Sei zunächst  $l' < l$ . Dann ist

$$(P_l, P_{l'}) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \cdot \frac{1}{2^{l'} l'!} \frac{d^{l'}}{dx^{l'}} (x^2 - 1)^{l'} dx$$

$l$ -mal partiell integrieren;  
keine Randterme, da für  $m \leq l-1$   $\frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^l = 0$  an  $x = \pm 1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{(-1)^l}{2^{l+l'} l! l'!} (x^2 - 1)^l \frac{d^{l+l'}}{dx^{l+l'}} (x^2 - 1)^{l'} dx = 0. \\ &\quad \underbrace{\frac{d^{l+l'}}{dx^{l+l'}} (x^2 - 1)^{l'}}_{\substack{> 2l' \text{ Ableitungen} \\ \Rightarrow = 0}} \text{ Grad } 2l' \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$(P_l, P_l) = \frac{(-1)^l}{2^{2l} l!^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2 - 1)^l dx = \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l} l!^2} I_l.$$

$l$ -mal partiell integrieren

Wir berechnen  $I_l := \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l dx$  rekursiv:  $I_0 = 2$ , und für  $l \geq 1$ :

$$I_\ell = \int_{-1}^1 \left( \frac{d}{dx} x \right) \cdot (x^2-1)^\ell dx = 2\ell x (x^2-1)^{\ell-1}$$

$$= \underbrace{x(x^2-1)^\ell}_{=0} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x \frac{d}{dx} (x^2-1)^\ell dx$$

$$= -2\ell \int_{-1}^1 (x^2-1+1)(x^2-1)^{\ell-1} dx$$

$$= -2\ell(I_\ell + I_{\ell-1})$$

$$\Rightarrow I_\ell = -\frac{2\ell}{2\ell+1} I_{\ell-1} = \dots = (-1)^\ell \frac{2\ell(2\ell-2)\dots 4\cdot 2}{(2\ell+1)2\ell-1\dots 3\cdot 1} = (-1)^\ell \frac{(2^\ell \ell!)^2}{(2\ell+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{2^{2\ell} \ell!^2} I_\ell = \frac{1}{2\ell+1}.$$

□

Die Legendre-Polynome treten auch als Lösungen bestimmter Differentialgleichungen auf:

Satz 3.27. (i) Der Operator  $L = \frac{d}{dx}((x^2-1)\frac{d}{dx}) : \text{Poly} := \{\text{Polynome in } x\} \rightarrow \text{Poly}$  ist selbstadjungiert.

(ii) Es gilt  $LP_\ell = \ell(\ell+1)P_\ell$ .

(iii)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}P_\ell\right)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$  ist eine vollständige ONB von  $L^2([-1,1])$ .

Beweis. (i) Für Polynome  $u, v$  gilt

$$(Lu, v) = \int_{-1}^1 ((x^2-1)u'(x))' v(x) dx$$

$$= \underbrace{(x^2-1)u'(x)v(x)}_{=0} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x^2-1)u'(x)v'(x) dx$$

$$= -\underbrace{u(x)(x^2-1)v'(x)}_{=0} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 u(x)((x^2-1)v'(x))' dx$$

$$= (u, Lv).$$

(ii) Da  $LP_\ell$  ein Polynom vom Grad  $\leq \ell$  ist, gilt

$$LP_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{2j+1}{2} (LP_\ell, P_j) P_j \stackrel{(i)}{=} \sum_{j=0}^{\ell} \frac{2j+1}{2} (P_\ell, \overbrace{LP_j}^{\text{Grad} \leq j}) P_j.$$

Da  $(P_l, p) = 0 \forall$  Polynome  $p$  vom Grad  $\leq l-1$ , folgt

$$LP_l = c_l P_l, \quad c_l = \frac{2l+1}{2} (P_l, LP_l).$$

Können  $c_l$  elegant bestimmen, indem wir Leitkoeffizienten vergleichen:

Ist  $P_l(x) = a_l x^l + \dots$ , so ist

$$\begin{aligned} LP_l(x) &= \frac{d}{dx} \left( (x^2-1)(l a_l x^{l-1} + \dots) \right) = \frac{d}{dx} \left( l a_l x^{l+1} + \dots \right) \\ &= l(l+1) a_l x^l + \dots = c_l (a_l x^l + \dots) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_l = l(l+1).$$

(iii) Übung.

□

Weitere Familien von orthogonalen Polynomen werden in Übungen behandelt, z.B. die Chebyshev-Polynome, die in der Approximationstheorie und Numerik eine wichtige Rolle spielen.