

3. Orthogonale Funktionensysteme

Motivation. Wir betrachten eine schwingende Saite der Länge L , die an den Enden festgehalten wird:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Später werden wir noch Anfangsbedingungen verlangen:

$$\begin{cases} u(0, x) = v(x), & (v(0) = v(L) = 0) \\ \partial_t u(0, x) = w(x), & (w(0) = w(L) = 0) \end{cases} \quad (**)$$

Wir suchen zunächst separate Lösungen von $(*)$, d.h.

$$u(t, x) = f(t) g(x), \quad g(0) = g(L) = 0.$$

Dies führt zur Gleichung

$$\frac{1}{c^2} f''(t) g(x) - f(t) g''(x) = 0.$$

Also hängt

$$\frac{1}{c^2} \frac{f''(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}$$

nicht von t ab (vgl. rechte Seite) und auch

nicht von x (vgl. linke Seite),

ist also gleich einer Konstanten $-\lambda$. Wir erhalten 2 Gleichungen:

$$\frac{1}{c^2} f''(t) = -\lambda f(t), \quad g''(x) = -\lambda g(x) \quad (\& g(0) = g(L) = 0).$$

Die Gleichung für g hat die allgemeine Lösung

$$g(x) = a \cos(\sqrt{\lambda} x) + b \sin(\sqrt{\lambda} x);$$

die Randbedingungen geben $0 = g(0) = a$ und dann

$$0 = g(L) = b \sin(\sqrt{\lambda} L).$$

Wir erhalten also nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn

$$\sqrt{\lambda} L = k\pi$$

gilt für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir interpretieren die Werte

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$$

als Eigenwerte, und die entsprechende Lösung (mit $b=1$)

$$g_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

als Eigenfunktionen für das Eigenwertproblem $\begin{cases} g_k''(x) = -\lambda_k g_k(x), \\ g_k(0) = g_k(L) = 0. \end{cases}$

• Für $\lambda = \lambda_k$ hat die Gleichung für f nun die allgemeine Lösung

$$f(t) = a \sin(c\sqrt{\lambda_k} t) + b \cos(c\sqrt{\lambda_k} t).$$

• Wir haben nun viele separate Lösungen von (*) gefunden; da (*) linear ist, löst auch jede Superposition

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)) \sin\left(\frac{\omega_k}{c} x\right), \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{L},$$

die Gleichung (*) (wenn $|a_k|, |b_k|$ schnell genug gegen 0 konvergieren, sodass u wohl-definiert und C^2 ist).

• Anfangsbedingungen? Wir wollen a_k, b_k so wählen, dass

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) =: v(x)$$

$$\partial_t u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \omega_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) =: w(x).$$

Wir haben bereits gesehen, dass dies für hinreichend glatte Funktionen

v, w möglich ist (Übung), mit

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L v(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx,$$

(***)

$$b_k = \frac{2}{w_k L} \int_0^L w(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Bemerkung. Die Eigenfunktionen $g_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ sind "vollständig": jede "genügend gute" Funktion v kann als "unendliche Linearkombination" von den g_k geschrieben werden.

- Vergleiche das obige Beispiel mit endlich-dimensionaler linearer Algebra:
sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) .
Sei $A: V \rightarrow V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung, d.h.

$$(Av, w) = (v, Aw) \quad \forall v, w \in V.$$

Dann \exists Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n ($n = \dim_{\mathbb{C}} V$) von Eigenvektoren von A , d.h. $Av_j = \lambda_j v_j$, mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$ und $(v_j, v_k) = \delta_{jk}$.
Jeder Vektor $v \in V$ kann als Linearkombination der v_j geschrieben werden:

$$v = \sum_{k=1}^n q_k v_k, \text{ wobei } q_k = (v_k, v). \quad (\text{vgl. (***)})$$

Was sind bei der schwingenden Saite $V, (\cdot, \cdot)$, und A ?

- V ist ein Raum von Funktionen $g = g(x)$ mit $g(0) = g(L) = 0$. (Das rigoreuse Setup von unendlich-dimensionalen Eigenwertproblemen ist äusserst subtil \leadsto Funktionalanalysis I/II. Daher hier nicht mehr Details.)

(Bemerkung: V ist hier unendlich-dimensional — z.B. sind ja alle g_k linear unabhängig.)

- (\cdot, \cdot) ist das L^2 -Skalarprodukt

$$(u, v) = \int_0^L u(x) \overline{v(x)} dx.$$

• Der Operator $A: u \mapsto u''$ ist selbstadjungiert, da für $u, v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} (u'', v) &= \int_0^L u''(x) \overline{v(x)} dx = \underbrace{u' \overline{v}} \Big|_0^L - \int_0^L u'(x) \overline{v'(x)} dx \\ &= 0, \text{ da } v=0 \text{ an } 0, L \\ &= - \underbrace{u \overline{v'}} \Big|_0^L + \int_0^L u(x) \overline{v''(x)} dx = \int_0^L u(x) \overline{v''(x)} dx. \\ &= 0, \text{ da } u=0 \text{ an } 0, L \end{aligned}$$

Extrapolieren wir (ohne Rücksicht auf Verluste) den endlich-dimensionalen Fall, können wir also erwarten, dass es eine "Orthonormalbasis" von V gibt, die aus Eigenfunktionen $g_k'' = -\lambda_k g_k$ von A besteht; und jede Funktion kann in diese entwickelt werden. Und genau das haben wir oben gesehen!

Bemerkung. Die g_k sind nicht normiert – nimm stattdessen $\sqrt{\frac{2}{L}} g_k =: v_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$.
Dann gilt in der Tat $(v_j, v_k) = \delta_{jk}$. ~~(*)~~ ist dann nichts anderes als $v = \sum_{k=1}^{\infty} (v_k, v) v_k$!

Unter Ziel in diesem Kapitel ist es, einige Grundbegriffe von unendlich-dimensionalen Vektorräumen mit Skalarprodukt einzuführen und einige der obigen Beobachtungen/Überlegungen auf etwas soliden Boden zu stellen.