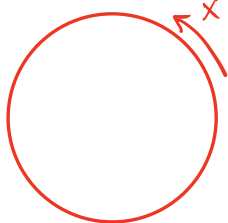


1.4. Wärmeleitung auf einem Ring.



- Die Temperatur zum Zeitpunkt t sei durch die Funktion $u(t, x)$ gegeben, wobei $x \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ (L = Umfang des Rings).
(Äquivalent: $x \in \mathbb{R}$, und $u(t, x)$ ist L -periodisch in x , d.h. $u(t, x+L) = u(t, x)$.)

- u erfülle die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x),$$

wobei $D > 0$ eine Konstante ist (Temperaturleitfähigkeit).

- Normalisierung:

(i) Skalierung von $x \rightsquigarrow$ können $L = 2\pi$ annehmen.

(ii) Skalierung von $t \rightsquigarrow$ können $D = 1$ annehmen.

- Anfangsbedingung: zur Zeit $t = 0$ ist die Temperatur gegeben durch $f(x)$.

- Wir wollen also lösen:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x), & x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \\ u(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (W)$$

- Wir nehmen an: $f \in C^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ (d.h. $f \in C^2(\mathbb{R})$ und f ist 2π -periodisch) $\xRightarrow{\text{Satz 1.7}} |f_n| \leq \frac{C}{1+n^2}$ für eine Konstante C (*)

Satz 1.17. Unter dieser Annahme an f hat das Anfangswertproblem (W) für die Wärmeleitungsgleichung eine eindeutige Lösung

$$u \in C^0([0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \cap C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}). \quad (**)$$

(D.h. $u(t, x)$ ist stetig in $t \geq 0$, unendlich oft differenzierbar in $t > 0$, und 2π -periodisch in x .)

Wir werden im Beweis eine Formel für u herleiten.

Beweis: Schritt 1: Fourierreihen; Eindeutigkeit der Lösung.

Angenommen, wir haben bereits eine Lösung (**). Für $t \geq 0$ ist dann $u(t, \cdot)$ eine 2π -periodische C^1 Funktion, also

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) e^{inx}, \quad u_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) e^{-inx} dx.$$

(i) Da $u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} u(0, x) = f(x)$ gleichmäßig, ist $u_n(t)$ stetig an $t=0$, mit $u_n(0) = f_n$.

(ii) Ebenso gilt $u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} u(t_0, x)$ gleichmäßig für jedes $t_0 > 0$. Also ist $u_n \in C^0([0, \infty))$ stetig auf $[0, \infty)$.

(iii) Für $t > 0$ ist u_n beliebig oft differenzierbar, d.h. $u_n \in C^\infty(0, \infty)$. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \frac{u_n(t+h) - u_n(t)}{h} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} e^{-inx} dx \\ &\quad \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)}_{\text{gleichmäßig}} e^{-inx} dx = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right)_n, \end{aligned}$$

was zeigt, dass $u_n \in C^1(0, \infty)$; höhere Ableitungen können auf ähnliche Art und Weise bestimmt werden.

(iv) Insbesondere gilt für $t > 0$:

$$\begin{aligned} u'_n(t) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right)_n \stackrel{(w)}{=} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, \cdot) \right)_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) e^{-inx} dx \\ &\quad \xrightarrow{\text{partielle Integration; } x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) e^{-inx} \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch} \Rightarrow \text{keine Randterme}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) \underbrace{\frac{d^2}{dx^2} e^{-inx}}_{= -n^2 e^{-inx}} dx \\ &= -n^2 u_n(t) \end{aligned}$$

(v) Zusammengefasst gilt also für $u_n = u_n(t)$ ($t \geq 0$):

- $u_n \in C^0([0, \infty)) \cap C^\infty(0, \infty)$
- u_n erfüllt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_n'(t) \stackrel{(iv)}{=} -n^2 u_n(t) \\ u_n(0) \stackrel{(i)}{=} f_n \end{cases}$$

Diese Gleichungen (ein System von ∞ vielen entkoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen: eine Gleichung für jedes $n \in \mathbb{Z}$) bestimmen $u_n(t)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$ eindeutig.

$$u_n(t) = f_n e^{-n^2 t}. \quad (I)$$

Damit ist auch

$$u(t, x) \stackrel{\text{Satz 1.9}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) e^{inx} \quad (t > 0) \quad (II)$$

eindeutig bestimmt.

• Schritt 2: Existenz der Lösung.

Gegeben $f \in C^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definieren wir $u_n(t)$ durch (I).

Wir wollen zeigen, dass dann (II) wohldefiniert ist und eine Lösung von (w) definiert.

(i) Wohldefiniertheit. Da $|f_n e^{-n^2 t}| \leq |f_n|$ für $t \geq 0$, und $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| < \infty$ nach (*), ist $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) e^{inx}$ gleichmäßig und absolut konvergent für jedes $t \geq 0$, und $u(t, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(ii) Anfangswert. Es gilt $u(0, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx} \stackrel{\text{Satz 1.9}}{=} f(x)$.

(iii) Differentialgleichung in $t > 0$.

• Da für $t > 0$ $|u_n(t)| = |f_n| e^{-n^2 t} \leq \frac{C_k}{(1+|n|)^{2+k}}$ (III)
für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, (Grund: für beliebige $k \in \mathbb{N}_0$ ist
ist $u(t, \cdot) \in C^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ $e^{-n^2 t} (1+|n|)^k$ beschränkt)
für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{u_n(t) \cdot (-n^2)}_{= u'_n(t)} e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u'_n(t) e^{inx}. \quad (\text{IV})$$

• Andererseits haben wir für $t > 0$ und kleine $h > 0$

$$\frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{u_n(t+h) - u_n(t)}{h} e^{inx}.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen $h_n \in [0, h]$, sodass

$$\frac{u_n(t+h) - u_n(t)}{h} = u'_n(t + h_n);$$

und weiterhin ist

$$\begin{aligned} |u'_n(t + h_n) - u'_n(t)| &= |f_n e^{-n^2(t+h_n)} - f_n e^{-n^2 t}| \\ &= f_n e^{-n^2 t} |e^{-n^2 h_n} - 1| \\ &\stackrel{(\text{III}), k=0}{\leq} C_0 \frac{1 - e^{-n^2 h}}{(1+|n|)^2} \end{aligned}$$

Gegeben $\varepsilon > 0$, schätzen wir also ab:

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_n(t+h) - u_n(t)}{h} - u'_n(t) \right) e^{inx} \right| \leq C_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1 - e^{-n^2 h}}{(1+|n|)^2}. \quad (\text{V})$$

Wir wollen zeigen, dass dies für hinreichend kleine $h > 0$ kleiner ist als ε . Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $C_0 \sum_{|n| \geq N} \frac{1}{(1+|n|)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$, und dann $h > 0$, sodass

$$0 \leq 1 - e^{-n^2 h} < \frac{\varepsilon}{2(2N-1)C_0}, \quad |n| < N.$$

$$\Rightarrow (\text{V}) \leq C_0 \sum_{|n| < N} \frac{1 - e^{-n^2 h}}{(1+|n|)^2} + C_0 \sum_{|n| \geq N} \frac{1}{(1+|n|)^2}$$

$$< C_0 \cdot (2N-1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(2N-1)C_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Genau genommen haben wir nur den rechtsseitigen Grenzwert ($h > 0$) betrachtet. $h < 0$: Übung.

Dies zeigt, dass $u(t,x)$ in $t > 0$ in t differenzierbar ist, und in der Tat

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u'_n(t) e^{inx} \stackrel{(\text{IV})}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x);$$

d.h. (w) gilt.

(iv) Die Aussage $u \in C^0([0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ kann durch (begründete!) Vertauschung von Fourierreihe (in x) und Grenzwert (in t) gezeigt werden (Übung). $u \in C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ folgt auf ähnliche Art und Weise. \square

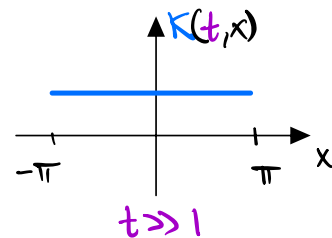
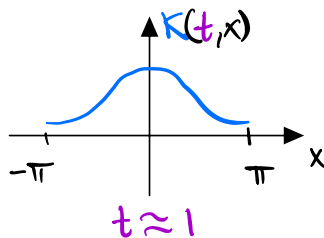
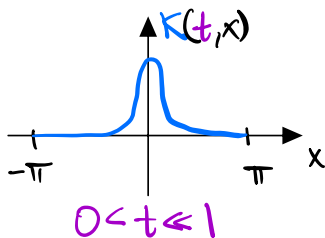
Der Beweis gibt folgende Formel für die Lösung von (w) (vgl. (I)–(III)):

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{f_n}_{= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} dy} e^{-n^2 t} e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(t, x-y) f(y) dy, \quad t > 0,$$

wobei

$$K(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} e^{inx} \quad (*)$$

die Jacobi'sche Theta-Funktion ist.



Satz 1.18. Für $t > 0$ ist $K(t, x) > 0$. Insbesondere gilt: ist

$f(x) \geq 0$, so gilt für die Lösung $u(t, x)$ von (w), dass $u(t, x) \geq 0$ für alle x und $t > 0$.

Beweis. Die Poissonsche Summenformel gibt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + nL) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{L}\right) e^{\frac{2\pi i n x}{L}}.$$

Für $L = 2\pi$ also $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n) e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n).$

Ansichts von (*) wollen wir dies anwenden mit einer Funktion $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, für die gilt: $\hat{f}(n) = 2\pi e^{-n^2 t}$ (t ist fix). Dies gilt für $f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. (Siehe Lemma 1.19.)

$$\Rightarrow K(t, x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{(x - 2\pi n)^2}{4t}\right).$$

□

Um den Beweis zu vervollständigen, brauchen wir:

Lemma 1.19. Für $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ gilt $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$.

Beweis Später. □