
LE THÉORÈME D'INDICE D'ATIYAH-SINGER

Jean-Philippe CHASSÉ

chasseje@dms.umontreal.ca

Projet final pour le cours *Analyse géométrique* (MAT6315)

Semestre d'hiver 2020

Version corrigée soumise le 1^{er} juin 2020

RÉSUMÉ

Le théorème d'indice d'Atiyah-Singer est l'un des plus profonds résultats du XX^e siècle en géométrie. Il recoupe entre autres le théorème de Chern-Gauß-Bonnet, la formulation de Hirzebruch du théorème de Riemann-Roch et le théorème de signature de Hirzebruch. Le but de ce document est d'introduire le lecteur ou la lectrice aux aspects théoriques nécessaires à la compréhension de l'énoncé, puis d'expliquer l'idée de la preuve K -théorique [AS68a, AS68b] du théorème d'indice.

TABLE DES MATIÈRES

I	Éléments de K -théorie	1
II	Éléments de calcul pseudo-différentiel	6
III	Le théorème d'indice	11

I. ÉLÉMENTS DE K -THÉORIE

I.A. L'ANNEAU DE GROTHENDIECK D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

Dans ce paragraphe, nous présentons d'abord une construction purement algébrique due à Grothendieck, puis nous l'utilisons pour définir certains invariants algébriques associés à un espace topologique. Pour davantage de détails, le lecteur ou la lectrice intéressé-e est référé-e aux notes d'Atiyah [Ati64] ou au livre de Husemöller [Hus94].

Proposition 1 *Soit S , un monoïde abélien. Il existe un groupe abélien $K(S)$, unique à isomorphisme canonique près, et un monomorphisme de monoïdes $i : S \hookrightarrow K(S)$*

ayant la propriété universelle suivante : pour tout groupe abélien A et tout morphisme de monoïdes $f : S \rightarrow A$, il existe un unique morphisme de groupes $\tilde{f} : K(S) \rightarrow A$ faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} K(S) & & \\ \uparrow i & \searrow \tilde{f} & \\ S & \xrightarrow{f} & A \end{array} .$$

De plus, lorsque S est un semi-anneau, $K(S)$ a une structure naturelle d'anneau qui respecte la propriété universelle ci-haut pour tout anneau A et tout morphisme de semi-anneaux $f : S \rightarrow A$. On appelle $K(S)$ le groupe de Grothendieck de S (ou anneau de Grothendieck lorsque S est un semi-anneau).

PREUVE: Notons que l'addition de S descend sur

$$K(S) := S \times S / \Delta(S)$$

où $\Delta : S \rightarrow S \times S$ est l'inclusion de la diagonale. C'est en fait un groupe avec l'inverse de $[m, n] \in K(S)$ donné par $-[m, n] = [n, m]$. On définit alors $i(m) := [m, 0]$ et $\tilde{f}([m, n]) := f(m) - f(n)$; son unicité est une vérification directe. Finalement, l'unicité de $K(S)$ découle de l'universalité de la propriété et la structure d'anneau est obtenue en étendant bilinéairement $[m, n][m', n'] := [mm' + nn', mn' + nm']$. \square

Or, notons qu'à tout espace compact Hausdorff X , on peut associer le semi-anneau $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ formé par les classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels complexes sur X . La somme est alors induite par la somme de Whitney de fibrés et le produit, par le produit tensoriel (interne) de fibrés. On appelle

$$K(X) := K(\text{Vect}_{\mathbb{C}}(X))$$

l'anneau de Grothendieck de X . Notons que la naturalité de la construction assure que toute application continue $f : X \rightarrow Y$ induit un homomorphisme $f^* : K(Y) \rightarrow K(X)$ avec la propriété que $(fg)^* = g^*f^*$ et $\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_{K(X)}$. En termes catégoriques, K définit un foncteur contravariant de la catégorie des espaces compacts Hausdorff à la catégorie des anneaux commutatifs.

De plus, si X est seulement localement compact et Hausdorff, on définit l'anneau de Grothendieck à support compact de X par

$$K_{\text{cpt}}(X) := \text{Ker} \left(i^* : K(X^+) \rightarrow K(\star) \right)$$

où \star est l'espace topologique constitué d'un unique point, X^+ est la compactification en un point de X (par exemple, $(\mathbb{R}^n)^+ = S^n$) et $i : \star \hookrightarrow X^+$ est l'inclusion du point à l'infini. Dans ce cas, une application continue $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme

$f^* : K_{\text{cpt}}(Y) \rightarrow K_{\text{cpt}}(X)$ si elle est propre, c'est-à-dire si la préimage par f d'un compact est compacte. De plus, puisque $X^+ = X \sqcup \star$ lorsque X est compact, on a alors $K_{\text{cpt}}(X) = K(X)$.

Notons que par la construction universelle de la proposition 1, tout élément de $K(X)$ peut s'écrire comme une différence formelle de fibrés $[E] - [F]$. Pour $K_{\text{cpt}}(X)$, le résultat suivant permet de décrire les éléments de l'anneau uniquement en termes de fibrés sur X (et non de X^+).

Proposition 2 (Construction de Atiyah-Bott-Shapiro) *Soit X , un espace localement compact et Hausdorff. Tout élément de $K_{\text{cpt}}(X)$ peut être représenté par un triplet $(V_0, V_1; \sigma)$, où V_0 et V_1 sont des fibrés vectoriels complexes sur X et $\sigma : V_0|_{X-C} \xrightarrow{\sim} V_1|_{X-C}$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels complexes défini hors d'un compact C de X .*

De plus, $(V_0, V_1; \sigma)$ et $(V'_0, V'_1; \sigma')$ représentent la même classe si et seulement s'il existe des fibrés E et E' ainsi que des isomorphismes de fibrés $\varphi_i : V_i \oplus E \xrightarrow{\sim} V'_i \oplus E'$ faisant commuter le diagramme ci-bas

$$\begin{array}{ccc} V_0 \oplus E|_{X-K} & \xrightarrow{\sigma \oplus \mathbb{1}} & V_1 \oplus E|_{X-K} \\ \varphi_0|_{X-K} \downarrow & & \downarrow \varphi_1|_{X-K} \\ V'_0 \oplus E'|_{X-K} & \xrightarrow{\sigma' \oplus \mathbb{1}} & V'_1 \oplus E'|_{X-K} \end{array}$$

hors d'un compact K contenant C et C' .

L'intuition est la suivante : bien que V_0 et V_1 ne s'étendent pas nécessairement sur X^+ , et donc ne définissent pas des éléments de $K_{\text{cpt}}(X)$, l'isomorphisme σ défini hors d'un compact permet de donner un sens à leur différence dans $K(X^+)$.

Nous aurons également besoin d'un résultat fondamental sur la K -théorie, c'est-à-dire l'étude du foncteur K , que nous accepterons sans preuve.

Théorème 1 (Théorème d'isomorphisme de Thom K -théorique) *Soit E , un fibré vectoriel complexe sur un espace topologique localement compact et Hausdorff X . La section nulle $i : X \hookrightarrow E$ induit un isomorphisme*

$$i! : K_{\text{cpt}}(X) \xrightarrow{\sim} K_{\text{cpt}}(E)$$

appelé l'isomorphisme de Thom de E .

REMARQUE: Nous pouvons en fait définir une famille de groupes : $K^{-n}(X, Y) := K(\Sigma^n(X/Y))$, où Σ^n est la n -suspension réduite, pour tout entier naturel n et toute

paire d'espaces compacts Hausdorff $Y \subseteq X$. Ces groupes définissent ce qu'on appelle une *théorie de cohomologie extraordinaire*. En particulier, à toute paire d'espaces compacts Hausdorff (X, Y) est associée une suite longue exacte de groupes de K -théorie (voir [Hus94] pour davantage de détails).

REMARQUE: Il existe également des versions de ces groupes pour les fibrés vectoriels réels (KO -théorie), les espaces équipés d'une involution (KR -théorie), ainsi que les espaces équipés d'une action par un groupe de Lie compact G (K -théorie équivariante ou K_G -théorie). De façon correspondante, il y a des versions du théorème d'indice pour chacune de ces théories ; l'espace manque cependant pour les présenter ici.

I.B. SÉRIES DE PUISSANCES FORMELLES

Dans ce paragraphe, nous définissons certaines séries de puissances formelles qui seront essentielles à la formulation cohomologique du théorème d'indice. Cette section demande une certaine connaissance de la théorie cohomologique et des classes caractéristiques. Pour davantage de détails sur ces sujets, le lecteur ou la lectrice est référé·e aux excellents livres de Hatcher [Hat01] pour le premier sujet et de Milnor et Stasheff [MS74] pour le second. Lorsque les coefficients sont omis, la cohomologie est toujours prise avec coefficients rationnels.

Nous commençons par énoncer un fait classique à propos des fibrés vectoriels qui allégera grandement les définitions qui suivent.

Proposition 3 (Principe de scindement) *Soit E , un fibré complexe de rang n sur une variété X . Il existe une variété X_E , compacte si X l'est, et un fibré lisse et propre $\pi : X_E \rightarrow X$ tels que*

- (i) *l'homomorphisme $\pi^* : H^\bullet(X) \rightarrow H^\bullet(X_E)$ est injectif;*
- (ii) *il existe un isomorphisme de fibrés*

$$\pi^*E \cong \ell_1 \oplus \cdots \oplus \ell_n,$$

où ℓ_k est un fibré en droites complexes sur X_E .

De plus, si $E = F \otimes \mathbb{C}$ pour un fibré réel orienté F de rang pair, alors nous pouvons prendre $\ell_{n-i+1} = \overline{\ell_i}$.

Ainsi, si nous notons par $x_i := c_1(\ell_i) \in H^2(X)$ la première classe de Chern de ℓ_i (qui est égale à sa classe d'Euler, car $\text{rang}_{\mathbb{C}} \ell_i = 1$), la *classe totale de Chern* de E est obtenue par l'égalité

$$\pi^*c(E) := \pi^*(1 + c_1(E) + \cdots + c_n(E)) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i) \in H^{2\bullet}(X_E).$$

De même, se rappelant que la i -ième classe de Pontrjagin est défini par l'égalité $p_i(F) := (-1)^i c_{2i}(F \otimes \mathbb{C})$ et que $c_1(\bar{\ell}_i) = -c_1(\ell_i)$, la *classe totale de Pontrjagin* de F est obtenue par l'égalité

$$\pi^* p(F) := \pi^* \left(1 + p_1(F) + \cdots + p_{\frac{n}{2}}(F) \right) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i^2) \in H^{4\bullet}(X_E).$$

De plus, si F est un fibré réel orienté de rang impair, il suffit de remplacer F par $F \oplus \mathbb{R}$ dans la formule ci-haut.

Le principe de scindement permet ainsi de définir implicitement trois quantités qui apparaissent dans la formulation cohomologique du théorème d'indice :

$$\begin{aligned} \pi^* \text{Td}(E) &:= \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} \in H^{2\bullet}(X_E) \\ \pi^* \hat{A}(F) &:= \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)} \in H^{4\bullet}(X_E) \\ \pi^* \text{ch}(E) &:= \sum_{i=1}^n e^{x_i} \in H^{2\bullet}(X_E) \end{aligned}$$

appelés la *classe de Todd*, la \hat{A} -classe et le *caractère de Chern* respectivement. On associe chacune des fonctions analytiques apparaissant ici à leur série de Taylor en 0, dont les coefficients sont bien rationnels. Notons que ces séries sont en réalité finies, car X est une variété.

Notons que le caractère de Chern a la propriété que $\text{ch}(E \oplus E') = \text{ch}(E) + \text{ch}(E')$ et $\text{ch}(E \otimes E') = \text{ch}(E) \text{ch}(E')$. Ainsi, par la proposition 1, il induit un morphisme d'anneaux $\text{ch} : K_{\text{cpt}}(X) \rightarrow H_{\text{cpt}}^{2\bullet}(X)$ pour toute variété X . Ce morphisme a un lien intéressant avec l'isomorphisme de Thom du théorème 1 : si $i : X \hookrightarrow E$ est l'inclusion de la section nulle d'un fibré complexe sur une variété orientée, alors

$$\pi_! \text{ch } i_! u = \mathcal{S}(E) \cdot \text{ch } u \quad \forall u \in K(X), \quad (1)$$

où $\mathcal{S}(E) := \pi_! \text{ch } i_!(1)$ est appelé le *défaut du caractère de Chern* et $\pi_! := \mathcal{D}_X \pi_* \mathcal{D}_E : H_{\text{cpt}}^{\bullet+2n}(E) \rightarrow H_{\text{cpt}}^{\bullet}(X)$ est appelée l'*intégration le long des fibres*; c'est en fait un isomorphisme. Nous notons ici par $\mathcal{D}_X : H_{\text{cpt}}^{\bullet}(X) \xrightarrow{\sim} H_{\dim X - \bullet}(X)$ la dualité de Poincaré.

Proposition 4 *La classe de Todd, la \hat{A} -classe et le défaut du caractère de Chern respectent les relations*

$$\begin{aligned} \text{Td}(F \otimes \mathbb{C}) &= \hat{A}(F)^2 \\ \mathcal{S}(E) &= (-1)^n \text{Td}(E)^{-1} \end{aligned}$$

pour tout fibré complexe E de rang n et tout fibré réel orienté F sur une variété X .

REMARQUE: La classe de Todd, la \hat{A} -classe et le caractère de Chern ont leur intérêt propre en topologie algébrique. Par exemple, les deux premières quantités ont un rôle important d'étude des anneaux de cobordismes. De son côté, le caractère de Chern induit un isomorphisme $K(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H^{2\bullet}(X)$ lorsque X est un CW-complexe fini.

II. ÉLÉMENTS DE CALCUL PSEUDO-DIFFÉRENTIEL

II.A. DÉFINITIONS DE BASE

Dans ce paragraphe, nous jetons les bases du calcul pseudo-différentiel. Les opérateurs pseudo-différentiels ne permettent pas seulement de généraliser l'énoncé du théorème d'indice, mais sont en fait un ingrédient essentiel de la preuve puisqu'ils offrent une plus grande flexibilité que les opérateurs différentiels classiques. Pour davantage de détails, voir la troisième itération de l'oeuvre de Hörmander [H85].

Cette théorie débute avec l'observation suivante. Pour un opérateur différentiel $P = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha D^\alpha$ sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, où $A_\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et $D^\alpha := i^{|\alpha|} \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, on a la relation

$$(Pu)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi, \quad (2)$$

où $\hat{u}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$ est la transformée de Fourier de u et $p(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) \xi^\alpha$ est le *symbole (complet)* de P . Or, le côté droit de cette égalité a un sens même si p n'a pas la forme d'un symbole d'un opérateur différentiel.

Définition Fixons $m \in \mathbb{R}$. Une fonction lisse $p : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{R}$ ayant support compact en x est un *symbole d'ordre m* si pour tous multi-indices α et α' , il existe une constante $C_{\alpha\alpha'} > 0$ telle que

$$\left| \left(D_x^\alpha D_\xi^{\alpha'} p \right) (x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\alpha'} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha'|}$$

pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On note par Symb^m l'espace vectoriel de ces fonctions et par \mathcal{P}_m l'espace vectoriel des opérateurs P définis par la formule (2) pour $p \in \text{Symb}^m$. On dit alors que P est un *opérateur pseudo-différentiel d'ordre m* avec *symbole p* .

Proposition 5 Tout $P \in \mathcal{P}_m$ sur \mathbb{R}^n induit un opérateur borné $P : W^{s+m,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, où $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ est la complétion de Sobolev de l'espace de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, k, \exists C_{\alpha,k} \text{ t.q. } |D^\alpha u(x)| \leq C_{\alpha,k} (1 + |x|)^{-k}\}.$$

PREUVE: Notons d'abord que P définit un opérateur $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Ceci découle directement du fait que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$|x|^{2N} (Pu)(x) = (-1)^N \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) \left(\Delta_\xi^N e^{i\langle x, \xi \rangle} \right) d\xi$$

a croissance bornée puisque $p \in \text{Symb}^m$ et $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (attention : toutes les égalités sont à une constante de normalisation près).

Pour voir que cette extension définit un opérateur sur les espaces de Sobolev, il faut cependant davantage de travail. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ et posons $|\alpha| = t$. Alors, nous avons

$$\zeta^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) e^{i\langle x, \zeta \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (D_x^\alpha p)(x, \xi) e^{i\langle x, \zeta \rangle} dx.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) e^{i\langle x, \zeta \rangle} dx \right| &= \left| \int_{\text{supp}_x p} p(x, \xi) e^{i\langle x, \zeta \rangle} dx \right| \\ &\leq \frac{C_t}{(1 + |\zeta|)^t} \int_{\text{supp}_x p} |D_x^\alpha p(x, \xi)| dx \\ &\leq C'_t (1 + |\zeta|)^{-t} (1 + |\xi|)^m \end{aligned}$$

car $p \in \text{Symb}^m$. D'où,

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta) &:= \left| \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) e^{i\langle x, \xi - \eta \rangle} dx \right| (1 + |\xi|)^{-s-m} (1 + |\eta|)^s \\ &\leq C'_t (1 + |\xi - \eta|)^{-t} (1 + |\xi|)^{-s} (1 + |\eta|)^s \\ &\leq C''_t (1 + |\xi - \eta|)^{-t+|s|}. \end{aligned}$$

En particulier, les intégrales $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(\xi, \eta) d\xi$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(\xi, \eta) d\eta$ sont bornées uniformément par une constante $C > 0$.

Or,

$$\begin{aligned} (Pu, v)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} (Pu)(x) \overline{v(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(Pu)}(\eta) \widehat{v}(\eta) d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) e^{-i\langle x, \xi - \eta \rangle} dx \right) \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(x)} d\xi d\eta \end{aligned}$$

par la définition de P . Ainsi, en posant $U(\xi) := \hat{u}(\xi)(1 + |\xi|)^{s+m}$ et $V(\eta) := \hat{v}(\eta)(1 + |\eta|)^{-s}$, nous obtenons par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} |(Pu, v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(\xi, \eta) |U(\xi)| |V(\eta)| d\xi d\eta \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(\xi, \eta) |U(\xi)|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(\xi, \eta) |V(\eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|U\|_{L^2} \|V\|_{L^2} \\ &= C \|u\|_{W^{s+m, 2}} \|v\|_{W^{-s, 2}}. \end{aligned}$$

Donc, P induit un opérateur borné $W^{s+m, 2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{-s, 2}(\mathbb{R}^n)^* = W^{s, 2}(\mathbb{R}^n)$, où l'identification $W^{-s, 2}(\mathbb{R}^n)^* = W^{s, 2}(\mathbb{R}^n)$ est induite par le produit L^2 comme vu en classe. \square

Définition Soit $P \in \mathcal{P}_m$ avec symbole p . On dit que P est elliptique s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $|\xi| \geq c$, $p(x, \xi)$ est inversible et satisfait

$$|p(x, \xi)^{-1}| \leq c(1 + |\xi|)^{-m}.$$

Ainsi, P induit un opérateur borné

Notons que les opérateurs pseudo-différentiels elliptiques jouissent de plusieurs des propriétés des opérateurs différentiels elliptiques puisqu'ils sont aussi des opérateurs de Fredholm sur les espaces de Sobolev $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$. En fait, la situation est encore meilleure en un certain sens puisque leur paramétrice est aussi un opérateur pseudo-différentiel elliptique.

Notons également que tout symbole d'ordre $m - 1$ est aussi un symbole d'ordre m , ainsi le quotient $\text{Symb}^m / \text{Symb}^{m-1}$ a du sens. Il se trouve que le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel se comporte sous les difféomorphismes bien dans ce quotient.

Proposition 6 Soient P , un opérateur pseudo-différentiel sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$ avec symbole p , et $\varphi : U \rightarrow V$, un difféomorphisme entre ouverts de \mathbb{R}^n . On définit un opérateur pseudo-différentiel φ_*P sur V par la relation $(\varphi_*P)(u) := P(u\varphi)\varphi^{-1}$ pour tout $u \in C_c^\infty(V)$. Alors, le symbole de φ_*P est donné par

$$\text{symb}(\varphi_*P)(x, \xi) \equiv p(\varphi(x), (d\varphi)_x^{-T}\xi) \pmod{\text{Symb}^{m-1}}.$$

Autrement dit, le symbole principal $\sigma(P) := [p] \in \text{Symb}^m / \text{Symb}^{m-1}$ de P définit une fonction $T^*U \rightarrow \mathbb{R}$.

II.B. OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS SUR DES VARIÉTÉS

Dans ce paragraphe, nous expliquons comment généraliser la notion d'opérateurs pseudo-différentiels au cas des sections sur une variété fermée. Nous démontrons ensuite que tout symbole peut être réalisé par un tel opérateur.

Notons d'abord que toutes les notions et résultats du paragraphe précédent admettent une généralisation directe au cas des opérateurs $C_c^\infty(U, \mathbb{C}^r) \rightarrow C_c^\infty(U, \mathbb{C}^s)$ pour un ouvert U de \mathbb{R}^n ; notons l'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m correspondant par $\mathcal{P}_m(U \times \mathbb{C}^r, U \times \mathbb{C}^s)$. La différence importante dans ce cas est que le symbole est alors une fonction $p : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^s, \mathbb{C}^r)$. La généralisation aux variétés est alors directe : si E et F sont des fibrés vectoriels complexes respectivement de rang r et s sur une variété fermée M , nous définissons $\mathcal{P}_m(E, F)$ comme l'espace vectoriel des opérateurs $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ dont les coordonnées sont localement dans $\mathcal{P}_m(U \times \mathbb{C}^r, U \times \mathbb{C}^s)$.

Notons par $\text{Symb}^m(E, F)$ l'espace des symboles d'ordre m , c'est-à-dire l'espace des sections lisses de $\text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F) \rightarrow T^*M$, où $\pi : T^*M \rightarrow M$ est la projection

canonique, qui sont localement dans Symb^m . Il découle de la proposition 6 que le symbole principal $\sigma(P) \in \text{Symb}^m(E, F)/\text{Symb}^{m-1}(E, F)$ d'un opérateur pseudo-différentiel $P \in \mathcal{P}_m(E, F)$ est bien défini sur T^*M . De même, nous pouvons vérifier que la notion d'ellipticité ne dépend pas du choix de représentant local de symbole.

Définissons maintenant une sorte de transformée de Fourier sur M qui nous permettra de construire un opérateur pseudo-différentiel à partir d'un symbole. Pour ce faire, nous fixons une métrique riemannienne sur M et une connection sur E . Puisque M est compacte, le rayon d'injectivité ρ de la métrique est strictement positif. Fixons alors une fonction plateau $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]$ valant 1 près de 0 et 0 sur un voisinage de $[\rho, +\infty)$.

Pour $u \in \Gamma(E)$ et $\xi \in T_x^*M$, nous prenons

$$\hat{u}(x, \xi) := \int_{T_x X} e^{-i\langle \xi, v \rangle} U(x, v) dv \in E_x,$$

où $U(x, v) := \psi(|v|)\tilde{u}(\exp_x v)$ si $|v| < \rho$, avec $\tilde{u}(y) \in E_x$ le transport parallèle de $u(y) \in E_y$ selon la connection de E le long de l'unique géodésique minimisante de y à x , et $U(v) := 0$ si $|v| \geq \rho$. Nous pouvons vérifier que cela définit une opération linéaire $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\pi^*E)$. De plus, $\hat{u}|_{T_x^*M} \in \mathcal{S}(T_x^*M)$. Ainsi, pour un symbole $p \in \text{Symb}^m(E, F)$, l'opérateur définit par

$$Pu(x) := (2\pi)^{-n} \int_{T_x^*X} p(x, \xi) \hat{u}(x, \xi) d\xi \quad \forall u \in \Gamma(E)$$

est un opérateur pseudo-différentiel $\mathcal{P}_m(E, F)$ tel que $\sigma(P) = [p]$.

Il découle alors directement un fait qui est trivial sur \mathbb{R}^n mais pas sur M : tout symbole principal peut être réalisé par un opérateur pseudo-différentiel. Ce fait est en grand contraste avec le cas des opérateurs différentiels et c'est pourquoi nous avons besoin des opérateurs pseudo-différentiels dans la preuve du théorème d'indice.

II.C. INDICE ANALYTIQUE

Dans ce paragraphe, nous utilisons les notions et résultats précédents afin de définir l'indice analytique d'un opérateur pseudo-différentiel elliptique. Nous discutons également de l'invariance homotopique de cet indice.

Définition Soit $P \in \mathcal{P}_m(E, F)$, où E et F sont des fibrés vectoriels complexes sur une variété fermée M . Son indice analytique, noté $\text{ind}(P)$, est l'indice de l'opérateur de Fredholm induit $P : W^{s+m, 2}(M; E) \rightarrow W^{s, 2}(M; F)$ pour un $s \in \mathbb{R}$.

Par la proposition 5, il existe un indice bien défini pour chaque $s \in \mathbb{R}$. Puisque l'inclusion $W^{s, 2} \hookrightarrow W^{s', 2}$ pour $s' < s$ est compacte et que l'indice est invariant sous les applications compactes, ceci est indépendant du choix de $s \in \mathbb{R}$.

Nous rappelons maintenant un fait important, que nous ne démontrerons pas, sur l'indice de Fredholm. Notons par $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(H_1, H_2)$ l'espace des opérateurs de Fredholm entre des espaces de Hilbert H_1 et H_2 .

Proposition 7 *L'application induite par l'indice $\text{ind} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ est localement constante. Elle induit en fait une bijection entre les composantes connexes de \mathfrak{F} et \mathbb{Z} .*

En particulier, en prenant $H_1 = W^{s+m,2}(M; E)$ et $H_2 = W^{s,2}(M; F)$, on voit que l'indice analytique ne dépend que du symbole principal. Effectivement, si $P_0, P_1 \in \mathcal{P}_m(E, F)$ sont elliptiques et tels que $\sigma(P_0) = \sigma(P_1)$, alors $P_t := (1-t)P_0 + tP_1$ est une famille à un paramètre d'opérateurs pseudo-différentiels elliptiques avec symbole constant. Ainsi, $\{P_t\}_{t \in [0,1]}$ définit un chemin dans \mathfrak{F} de l'extension de P_0 à celle de P_1 . Donc, par la proposition 7, $\text{ind } P_0 = \text{ind } P_1$.

Nous pouvons en fait obtenir une invariance homotopique au niveau des symboles. Nous dirons que deux symboles $\sigma_0, \sigma_1 \in \Gamma(\text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$ qui sont des isomorphismes hors d'un voisinage de la section nulle de T^*M sont *régulièrement homotopes* s'il existe une famille continue de symboles $\{\sigma_t\}_{t \in [0,1]}$ qui sont tous des isomorphismes hors d'un voisinage de la section nulle de T^*M . La procédure établit au paragraphe précédent permet alors d'obtenir une famille lisse d'opérateurs pseudo-différentiels $\{P_t\}_{t \in [0,1]}$, nécessairement elliptiques, ayant la propriété que $\sigma(P_t) = \sigma_t$. Il suit alors que $\text{ind } P_0 = \text{ind } P_1$ et, par ce qui précède, l'indice ne dépend pas de l'opérateur P_t réalisant le symbole σ_t .

Notons finalement que la découverte de cette invariance homotopique a une importance historique particulière puisqu'elle a permis la formulation correcte d'une question due à Gel'fand [Gel60] sur l'invariance homotopique de plusieurs propriétés des opérateurs différentiels elliptiques, question dont la réponse est précisément le théorème d'indice d'Atiyah-Singer.

II.D. INDICE TOPOLOGIQUE

Dans ce paragraphe, nous associons à tout opérateur pseudo-différentiel elliptique un nombre entier, appelé l'indice topologique, à l'aide de la K -théorie.

Soit $P \in \mathcal{P}_m(E, F)$ elliptique, où E et F sont des fibrés complexes sur une variété fermée M . Par définition, son symbole définit un isomorphisme $\sigma(P)(x, \xi) : \pi^*E \xrightarrow{\sim} \pi^*F$ hors d'un compact de T^*M . Ainsi, par la proposition 2, nous obtenons un élément

$$\underline{\sigma}(P) := [\pi^*E, \pi^*F; \sigma(P)] \in K_{\text{cpt}}(T^*M).$$

Soit $f : M \hookrightarrow X$, un plongement lisse avec fibré normal ν . Ceci induit un plongement propre $F : T^*M \hookrightarrow T^*X$ avec fibré conormal isomorphe à $\nu \oplus \nu$ (si X

est équipée d'une métrique riemannienne, alors cet isomorphisme peut être choisi canoniquement). Or, ce scindement permet de définir une structure complexe sur le fibré conormal de $F(T^*M)$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous avons un isomorphisme de Thom $i_! : K_{\text{cpt}}(T^*M) \rightarrow K_{\text{cpt}}(\nu \oplus \nu)$ par le théorème 1. En identifiant le fibré conormal de $F(T^*M)$ à un voisinage de $F(T^*M)$ dans T^*X , ceci permet de définir un morphisme de groupes $f_! : K_{\text{cpt}}(T^*M) \rightarrow K_{\text{cpt}}(T^*X)$. Or, par le théorème de plongement de Whitney, il existe toujours un plongement $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. Ainsi, nous obtenons un morphisme

$$f_! : K_{\text{cpt}}(T^*M) \rightarrow K_{\text{cpt}}(T^*\mathbb{R}^N).$$

Définition *L'indice topologique de $P \in \mathcal{P}_m(E, F)$ elliptique est l'entier*

$$\text{ind}_{\text{top}}(P) := (j_!)^{-1} f_! \sigma(P),$$

où $j_! : K(\star) = \mathbb{Z} \rightarrow K_{\text{cpt}}(T^*\mathbb{R}^N)$ est l'isomorphisme de Thom du fibré complexe $q : T^*\mathbb{R}^N = \mathbb{C}^N \rightarrow \star$.

C'est un exercice simple que de vérifier que cette définition est indépendante du choix de plongement $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$.

III. LE THÉORÈME D'INDICE

III.A. FORMULATION K -THÉORIQUE

Dans ce paragraphe, nous énonçons finalement le théorème d'indice d'Atiyah-Singer sous sa forme K -théorique et expliquons les idées de la preuve à l'aide des notions introduites précédemment.

Théorème 2 (Théorème d'indice d'Atiyah-Singer, version K -théorique) *Soit P , un opérateur pseudo-différentiel elliptique entre fibrés complexes sur une variété fermée. Alors,*

$$\text{ind } P = \text{ind}_{\text{top}} P.$$

IDÉE DE LA PREUVE: Le coeur de la preuve se divise en trois points techniques.

- (1) L'indice analytique induit un homomorphisme

$$\text{ind} : K_{\text{cpt}}(T^*M) \rightarrow \mathbb{Z}$$

tel que $\text{ind } \underline{\sigma}(P) = \text{ind } P$.

- (2) Lorsque $M = T^*M = \star$, l'homomorphisme $\text{ind} : K(\star) \rightarrow \mathbb{Z}$ est simplement l'identité.
- (3) Si $f : M \hookrightarrow N$ est un plongement lisse, alors

$$\text{ind } u = \text{ind } f_! u$$

pour tout $u \in K_{\text{cpt}}(T^*M)$.

Notons que c'est au point (1) que la flexibilité apportée par les opérateurs pseudo-différentiels s'avère essentielle. Effectivement, une légère modification de la construction de Atiyah-Bott-Shapiro (proposition 2) dans le cas $X = T^*M$ assure que tout $u \in K_{\text{cpt}}(T^*M)$ peut être représenté par un élément de la forme $[\pi^*E, \pi^*F; \sigma]$, où E et F sont des fibrés vectoriels complexes sur M et $\sigma : \pi^*E \rightarrow \pi^*F$ est homogène le long des fibres de T^*M en plus d'être un isomorphisme hors d'un compact. Il suit alors de la discussion du paragraphe II.b qu'il existe $P \in \mathcal{P}_m(E, F)$ tel que $\sigma(P) = \sigma$, c'est-à-dire $\underline{\sigma}(P) = u$; il est nécessairement elliptique par les propriétés de σ . Il suffit alors de poser $\text{ind } u := \text{ind } P$ et de vérifier que cette définition est indépendante des choix, vérification qui repose grandement sur la discussion du paragraphe II.c. De même, le point (2) découle directement du fait que $K(\star) = \{[\mathbb{C}^r] - [\mathbb{C}^s] \mid r, s \geq 0\}$ et que l'indice d'un opérateur $P : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^s$ est simplement $r - s$. C'est donc le point (3) qui demande davantage de travail (et même un peu de $K_{\text{SO}(n)}$ -théorie), nous ne commenterons pas davantage.

Notons cependant que ceci est suffisant pour démontrer le théorème. Effectivement, par le théorème de plongement de Whitney, il existe un plongement $f : M \hookrightarrow S^N$; nous faisons ici l'identification $S^N = \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$. Notons par $i : \star \hookrightarrow S^N$ l'inclusion d'un point. Par le point (3), on a

$$\text{ind } u = \text{ind } f_! u = \text{ind } i_1^{-1} f_! u,$$

pour tout $u \in K_{\text{cpt}}(T^*M)$, où $i_1 : K(\star) \rightarrow K_{\text{cpt}}(T^*S^N)$ est l'isomorphisme de Thom (théorème 1) sous l'identification $K_{\text{cpt}}(T^*S^N) = K_{\text{cpt}}(\mathbb{C}^N)$. Or, par le point (2), $\text{ind } \circ i_1^{-1} = i_1^{-1}$. Ainsi, par le point (1),

$$\text{ind } P = \text{ind } \underline{\sigma}(P) = (i_1)^{-1} f_! \underline{\sigma}(P),$$

qui est précisément l'indice topologique. □

III.B. FORMULATION COHOMOLOGIQUE

Dans ce paragraphe, nous dérivons une formulation cohomologique du théorème 2. C'est cette formulation qui est la plus pratique (et la plus parlante) pour les applications puisqu'elle donne une formule explicite pour l'indice analytique en termes de classes caractéristiques.

Théorème 3 (Théorème d'indice d'Atiyah-Singer, version cohomologique) *Soit P , un opérateur pseudo-différentiel elliptique entre fibrés complexes sur une variété fermée orientée M de dimension n . Alors,*

$$\text{ind } P = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left\langle \pi_! \text{ch } \underline{\sigma}(P) \cdot \hat{A}(M)^2, [M] \right\rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^n(M) \otimes H_n(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ est le produit de dualité et $\hat{A}(M) := \hat{A}(T^*M)$.

PREUVE: Considérons d'abord le cas $M = \mathbb{R}^N$. Alors, $T^*\mathbb{R}^N = \mathbb{C}^N$ et nous avons les applications évidentes $q : \mathbb{C}^N \rightarrow \star$ et $i : \star \hookrightarrow \mathbb{C}^N$. Fixons $u \in K_{\text{cpt}}(\mathbb{C}^N)$. Sans grande difficulté, il est possible de démontrer que $q_! = (i_!)^{-1}$ au niveau cohomologique, $\mathcal{S}(\mathbb{C}^N) = 1$ et que $\text{ch} : K(\star) \rightarrow H^0(\star; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Ainsi, par la formule (1),

$$q_! \text{ch } u = q_! \text{ch } i_! \xi = \mathcal{S}(\xi) \text{ch } \xi = \xi = q_! u$$

où $\xi := (i_!)^{-1} u = [\mathbb{C}^r] - [\mathbb{C}^s] \in K(\star) = H^0(\star; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. D'où

$$q_! u = \langle q_! u, [\star] \rangle = \langle q_! \text{ch } u, [\star] \rangle = \left\langle \text{ch } u, [T^*\mathbb{R}^N] \right\rangle.$$

Supposons maintenant que $p : \nu \rightarrow M$ est un fibré vectoriel et que $i : M \hookrightarrow \nu$ est l'inclusion de la section nulle. Puisque $T^*\nu \cong \pi^*\nu \otimes \mathbb{C}$, où $\pi : T^*M \rightarrow M$ est la projection canonique, la formule (1) donne

$$p_! \text{ch } i_! \underline{\sigma}(P) = \mathcal{S}(\pi^*\nu \otimes \mathbb{C}) \text{ch } \underline{\sigma}(P).$$

D'où, en évaluant sur $[T^*M]$,

$$\langle \text{ch } i_! \underline{\sigma}(P), [T^*\nu] \rangle = \langle p_! \text{ch } i_! \underline{\sigma}(P), [T^*M] \rangle = \langle \mathcal{S}(\pi^*\nu \otimes \mathbb{C}) \text{ch } \underline{\sigma}(P), [T^*M] \rangle.$$

Prenons maintenant un plongement $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ avec fibré conormal ν . Alors, nous avons l'inclusion $T^*\nu \subseteq T^*\mathbb{R}^N$ et, puisque la classe $i_! \underline{\sigma}(P)$ a support compact dans $T\nu$, elle s'étend trivialement sur tout $T^*\mathbb{R}^N$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle \text{ch } i_! \underline{\sigma}(P), [T^*\nu] \rangle &= \left\langle \text{ch } f_! \underline{\sigma}(P), [T^*\mathbb{R}^N] \right\rangle \\ &= q_! f_! \underline{\sigma}(P) \\ &= \text{ind } P \end{aligned}$$

par le cas $M = \mathbb{R}^N$. De l'autre côté, on sait que $T^*M \oplus \nu$ est trivial, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\pi^*\nu \otimes \mathbb{C}) &= \mathcal{S}(\pi^*T^*M \otimes \mathbb{C})^{-1} \\ &= (-1)^n \text{Td}(\pi^*T^*M \otimes \mathbb{C}) \\ &= (-1)^n \hat{A}(\pi^*T^*M)^2. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\operatorname{ind} P = (-1)^n \left\langle \operatorname{ch} \underline{\sigma}(P) \cdot \pi^* \hat{A}(M)^2, [T^*M] \right\rangle. \quad (3)$$

La formule annoncée découle alors directement de l'identité $\langle \pi_! u \cdot v, [M] \rangle = \langle u \cdot \pi^* v, [T^*M] \rangle$ pour tous $u \in H^\bullet(T^*M)$ et $v \in H^\bullet(M)$ et du fait que l'orientation donnée à T^*M (qui était nécessaire pour l'identification $T^*\mathbb{R}^N = \mathbb{C}^N$) diffère de celle induite par M d'un facteur $(-1)^{n(n-1)/2}$. \square

RÉFÉRENCES

- [AS68a] M.F. Atiyah and I.M. Singer. The index of elliptic operators : I. *The Annals of Mathematics, Second Series*, 87(3) :484–530, 1968.
- [AS68b] M.F. Atiyah and I.M. Singer. The index of elliptic operators : III. *The Annals of Mathematics, Second Series*, 87(3) :546–604, 1968.
- [Ati64] M.F. Atiyah. *K-Theory*. W. A. Benjamin, Inc., 1964.
- [Gel60] I.M. Gel'fand. On elliptic equations. *Russian Mathematical Surveys*, 15(113) :113–123, 1960.
- [H85] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, volume 274 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1985.
- [Hat01] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. 2001.
- [Hus94] D. Husemöller. *Fiber Bundles*, volume 20 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 3^e édition, 1994.
- [LM89] H.B. Lawson and M.-L. Michelsohn. *Spin Geometry*. Princeton University Press, 1989.
- [MS74] J.W. Milnor and J.D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Princeton University Press, 1974.