Introduction à la formalisation de la mécanique classique, ou comment de belles mathématiques se cachent en physique

Jean-Philippe Chassé

16 juin 2017

Plan

1. Mécanique lagrangienne
    - Rappels
    - Espace des configurations et variétés
2. Mécanique hamiltonienne
    - Données de la physique
    - Transformée de Legendre et espaces duaux
    - Forme symplectique standard
3. Topologie symplectique et au-delà

Plan

Rappels sur la mécanique lagrangienne

Un système physique dont on peut décrire la position des particules constituantes par des coordonnées généralisées q_1, ..., q_n est totalement décrit par son *lagrangien*

$$L_t\left(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n\right) := T_t - U_t$$

où T_t et U_t dénotent respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système au temps t.

Alors, les trajectoires physiques $(q_1(t), ..., q_n(t))$ sont les solutions aux équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L_t}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_t}{\partial \dot{q}_i} \qquad \forall i \in \{1, .., n\}$$

Espace des configurations

On se rappelle que la grande force des équations de Lagrange face à celles de Newton est que leur forme ne dépende pas des coordonnées choisies. Cela nous indique que ce qui est d'importance physique est plutôt l'espace engendré par ces coordonnées : l'*espace des configurations*.

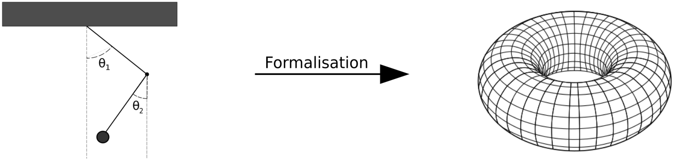


FIGURE – Pendule double et son espace des configurations

L'espace des configurations M d'un système physique est un exemple typique d'une **variété lisse**.

Variétés lisses : une approche intuitive

Moralement, les variétés sont des espaces « gentils » où tout point est contenu dans un voisinage pouvant être déformé de façon continue en un disque n-dimensionnel de $\mathbb{R}^n$, pour un n fixé.

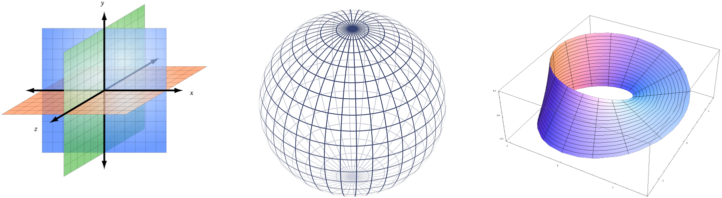


FIGURE – Exemples de variétés lisses

Une variété est lisse si ces voisinages n'ont pas d'aspérités qui empêcherait de faire du calcul différentiel.

Variétés lisses : des non-exemples

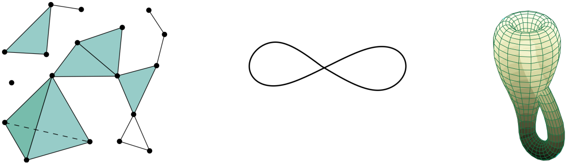


FIGURE – Exemples d'espaces qui ne sont pas des variétés

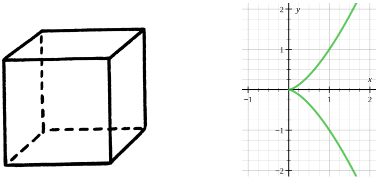


FIGURE – Exemples de variétés qui ne sont pas lisses

Fibré tangent

On remarque qu'en mécanique lagrangienne, on traite indépendamment les coordonnées généralisées de leur dérivée temporelle. Mathématiquement, on traite cela en prenant le lagrangien comme une fonction sur le *fibré tangent* TM de l'espace des configurations M ; mais qu'est-ce que le fibré tangent ?

L'espace tangent en un point $x \in M$ consiste en l'ensemble des vecteurs vitesse à x des courbes passant par ce point :

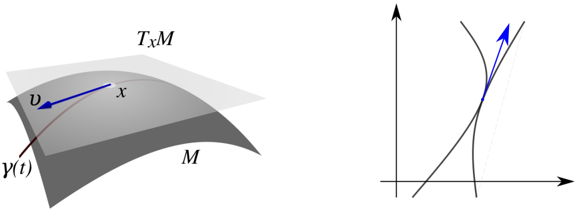


FIGURE – Visualisation d'un vecteur tangent dans M et dans $\mathbb{R}^2$

Alors, le fibré tangent est simplement l'ensemble de ces espaces tangents.

Plan

De Lagrange à Hamilton

Au-delà de la mécanique lagrangienne, il y a une autre formulation de la mécanique classique : la mécanique hamiltonienne. Alors, le système est décrit par la *transformée de Legendre* du lagrangien : le *hamiltonien*.

$$H_t\left(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n\right) := \mathcal{L}L_t = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L_t$$

où $p_i := \partial L_t / \partial \dot{q}_i$ est le *moment conjugué* de q_i.

Avec un peu de travail, les équations d'Euler-Lagrange deviennent les équations canoniques de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_t}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_t}{\partial q_i} \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Espace de phase

Sous cette traduction de langage, qu'est-ce qui prend la place de l'espace des configurations ? C'est l'*espace de phase*, i.e. l'espace engendré par les coordonnées généralisées q_i et leur moment conjugué p_i !

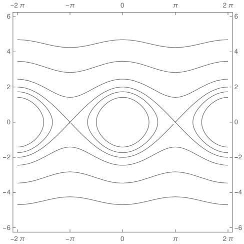
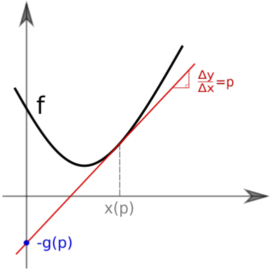


FIGURE – Espace de phase d'un pendule simple avec quelques orbites

Comme on le verra sous peu, l'espace de phase est également une variété lisse. Cependant, il faut d'abord comprendre ce que fait la transformée de Legendre géométriquement.

Transformée de Legendre en une dimension

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f'' > 0$. Alors, sa transformée de Legendre $\mathcal{L}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction associant à la valeur p, l'inverse de l'ordonnée à l'origine de l'unique droite tangente au graphe de f ayant comme pente p :



c'est-à-dire $\mathcal{L}f(p) = xp - f(x)$, où x est l'unique nombre tel que $p = f'(x)$.

Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, alors son *espace dual* V^* est l'ensemble des fonctions $f : V \to \mathbb{R}$ qui sont linéaires. C'est un espace vectoriel de même dimension sous l'addition $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$.

Or, on note que pour une fonction quelconque $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sa matrice jacobienne en un point $x \in \mathbb{R}^n$

$$(df)_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

peut-être vue comme un élément de $\mathbb{R}^{n*}$ par multiplication matricielle.

Alors, la généralisation naturelle de la transformée de Legendre en plusieurs dimensions, donnée par $\mathcal{L}f(p) = \sum_{i=0}^{n} x_i p_i - f(x)$, où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'unique vecteur tel que $(df)_x = p$, nous dicte que p est un élément de l'espace dual.

Fibré cotangent

Donc, en fixant $q \in M$ et en remplaçant $\mathbb{R}^n$ par T_qM, on voit directement que $p(q) \in T_q^*M$, l'espace dual de T_qM.

On a donc finalement une interprétation géométrique de ce que fait la transformée de Legendre : elle prend une fonction définie sur le fibré tangent TM d'une variété et lui associe une fonction définie sur le *fibré cotangent* T^*M, i.e. l'ensemble des espaces duaux des espaces tangents de la variété M.

Ainsi, notre espace de phase est formalisé par le fibré cotangent de l'espace des configurations, mais comment formaliser les équations canoniques ?

Forme symplectique standard

Considérons un chemin $\alpha(t) = (q(t), p(t))$ dans notre espace de phase T^*M. En associant à $\dot{\alpha}$ son vecteur tangent, on obtient en $T_{(q,p)}T^*M$

$$\dot{\alpha} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_t}{\partial p} \\ -\frac{\partial H_t}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_t}{\partial q} \\ \frac{\partial H_t}{\partial p} \end{pmatrix} = J\ \nabla H_t\,(\alpha)$$

Alors, on formalise les équations canoniques de Hamilton par une fonction $\omega : T(T^*M) \times T(T^*M) \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (q,p) \in T^*M$, $v, w \in T(T^*M)$,

$$\omega_{(q,p)}(v, w) := v^T J\ w$$

C'est ce qu'on appelle la *forme symplectique standard* du fibré cotangent T^*M.

Le gradient symplectique

On remarque que si H_t est un hamiltonien, $\forall x = (q, p) \in T^*M$

$$(dH_t)_x = (dH_t)_x J^T J = (J\ \nabla H_t(x))^T\ J = \omega_x(J\ \nabla H_t(x), -)$$

En faisant varier x, la forme symplectique nous permet donc d'associer à tout hamiltonien un champ vectoriel sur T^*M, appelé *gradient symplectique* X_{H_t} de H_t, et l'on peut montrer que cette correspondance est biunivoque.

On peut également remarquer que puisque J est antisymétrique, $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X)$ et donc, $\omega(X, X) = 0$. Ainsi, on a

$$0 = \omega(X_{H_t}, X_{H_t}) = dH_t(X_{H_t})$$

et donc, X_{H_t} suit les hypersurfaces de niveau de H_t.

Plan

Définition formelle d'une variété symplectique

Une *variété symplectique* est le couple (M, ω), où M est une variété lisse et ω est une 2-forme différentielle fermée non-dégénérée.

Proposition

Une variété symplectique est de dimension paire et orientable.

Un *hamiltonien* sur une variété symplectique (M, ω) est simplement une fonction lisse $H_t : M \to \mathbb{R}$, où $t \in \mathbb{R}$.

Exemples : Le fibré cotangent d'une variété M avec la forme symplectique standard, ainsi que les surfaces orientables avec la 2-forme donnant l'aire du parallélogramme formé par deux vecteurs sont naturellement des variétés symplectiques.

Au-delà de la topologie symplectique

1. **Topologie de contact :** Théorie connexe à la topologie symplectique, mais en dimension impaire. Apparaît physiquement lorsqu'on ajoute le temps à l'espace de phase, ou lorsqu'on s'intéresse aux hypersurfaces de niveau d'un hamiltonien.
2. **Systèmes dynamiques :** Systèmes à plusieurs composantes dont l'évolution temporelle est donnée par un système d'équations différentielles, allant d'un pendule multiple à une population de poissons dans une rivière.
3. **Théories de la quantification :** Permet d'étudier ce qu'il se passe lors du passage de la mécanique classique à la mécanique quantique, en associant à une variété symplectique un espace d'Hilbert et aux fonctions sur cette variété des observables.

Références

[1] ARNOLD, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* No. 60 dans Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1978.

[2] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds.* No. 218 dans Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003.

[3] MCDUFF, D. ET SALAMON, D. *Introduction to Symplectic Topology.* Oxford Science Publication, 2005.