Une histoire de ficelles et de clous

Jean-Philippe Chassé

Doctorant
au département de mathématiques et statistique
de l'Université de Montréal

Clubmath
10 février 2021

Mise en contexte

Dans cette lointaine époque précovidienne, vous prenez une bière entre mathématicien·ne·s et, sans grande surprise, vous vous retrouvez dans une discussion endiablée où chacun·e propose divers problèmes mathématiques et énigmes de tout genre. C'est alors que quelqu'un vous lance la problématique suivante :

> *Supposons que vous ayez deux clous bien fixés au mur auxquels vous voulez accrocher un cadre à l'aide d'une (longue) ficelle. Vous pourriez bien sûr y aller de la façon évidente, mais la fantaisie s'empare de votre esprit : y aurait-il une manière d'installer fermement le cadre de sorte à ce que dès que vous enleviez un seul clou, peu importe lequel, le cadre tombe sur-le-champ ?*

Quelques essais

Quelques essais

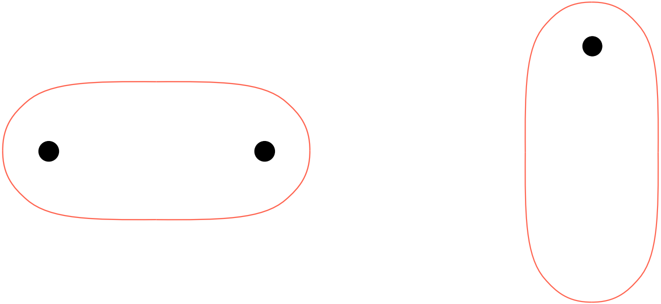
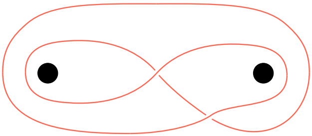


FIGURE – Un premier essai

Quelques essais



Quelques essais

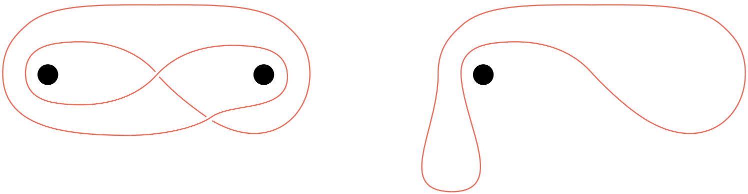


FIGURE – Un deuxième essai

Quelques essais

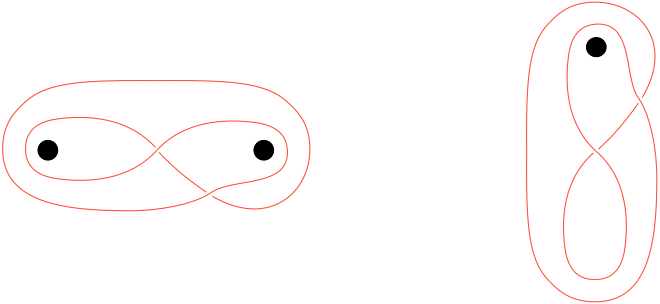


Figure – Un deuxième essai (oups)

Plan

Plan

Notre situation se décrit en une suite de trois événements.

Notre situation se décrit en une suite de trois événements.

1) Une ficelle est enroulée autour de deux clous.

Notre situation se décrit en une suite de trois événements.

1) Une ficelle est enroulée autour de deux clous.

2) Un clou est enlevé.

Notre situation se décrit en une suite de trois événements.

1) Une ficelle est enroulée autour de deux clous.

2) Un clou est enlevé.

3) Le cadre tombe sous l'effet de la gravité.

1) Enrouler une corde autour de deux clous

Choisir un **lacet** de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$, c.-à-d. une fonction continue

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$$

telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = (0,0)$.

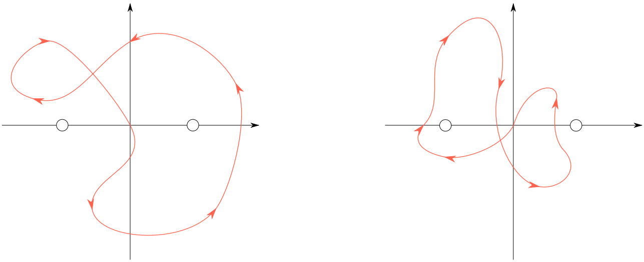


FIGURE – Deux lacets de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$

2) Enlever un clou

Considérer les compositions $i \circ \gamma$ et $j \circ \gamma$, où i et j sont respectivement les inclusions naturelles

$$i : \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$$
$$j : \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\}.$$

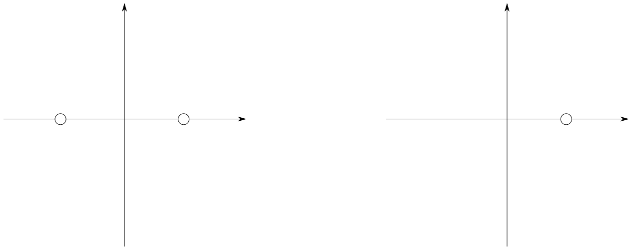


FIGURE – De $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$

3) Laisser le cadre tomber

Les compositions

$$i \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$$
$$j \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$$

sont **contractiles**, c.-à-d. continuement déformables en un seul point.

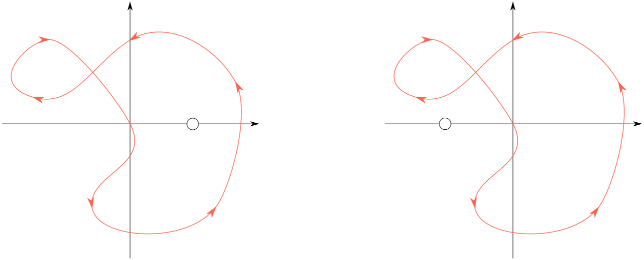


FIGURE – $j \circ \gamma$ est contractile, mais $i \circ \gamma$ ne l'est pas

Zusammenfassung

Nous pouvons donc maintenant formuler notre problématique physique en termes mathématiques :

> *Existe-t-il un lacet non-contractile* γ *de* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ *tels que les lacets* $i \circ \gamma$ *et* $j \circ \gamma$ *soient contractiles ?*

Mais comment répondre à cette question ?

Zusammenfassung

Nous pouvons donc maintenant formuler notre problématique physique en termes mathématiques :

> *Existe-t-il un lacet non-contractile* γ *de* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ *tels que les lacets* $i \circ \gamma$ *et* $j \circ \gamma$ *soient contractiles ?*

Mais comment répondre à cette question ?
Avec la topologie algébrique !

Plan

Plan

Le groupe fondamental

Pour la suite des choses, X dénotera un espace parmis $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$.

Le groupe fondamental

Pour la suite des choses, X dénotera un espace parmis $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$.

Pour étudier la contractibilité des lacets dans X, il faut étudier le **groupe fondamental** de X :

$$\pi_1(X) := \{\text{lacets de } X\} \,/ \simeq,$$

où $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ si γ_1 est continuement déformable en γ_2 dans X, ceci en fixant les extrémités de γ_1. On dit alors que γ_1 est **homotope** à γ_2.

On notera par $\varnothing$ la classe du chemin constant, c.-à-d. des chemins contractiles.

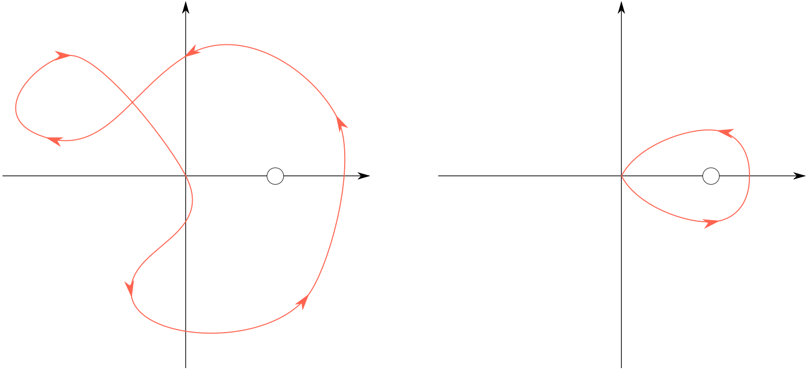


Figure – Deux chemins homotopes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

De la topologie à l'algèbre

Il y a une « multiplication » naturelle sur $\pi_1(X)$:

$$[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1 \# \gamma_2],$$

où $\gamma_1 \# \gamma_2$ est le chemin obtenu en parcourant d'abord γ_1, puis γ_2.

Cette opération a plusieurs propriétés désirables :

De la topologie à l'algèbre

Il y a une « multiplication » naturelle sur $\pi_1(X)$:

$$[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1 \# \gamma_2],$$

où $\gamma_1 \# \gamma_2$ est le chemin obtenu en parcourant d'abord γ_1, puis γ_2.

Cette opération a plusieurs propriétés désirables :

- Bien définie
- Associativité
- Existence d'un élément neutre : $\varnothing$
- Existence d'inverses : $[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}]$, où $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$

De la topologie à l'algèbre

Il y a une « multiplication » naturelle sur $\pi_1(X)$:

$$[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1 \# \gamma_2],$$

où $\gamma_1 \# \gamma_2$ est le chemin obtenu en parcourant d'abord γ_1, puis γ_2.

Cette opération a plusieurs propriétés désirables :

- Bien définie
- Associativité
- Existence d'un élément neutre : $\varnothing$
- Existence d'inverses : $[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}]$, où $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$

Autrement dit, $\pi_1(X)$ est un **groupe**.

De la topologie à l'algèbre (suite)

De même, la composition par les inclusions induit des applications entre les groupes fondamentaux qui respectent cette opération, c.-à-d. des **homomorphismes** :

$$\begin{aligned} i_\sharp \colon \pi_1\Big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}\Big) &\longrightarrow \pi_1\Big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}\Big) \\ [\gamma] &\longmapsto [i \circ \gamma] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_\sharp \colon \pi_1\Big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}\Big) &\longrightarrow \pi_1\Big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\}\Big) \\ [\gamma] &\longmapsto [j \circ \gamma] \end{aligned}$$

Übersetzung

Ainsi, nous pouvons écrire le fait que $i \circ \gamma$ et $j \circ \gamma$ sont contractiles simplement par $\gamma \in \operatorname{Ker} i_\sharp$ et $\gamma \in \operatorname{Ker} j_\sharp$, respectivement, où

$$\operatorname{Ker} i_\sharp := \{[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}) \mid i_\sharp[\gamma] = \varnothing\}$$
$$\operatorname{Ker} j_\sharp := \{[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}) \mid j_\sharp[\gamma] = \varnothing\}.$$

Übersetzung

Ainsi, nous pouvons écrire le fait que $i \circ \gamma$ et $j \circ \gamma$ sont contractiles simplement par $\gamma \in \operatorname{Ker} i_\sharp$ et $\gamma \in \operatorname{Ker} j_\sharp$, respectivement, où

$$\operatorname{Ker} i_\sharp := \{[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}) \mid i_\sharp[\gamma] = \varnothing\}$$
$$\operatorname{Ker} j_\sharp := \{[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}) \mid j_\sharp[\gamma] = \varnothing\}.$$

Alors, nous pouvons encore reformuler notre problématique :

Existe-t-il un élément de $\operatorname{Ker} i_\sharp \cap \operatorname{Ker} j_\sharp$ *différent de* $\varnothing$ *?*

Plan

Le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

La classe d'homotopie d'un lacet dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ est uniquement déterminée par le nombre de tour (avec orientation) que ledit lacet fait autour du point $(1,0)$.

Si l'on note par a la classe représentée par le lacet faisant un tour dans le sens anti-horaire autour de $(1,0)$, on a

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}) = \{\ldots, a^{-1}, \varnothing, a, a^2, \ldots\} \cong \mathbb{Z}.$$

Le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

La classe d'homotopie d'un lacet dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ est uniquement déterminée par le nombre de tour (avec orientation) que ledit lacet fait autour du point $(1,0)$.

Si l'on note par a la classe représentée par le lacet faisant un tour dans le sens anti-horaire autour de $(1,0)$, on a

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}) = \{\dots, a^{-1}, \varnothing, a, a^2, \dots\} \cong \mathbb{Z}.$$

La même logique donne $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\})$ en fonction d'un générateur b.

Le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$

Un peu de réflexion convainc que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\})$ est engendré par des produits de a et b et qu'il n'y a pas de relation entre ces générateurs.

Le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$

Un peu de réflexion convainc que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\})$ est engendré par des produits de a et b et qu'il n'y a pas de relation entre ces générateurs.

Attention : l'ordre des a et b importe. Autrement dit,

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}) = \{a^{n_1} b^{m_1} \dots a^{n_k} b^{m_k} \mid n_i, m_i \in \mathbb{Z}\}$$

avec $a^0 = b^0 = \varnothing$.

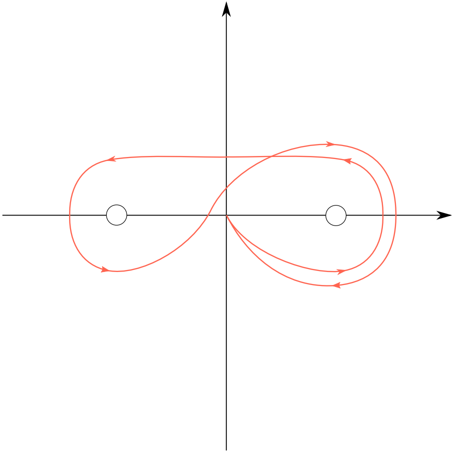


FIGURE – $aba^{-1} \neq b$ dans $\pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}\right)$

Le noyau des homomorphismes d'inclusion

De plus,

$$\begin{aligned} & i_\sharp(a) = a, \quad i_\sharp(b) = \varnothing \\ \text{et} \quad & j_\sharp(a) = \varnothing, \quad j_\sharp(b) = b. \end{aligned}$$

Le noyau des homomorphismes d'inclusion

De plus,

$$i_\sharp(a) = a, \quad i_\sharp(b) = \varnothing$$
$$\text{et} \quad j_\sharp(a) = \varnothing, \quad j_\sharp(b) = b.$$

Donc, puisque $i_\sharp$ et $j_\sharp$ sont des homomorphismes,

$$i_\sharp(a^{n_1}b^{m_1}\dots a^{n_k}b^{m_k}) = a^{n_1+\dots+n_k}$$
$$\text{et} \quad j_\sharp(a^{n_1}b^{m_1}\dots a^{n_k}b^{m_k}) = b^{m_1+\dots+m_k}.$$

Plan

L'intersection des noyaux

Plaçant tous ces éléments ensemble, vous obtenez finalement la réponse désirée : $\operatorname{Ker} i_\sharp \cap \operatorname{Ker} j_\sharp$ est donné par

$$\{a^{n_1}b^{m_1}\dots a^{n_k}b^{m_k} \mid n_1 + \dots + n_k = m_1 + \dots + m_k = 0\}.$$

Par exemple, nous pourrions enrouler la ficelle de sorte à ce qu'elle représente la classe $aba^{-1}b^{-1}$ dans $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\})$ lorsqu'on oriente correctement la ficelle.

Un exemple de réponse affirmative à la question

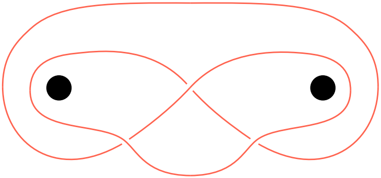


FIGURE – Exemple d'une ficelle représentant $aba^{-1}b^{-1}$

Merci de votre attention !

Y a-t-il des questions ?