

# ANALYSIS 1 – ZUSÄTZLICHE LEHRMATERIALIEN

JOSEF TEICHMANN

## 1. GRUNDBEGRIFFE

Die Analysis beschäftigt sich mit reellen Funktionen, Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit und Differentialgleichungen, etc. In anderen Worten mit allem was nötig ist um Isaac Newtons Gravitationstheorie oder James Clerk Maxwells Elektrodynamik mathematisch zu formulieren, zu verstehen und auszuwerten. Wie bei vielen Entwicklungen von Kulturtechniken folgen Perioden der Neuerung auf Perioden des Hinterfragens dieser Neuerungen, und umgekehrt. So wird die Freude über die mathematisch-quantitative Behandlung des Planetensystemes durch aus dem Gravitationsgesetz abgeleitete Differentialgleichungen empfindlich getrübt durch das Faktum, dass man die Lösungen der Gleichungen sehr schwer beschreiben kann und dass ihre globale Existenz nicht immer gesichert ist. Neuerung bedeutet hier das Einführen von Konzepten wie Differenzierbarkeit, Differentialgleichungen, etc. Hinterfragen bedeutet eine Rückbesinnung auf die Fragestellung wie man Eigenschaften von Funktionen und Lösungen eigentlich beschreibt und wie man die Theorie auf solide Beine stellt. Die Geschichte der Analysis ist voll von solchen Gegenbewegungen, sogar noch bis heute.

Wir beschäftigen uns hier mit dem am weitesten verbreiteten Zugang zur Analysis: basierend auf den natürlichen Zahlen, einer (naiven) Mengenlehre und der klassischen Prädikatenlogik werden die reellen Zahlen, Funktionen und ihre Eigenschaften eingeführt. Dazu benötigen wir zuerst den Begriff der mathematischen Aussage und grundlegende Begriffe der Mengenlehre. Wir sehen gleich mehrere Schwierigkeiten, die mit diesem Ansatz verbunden sind. Diese Schwierigkeiten sind inhärent und lassen sich nicht wirklich beheben, aber verstehen und umgehen.

**Mathematische Aussagen sind Aussagen über mathematische Objekte, von denen man zumindest formal erhofft, dass ihr Wahrheitsgehalt geklärt werden kann**, das heisst offensichtliche “Rechtschreibfehler” kommen in diesen Aussagen nicht vor.

Mathematische Aussagen können verknüpft werden um daraus neue, formal korrekt formulierte Aussagen zu bauen. Hiezu stehen die Zeichen  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ , etc zur Verfügung. Der Wahrheitsgehalt solcher Aussagen kann mit Wahrheitstabellen aus dem Wahrheitsgehalt der Elementaraussagen hergeleitet werden. Korrekt geschriebene mathematische Aussagen haben einen Wahrheitswert, wenn die Elementaraussagen, aus denen sie aufgebaut sind, einen Wahrheitswert haben. Wir werden zuerst über diese Verknüpfungen und daraus resultierende Beweistechniken nachdenken. Dafür abstrahieren wir von konkreten Aussagen und schreiben stattdessen ein Alphabet von Aussagen, von denen nur bekannt ist, dass sie wahr oder falsch sein können. Wir interessieren uns zuerst für zwei grundlegend verschiedene Techniken “Wahrheit” festzustellen: die syntaktische und die semantische.

**1.1. Semantisches und Syntaktisches Schliessen.** Mathematische Aussagen sind die Worte der Mathematik. Aus diesen “Worten der Mathematik” entsteht nun “mathematische Literatur”, nämlich die Beweise. Aus Grundannahmen (“Axiomen”) können durch die sukzessive Anwendung von Schlussregeln neue Aussagen bewiesen werden. Ein Beweis ist die Herleitung einer gegebenen Aussage aus anderen Aussagen mit Hilfe einer endlichen Anzahl von **Schlüssen**, die vorgegebenen **Schlussregeln** gehorchen. Diese zentrale Kulturtechnik der Mathematik führt komplizierte mathematische Aussagen auf einfachere zurück und erlaubt eine Abklärung der Zusammenhänge zwischen mathematischen Aussagen. Das ist ein rein **algorithmischer (syntaktischer) Vorgang**: durch Schlussregeln werden aus gegebenen Aussagen neue abgeleitet.

In der Aussagenlogik kann man den Wahrheitsgehalt mathematischer Aussagen aber auch anders bestimmen, nämlich mit Wahrheitstabellen: man kriegt dort Erkenntnisse der Form: ‘wenn eine Reihe von Axiomen wahr ist, dann ist auch eine Aussage  $B$  wahr’. Das ist der **semantische Vorgang der Wahrheitsbestimmung**.

Es ist vielfach untersucht worden wie diese beiden völlig unterschiedlichen Methoden zur Wahrheitsfindung vergleichbar sind. Es stellt sich heraus, dass die semantische und syntaktische Technik äquivalent sind – das ist Aussage des Gödel’schen Vollständigkeitssatzes der Aussagenlogik. Wir setzen uns also hier auf diesen Standpunkt, dass nämlich die Schlussregeln bereits genügen um “Wahrheit” zu produzieren und keine weiteren Techniken nötig sind.

Das diffizile Gebäude der euklidischen Geometrie auf fünf relativ einfache Grundaussagen (“Euklidische Axiome”) zurückzuführen ist ein syntaktischer Vorgang: es muss dafür präzisiert werden, was ein Beweis ist und welche Schlussregeln erlaubt sind. Semantische Argumente, dh die Richtigkeit von Aussagen in bestimmten (empirischen) Zusammenhängen spielt eine Rolle in der Entwicklung mathematischer Intuition. Der Erfolg der Mathematik liegt aber in der Tatsache begründet, dass das anschaulich-semantische Argument nicht genügt um den Wahrheitsgehalt einer mathematischen Aussage zu ergründen, sondern dass dafür ein Beweis nötig ist.

**1.2. Schlussregeln der Aussagenlogik.** Im folgenden präzisieren wir diesen Standpunkt, auch um Schreibweisen einzuführen, und schreiben die Schlussregeln der Aussagenlogik hin. Diese Schlussregeln liefern alle zentralen Beweistechniken auf Aussageebene. Seien  $\Gamma \subset \Gamma'$  Mengen von Aussagen. Wir interessieren uns für die Menge von Aussagen  $A$ , die aus  $\Gamma$  durch sukzessives Anwenden von Schlussregeln bewiesen werden können, dh die Menge aller durch Schliessen  $\Gamma \Rightarrow A$  beweisbaren Aussagen: hier sieht man links vom Schlussfolgerungszeichen die Voraussetzungen  $\Gamma$  und rechts die daraus gezogene Schlussfolgerung  $A$ . Man sollte das Schlussfolgern  $B \Rightarrow A$  formal von der mathematischen Aussagen  $B \rightarrow A$  unterscheiden (obwohl wir später immer dasselbe Zeichen verwenden werden): ersteres ist das Ableiten einer neuen mathematischen Aussage  $A$  aus  $B$  (oder einer Menge von Aussagen  $\Gamma$ ), zweiteres ist die Verknüpfung von zwei Aussagen. Trotzdem ist es so, dass man falls  $B \rightarrow A$  **immer wahr** ist, man diese Relation mit  $B \Rightarrow A$  identifizieren kann, da der semantische und der syntaktische Wahrheitsbegriff übereinstimmen.

Wir schreiben nun die Schlussregeln des syntaktischen Wahrheitsbegriffes hin, denn man sollte eine Schlussfolgerung zuerst als “Konstruktionsprinzip” für neue Aussagen aus alten begreifen und nicht nur als korrektes Hantieren mit Wahrheitstabellen:

- $\Gamma, A \Rightarrow A$ : aus  $A$  gemeinsam mit anderen Aussagen kann  $A$  gefolgert werden.
- Falls  $\Gamma \Rightarrow A$ , dann  $\Gamma' \Rightarrow A$ .
- Falls  $\Gamma, \neg A \Rightarrow B$  und  $\Gamma, \neg A \Rightarrow \neg B$ , dann  $\Gamma \Rightarrow A$  (Widerspruchsregel). Wenn man aus  $\Gamma$  mit der Verneinung von  $A$  alles herleiten kann, dann folgt aus  $\Gamma$  die Aussage  $A$ .
- $\Gamma, A \Rightarrow B$  und  $\Gamma, \neg A \Rightarrow B$ , dann gilt  $\Gamma \Rightarrow B$  (Fallunterscheidung). Aus zwei Beweisen von  $B$  unter der Zusatzvoraussetzung  $A$  bzw.  $\neg A$  kann  $B$  gefolgert werden.
- Falls  $\Gamma, A \Rightarrow C$  und  $\Gamma, B \Rightarrow C$ , dann auch  $\Gamma, A \vee B \Rightarrow C$ .
- Falls  $\Gamma \Rightarrow A$ , dann  $\Gamma \Rightarrow A \vee B$  und  $\Gamma \Rightarrow B \vee A$ .
- $A \wedge \neg A \Rightarrow B$  (ex falso quodlibet).

Man kann leicht überprüfen, dass es sich bei allen Schlussfolgerungen um Tautologien handelt, also **immer wahre Aussagen**: zum Beispiel ist

$$((C \wedge (\neg A) \rightarrow B) \wedge (C \wedge (\neg A) \rightarrow (\neg B))) \rightarrow (C \rightarrow A)$$

bei jeder Wahrheitsbelegung eine wahre Aussage.

Aus diesen Schlussregeln können offenbar weitere Schlussregeln hergeleitet werden:

- Das Prinzip des direkten Beweises:

$$A, A \rightarrow B \Rightarrow B.$$

- Das Prinzip des indirekten Beweises:

$$A, \neg B \rightarrow \neg A \Rightarrow B.$$

- Tertium non datur:  $\emptyset \Rightarrow A \vee \neg A$ .
- Reductio ad absurdum: Falls  $\Gamma, \neg A \Rightarrow (B \wedge (\neg B))$ , dann  $\Gamma \Rightarrow A$

Sprachlich schreiben wir mathematische Aussagen häufig aus: um auf die Verwendung von Verknüpfungen hinzuweisen werden häufig **und**, **oder**, **genau dann wenn**, **impliziert** typographisch hervorgehoben. Dies soll andeuten wie man bei einer aussagenlogischen Formalisierung vorgehen könnte.

Was sind Sätze, Lemmata, Theoreme, Propositionen, Korollare, etc? Das sind Namen für Schlussfolgerungen, das heisst  $\Gamma \Rightarrow A$ .  $\Gamma$  sind die Hypothesen und  $A$  ist die Folgerung. Definitionen sind mathematische Aussagen mit Äquivalenzzeichen  $\Leftrightarrow$ , wobei neue Zeichen (Begriffe, Konzepte) eingeführt werden.

**1.3. Sprachen erster Stufe – All- und Existenzaussagen.** Die eigentliche logische Kalkül ist das Hantieren mit All- und Existenzaussagen. Das ist Gegenstand der **Prädikatenlogik erster Stufe**, die die Aussagenlogik um Variablen, Existenz- und Allaussagen über diese Variablen erweitert. Hierzu benötigen wir Ausdrücke  $A(x)$  mit Variablen  $x$  (Formeln, Prädikate). Konstanten  $a$  sind im Gegensatz zu Variablen nicht für Quantoren zugelassen. Quantoren “binden” diejenigen Variablen, über die sie sprechen. Zuerst müssen wir lernen mit Quantoren präzise zu sprechen: wir benötigen dazu den Begriff der freien Variablen. Freie Variablen eines Ausdruckes sind solche die nicht an einen Quantor gebunden sind. Es gelten die folgenden Schlussregeln.

- $A(y/x) \Rightarrow (\exists x : A(x))$  ist die dazugehörige erste Schlussregel, wobei  $y$  eine Variable ist, die  $x$  ersetzt.

- Die zweite, wichtigere, Schlussregel ist etwas komplizierter und lautet: falls  $\Gamma, A(y/x) \Rightarrow B$  und  $y$  ist nicht frei in  $\Gamma \exists x A(x) B$ , dann gilt auch  $\Gamma, (\exists x : A(x)) \Rightarrow B$ .
- Der Allquantor wird durch Verneinung definiert:  $\forall x : A(x) :\Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$ . Das heisst zum Beweis einer Allaussage zeigen wir, dass für jedes “beliebige”  $x$  die mathematische Aussage  $A(x)$  gilt, dh falls  $\Gamma \Rightarrow A(y)$ , wobei  $y$  nicht frei ist in  $\Gamma \forall x : A(x)$ , dann gilt  $\Gamma \Rightarrow \forall x : A(x)$ .
- Es bleiben noch zwei Schlussregeln für Gleichheit zu erwähnen, nämlich  $\emptyset \Rightarrow t = t$  und falls  $\Gamma \Rightarrow E(t)$ , dann auch  $\Gamma, t = t' \Rightarrow E(t')$ .

**1.4. Semantik (Bedeutung) von Sprachen erster Stufe.** Nach diesen logischen Überlegungen **interpretieren** wir nun die Symbole unserer Sprache erster Stufe (Prädikatenlogik erster Stufe) mit mathematischen Objekten, das heisst Zahlen, Vektoren, Punkten, etc. Wir unterscheiden also zwischen dem formal korrekten Sprechen über Mathematik in einem formalen System (e.g. einer Sprache erster Stufe) und der **Interpretation der Aussagen des formalen Systems in einem Modell**.

Es hat sich als entscheidende Einsicht kristallisiert diese Interpretation immer mengentheoretisch aufzufassen im Sinne einer naiven Mengenlehre:

“Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.” (Georg Cantor).

Man stellt sich also immer ein Universum vor, in der alle Symbole interpretiert werden. Variable können durch Elemente des Universums belegt werden. Konstante sind bestimmte ausgezeichnete Elemente des Universums. Weiters gibt es noch Funktionen, Relationen. Prädikate werden auf Teilmengen des Universums abgebildet, Prädikate mit mehreren Variablen auf Teilmengen des kartesischen Produktes. **Erneut gilt der Gödelsche Vollständigkeitssatz: jede in jeder Interpretation gemeinsam mit den Grundaxiomen  $\Gamma$  wahre Aussage, lässt sich auch auf syntaktischem Weg mit obigen Schlussregeln aus  $\Gamma$  ableiten.** Erneut stellen wir fest, dass wir auf rein formaler Ebene sagen können was Schlussfolgerungen sind und dass die Möglichkeit besteht damit “Wahrheit”, auch im semantischen Sinne, zu produzieren.

Wenn man Quantifizierungen über Prädikate erlaubt (oder wünscht, wie es zum Beispiel beim Induktionsaxiom nötig wäre), dann muss man Sprachen zweiter Stufe einführen. Dabei verlieren wir aber die Vollständigkeitsaussage für Sprachen erster Stufe, da es dann kein angebbares Beweisschema mehr gibt. Man kann zum Beispiel in Sprachen zweiter Stufe die Endlichkeit eines Modells durch eine Aussage charakterisieren, aber natürlich auch dass eine Modell mehr als  $n$  Elemente haben muss – fasst man all diese Aussagen zu einer Aussagenmenge zusammen, dann sollte es kein Modell dafür geben, denn ein Modell wäre endlich und müsste mehr als  $n$  Elemente haben, für jedes  $n$ . Falls es nun ein angebbares Beweisschema für Sprachen zweiter Stufe gäbe, dann müsste aber auch – so wie in Sprachen erster Stufe – ein Endlichkeitssatz gelten, das heisst Mengen von Aussagen haben ein Modell, wo sie gelten, falls endliche Teilmengen der gegebenen Aussage ein Modell haben. Das steht im Widerspruch zur Nichtexistenz eines Modells zur vorhergehenden Aussagenmenge. Die Nichtgültigkeit des Vollständigkeitssatzes für Sprachen zweiter Stufe ist aber **nicht** die Aussage des Unvollständigkeitssatzes.

Georg Cantors Mengenbegriff ist “naiv” in dem Sinne, dass er auf nichts weiterem fusst als einer allgemeinen Vorstellung von Mengen und Mengebildung durch Prädikate. Mengen müssen dabei als Grundobjekte mathematischen Denkens akzeptiert werden. Der entscheidende Fortschritt liegt in der Aussage, dass jegliches Betreiben von Mathematik im Grunde ein logisch korrektes Hantieren mit Mengen ist. Man macht das insbesondere, um Sprachen zweiter Stufe zu vermeiden, das heisst Variable werden als Mengen interpretiert und über Mengen kann man quantifizieren. Teilmengen, die ja auch Mengen sind, entsprechen dann Prädikaten, weshalb man auch über Prädikate quantifizieren kann.

Hier gibt es nun einen heiklen Punkt: die naive Mengenlehre, wie wir gleich sehen werden, ist nicht genügend gut erklärt, um als Fundament der Mathematik zu dienen. Das wird durch eine entsprechende Axiomatisierung der Mengenlehre gelöst: mathematische Objekte sind nunmehr immer Mengen, über die auf formalsprachliche Art und Weise gesprochen wird, und die scheinbar nötigen Sprachen zweiter Stufe werden sozusagen in der ersten Stufe modelliert (und über die Hintertür eingeführt).

Eine Mengenlehre ist durch Mengen  $x, y, \dots$  und die Elementrelation  $\in$  zwischen ihnen gegeben, dh wir können von jeder Menge sagen ob sie in einer anderen Menge als Element liegt, oder nicht. Formeln sind nun für Mengen definiert, All- und Existenzquantoren gehen über Mengen.

Vorsicht ist aber geboten: es ist nicht jedes Prädikat geeignet Mengen zu bestimmen: zum Beispiel sind “mengentheoretische Prädikate” deren Variablen selbst Mengen sind aus unmittelbar einsichtigen Gründen nicht geeignet, siehe die Russellsche Antinomie

$$\exists M : M = \{x \mid x \notin x\}.$$

*Deshalb müssen wir die Existenz jeglicher neu eingeführter Menge rechtfertigen, dh durch eine zulässige Formel beschreiben. Die einzige nicht-leere Menge deren Existenz wir nicht weiter in Frage stellen, wird die Menge der natürlichen Zahlen sein, von der wir aber wiederum eine axiomatische Beschreibung angeben.*

Es gibt mehrere axiomatische Fassungen der Mengenlehre, zum Beispiel von Zermelo-Fraenkel oder von von Neumann-Bernays-Gödel. Es geht im Grunde darum festzulegen, welche Operationen mit Mengen ausgeführt werden dürfen und welche Prädikate zur Mengenbildung führen. Damit gelingt es die offensichtlichen Antinomien von Bertrand Russell, Georg Cantor, etc zu verhindern. In beiden Mengenlehren sind keine weiteren Widersprüche bekannt, ein Beweis der Widerspruchsfreiheit mit endlichen Methoden ist aber ebenso nicht möglich (Gödelscher Unvollständigkeitssatz).

Wir geben nun die wichtigsten Axiome der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre an, insbesondere wichtige Mengenbildungs- und Existenzaxiome. Diese Axiome sind empirisch widerspruchsfrei:

- $\exists B : \forall A : A \notin B$ : es gibt eine Menge (und die ist eindeutig!) mit keinem Element (Leermengenaxiom).
- $\forall A, B : \exists C : \forall x : x \in C \Leftrightarrow (x = A) \wedge (x = B)$ : zu je zwei Mengen  $A, B$  existiert eine Menge  $C$  (und die ist eindeutig!) die genau  $A$  and  $B$  als Element enthält (Paarmengenaxiom).
- $\forall E : \exists C : \forall B : (B \in C \Leftrightarrow \exists D \in E : B \in D)$ : es gibt zu jeder Ansammlung von Mengen  $E$  eine eindeutig bestimmte Menge  $C$ , die alle Elemente der Mengen in  $E$  enthält. Das ist die Vereinigungsmenge. Im Gegensatz zur

Paarmenge  $\{A, B\}$ , gebildet aus zwei Mengen  $A, B$ , enthält die Vereinigungsmenge  $A \cup B$  die beiden Mengen als Teilmengen.

- Zu jedem Prädikat  $P$  und jeder Menge  $C$  existiert eine Teilmenge  $B \subset C$  mit der Eigenschaft

$$\forall x : x \in B \Leftrightarrow (x \in C) \wedge P(x).$$

Das ist das Aussonderungsaxiom.

- $\forall A : \exists P : \forall C : C \subset A \Leftrightarrow C \in P$ : Das ist das Potenzmengenaxiom, das die Potenzmenge  $P$  einer Menge  $A$  bestimmt.
- Als letztes Axiom nennen wir hier das Fundierungsaxiom, das leicht erreichbare Widersprüche verhindert (vgl Russellsche Antinomie):  $\forall A : A \neq \emptyset \Rightarrow \exists B : (B \in A) \wedge (\neg \exists C : (C \in A) \wedge (C \in B))$ . Dieses Axiom verhindert dass es Mengen gibt mit  $x \in x$ .
- Zwei Mengen heissen gleich wenn sie dieselben Elemente enthalten (Extensionalitätsaxiom der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre):

$$M = N :\Leftrightarrow \forall x : x \in M \Leftrightarrow x \in N.$$

**1.5. Vollständigkeit und Unvollständigkeit.** Man könnte an dieser Stelle geneigt sein zu glauben, dass das **Problem der syntaktischen Wahrheitsbestimmung** durch den Vollständigkeitssatz in Sprachen erster Stufe und durch die Formulierung der axiomatischen Mengenlehre in ebensolchem Rahmen gelöst ist. Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz bietet hier aber eine weitere tiefe Perspektive: er besagt, dass in jedem genügend reichhaltigen Axiomensystem, auch in Sprachen erster Stufe formuliert, immer Aussagen existieren, die unabhängig vom Axiomensystem sind, das heisst weder bewiesen noch widerlegt werden können. Das ist bei vielen Axiomensystemen nicht überraschend (man denke daran dass man aus den Gruppenaxiomen natürlich nicht das Kommutativgesetz folgern kann), allerdings für die natürlichen oder reellen Zahlen doch mehr als unerwartet, zumal wir dort auch von der Eindeutigkeit der entsprechenden Strukturen sprechen. Hier zeigt sich, dass die Unterscheidung zwischen einem formalen System (der Sprache in der wir über Mathematik formal sprechen) und ihrer Semantik, das heisst, dem Modell (Universum), in dem wir das formale System interpretieren, essentiell ist. Die Eindeutigkeit ist dann “modellabhängig” und nur innerhalb des gegebenen Universums gültig, aber nicht zwischen den Universen. Und die axiomatische Mengenlehre wird natürlich auch interpretiert.

**1.6. Fundamentale Konstruktionen der Mengenlehre.** Ausgestattet mit diesen Axiomen können wir verschiedenen Begriffe und Konstruktionen einführen: wir gehen dabei immer so vor, dass wir uns eine **definierende Eigenschaft** vorstellen und dann mit Hilfe der Mengenlehre das entsprechende Objekt mengentheoretisch bauen.

- Als erstes definieren wir die Produktmenge. Ein Element der Produktmenge von Mengen  $X$  and  $Y$  wird ein Tupel  $(x, y)$  aus zwei Elementen  $x \in A$  und  $y \in B$  sein. Wir wissen zu diesem Zeitpunkt noch nicht was das Zeichen  $(x, y)$  bedeutet und müssen es deshalb definieren. Dabei hilft uns die definierende Eigenschaft, die besagt dass zwei Tupel  $(x, y)$  und  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  gleich sind falls  $x = \tilde{x}$  und  $y = \tilde{y}$  gelten. Wir folgen hier Kazimierz Kuratowski und definieren

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

was offensichtlich die definierende Eigenschaft erfüllt. Die Menge aller Tupel heisst dann die Produktmenge  $X \times Y$ .

- Eine **Relation**  $\mathcal{R}$  auf zwei Mengen  $X, Y$  ist eine Teilmenge der Produktmenge  $\mathcal{R} \subset X \times Y$ . Die Relation  $\mathcal{R}$  heisst **Funktion** falls

$$\forall x : x \in X \Rightarrow \exists! y : (y \in Y) \wedge (x, y) \in \mathcal{R}$$

gilt. Man nennt die Relation  $\mathcal{R}$  auch den **Funktionsgraphen der Funktion**. Wir bevorzugen hier eine “dynamische” Sichtweise auf Funktionen, das heisst  $f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$ , wobei  $f(x)$  das eindeutig  $x \in X$  zugeordnete Element aus  $Y$  bezeichnet (weitere Eigenschaften siehe Skriptum von Michael Struwe).

*Bemerkung 1.1.* Die Konstruktion der Produktmenge ist ein typisches Beispiel für den strukturalistischen Ansatz der Mathematik: Wir fragen nicht “Was” mathematische Objekte sind, sondern in welchen Beziehungen sie zueinander stehen.

**1.7. Die natürlichen Zahlen.** Im Folgenden fügen wir zu den Axiomen der Mengenlehre weitere Axiome hinzu: die Peanoschen Axiome. Es wird axiomatisch die Existenz einer Menge  $\mathbb{N}$ , der Menge der natürlichen Zahlen, gefordert. Es gelte:

- (1)  $0 \in \mathbb{N}$ .
- (2) Es gibt eine surjektive und injektive Abbildung  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , die Nachfolgerabbildung, mit der Eigenschaft: jede Teilmenge  $N \subset \mathbb{N}$ , die die Null enthält  $0 \in N$  und für die mit  $n \in N$  auch  $\nu(n) \in N$  gilt, ist identisch mit  $\mathbb{N}$ . Formal geschrieben

$$\forall N \subset \mathbb{N} : (0 \in N) \wedge (\forall n : n \in N \Rightarrow \nu(n) \in N) \rightarrow N = \mathbb{N}.$$

Wir werden nun diese Axiomatik verwenden, um auf  $\mathbb{N}$  eine Addition und eine Ordnungsstruktur einzuführen.

**Theorem 1.2.** *Sei  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen, dann existiert eine eindeutige Additionsabbildung  $(m, n) \mapsto m + n$  auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , die assoziativ und kommutativ ist und 0 als neutrales Element hat, mit der Eigenschaft*

$$m + \nu(n) = \nu(m + n)$$

für  $m, n \in \mathbb{N}$ . Die Abbildung  $l_m := m + \cdot$  ist injektiv auf  $\mathbb{N}$ . Weiters definiert

$$m \leq n \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} : m + p = n$$

eine Wohlordnung auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  (zum Begriff der Wohlordnung siehe Skriptum von Michael Struwe).

*Beweis.* Wir definieren eine Abbildung  $l_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$  via

$$(1.1) \quad l_m(\nu(n)) := \nu(l_m(n)) \text{ und } l_m(0) := m.$$

Zuerst zeigen wir die Existenz solcher Abbildungen  $l_m$  auf  $\mathbb{N}$ : wir betrachten dazu die Menge  $M$  der  $m \in \mathbb{N}$ , für die eine Abbildung mit (1.1) existiert. Offensichtlich liegt  $0 \in M$ , denn  $l_0 = id_{\mathbb{N}}$  erfüllt die Eigenschaften (1.1) für  $m = 0$ . Nehmen wir nun an, dass  $m \in M$  liegt, dann aber ist  $l_{\nu(m)}(n) := \nu(l_m(n))$ , jeweils für  $n \in \mathbb{N}$ , ein Kandidat für eine Abbildung zu  $\nu(m)$ , denn es gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$l_{\nu(m)}(\nu(n)) \stackrel{\text{nach Def.}}{=} \nu(l_m(\nu(n))) \stackrel{\text{nach (1.1)}}{=} \nu(\nu(l_m(n))) \stackrel{\text{nach Def.}}{=} \nu(l_{\nu(m)}(n)),$$

und natürlich  $l_{\nu(m)}(0) = \nu(m)$  nach Definition. Somit gilt  $M = \mathbb{N}$  und wir haben damit die Existenz einer Abbildung  $l_m$  mit obigen Eigenschaften bewiesen. Die Abbildung ist auch eindeutig bestimmt, denn die Menge wo die beiden möglicherweise verschiedenen Abbildungen übereinstimmen muss mit  $n$  auch den Nachfolger beinhalten, und 0 liegt sowieso in dieser Menge. Aufgrund der Eindeutigkeit folgt insbesondere dass  $l_{\nu(m)}(n) = \nu(l_m(n))$  für all  $m \in \mathbb{N}$ .

$l_m$  steht für Linksaddition mit  $m$ . Würde man – geleitet von der Schreibweise  $m + n$  – eine Rechtsaddition  $r_n$  einführen wollen, dann kommt man zur selben definierenden Eigenschaft und aufgrund der Eindeutigkeit zur selben Abbildung.

Die Injektivität von  $l_m$  folgt aus der Injektivität von  $\nu$ : für  $m = 0$  ist die Abbildung  $l_0$  die Identität, also injektiv. Wenn die Injektivität für  $l_m$  gilt, dann ist  $l_{\nu(m)} = \nu \circ l_m$  auch injektiv als Verkettung injektiver Abbildungen.

Wir bezeichnen nun

$$m + n := l_n(m)$$

für  $m, n \in \mathbb{N}$ . Wir möchten weiters zeigen, dass die so definierte Addition kommutativ ist, das heisst für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt:  $m + n = n + m$ : für ein fixes  $m \in \mathbb{N}$  betrachten wir die Menge  $N$  der Zahlen  $n$  mit  $l_m(n) = l_n(m)$ . Wieder liegt  $0 \in N$  und für ein  $n \in N$  mit  $l_m(n) = l_n(m)$  gilt

$$l_m(\nu(n)) = \nu(l_m(n)) = \nu(l_n(m)) = l_{\nu(n)}(m)$$

und somit  $N = \mathbb{N}$ .

Das Assoziativgesetz wird bewiesen, indem man untersucht auf welcher Menge von Elementen  $p \in \mathbb{N}$  die Gleichung  $l_{l_m(n)}(p)$  mit  $l_m(l_n(p))$  gilt. Offensichtlich für  $p = 0$  und mit  $p$  gilt auch

$$l_{l_m(n)}(\nu(p)) = \nu(l_{l_m(n)}(p)) = \nu(l_m(l_n(p))) = l_m(l_n(\nu(p))),$$

folglich die Gleichheit überall.

Die eingeführte Ordnungsrelation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch: Antisymmetrie folgt aus der Injektivität der Linksaddition  $l_m$ . Transitivität und Reflexivität folgen unmittelbar. Weiters handelt es sich um eine Wohlordnung: sei  $N$  eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$ . Definieren wir als  $M$  die Menge der natürlichen Zahlen  $p$  mit  $p \leq n$  für alle  $n \in N$ . Wir zeigen entweder  $M = \mathbb{N}$  oder  $M \cap N \neq \emptyset$ . Nehmen wir an  $M \cap N = \emptyset$ . Offenbar gilt  $0 \in M$ . Sei nun  $p \in M$ , dann gilt  $p \notin N$ . Dann liegt aber  $\nu(p)$  auch wieder in  $M$  und damit nicht in  $N$ . Folglich  $M = \mathbb{N}$  und deshalb  $N = \emptyset$ . Falls nun  $N$  nicht leer ist, dann muss  $M \cap N = \{p\}$  gelten: also hat  $N$  ein Minimum.  $\square$

**Korollar 1.3.** *Sei  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen, dann gilt  $1 + 1 = 2$ , wobei  $1 := \nu(0)$  der Nachfolger der Null ist und  $2 := \nu(1)$  der Nachfolger der 1. Insbesondere schreiben wir nun  $\nu(n) = n + 1$  für  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Es gilt:  $1 + 1 = 1 + (\nu(0)) \stackrel{(1.1)}{=} \nu(1 + 0) = \nu(1) = 2$   $\square$

Wir können nun eine neue Definition von Produkten von Mengen einführen, die die Kuratowskische ablösen wird. Sei  $n \geq 1$  und bezeichne  $\{1, \dots, n\}$  die Menge  $\{k \mid 1 \leq k \leq n\}$ . Sei  $X$  eine nicht-leere Menge, dann nennen wir eine Abbildung  $x : \{1, \dots, n\} \rightarrow X$  ein  $n$ -Tupel von Elemente aus  $X$  und wir schreiben auch  $x_1, \dots, x_n$  oder  $(x_1, \dots, x_n)$ . Die Menge aller  $n$ -Tupel bezeichnen wir mit  $X^n$ .

Zentral in der Mathematik sind rekursive Definitionen. Wir beweisen zuerst das allgemeine Resultat, dann eine Anwendung zur Eindeutigkeit von natürlichen Zahlen.

**Theorem 1.4.** *Sei  $X$  eine nicht leere Menge und  $a \in X$ . Weiters seien  $V_n : X^{n+1} \rightarrow X$  Abbildungen für jedes  $n \geq 0$ . Dann existiert eine eindeutige Abbildung  $g : \mathbb{N} \rightarrow X$  sodass  $g(0) = a$  und  $g(n+1) = V_n(g(0), \dots, g(n))$  für  $n \in \mathbb{N}$  gilt.*

*Beweis.* Zuerst zeigen wir den folgenden einfachen Sachverhalt mit dem Induktionsaxiom: für jede natürliche Zahl  $\tilde{m} \in \mathbb{N}$  existieren Abbildungen  $h_m : \{0, \dots, m\} \rightarrow X$  für  $0 \leq m \leq \tilde{m}$  sodass  $h_m(0) = a$  und

$$h_m(k) = h_k(k)$$

für alle  $0 \leq k < m \leq \tilde{m}$  und

$$h_m(m) = V_{m-1}(h_m(0), \dots, h_m(m-1))$$

für alle  $0 \leq m \leq \tilde{m}$ . Beachte dass die Bedingungen für  $\tilde{m} = 0$  bis auf die erste leer sind. Der Induktionsanfang ist einfach, denn es muss nur eine Abbildung  $h_0 : \{0\} \rightarrow X$  gebaut werden mit vorgeschriebenem Bildwert  $h_0(0) = a$ . Nehmen wir an  $\tilde{m}$  liegt in der Menge der Zahlen, wo obiges gilt, dann gibt es bereits Abbildungen  $h_0, \dots, h_{\tilde{m}}$  die alle gewünschten Eigenschaften erfüllen. Es bleibt  $h_{\tilde{m}+1} : \{0, \dots, \tilde{m}+1\} \rightarrow X$  zu konstruieren. Dazu definieren  $h_{\tilde{m}+1}(k) := h_k(k)$  für  $0 \leq k \leq \tilde{m}$  und

$$h_{\tilde{m}+1}(\tilde{m}+1) := V_{\tilde{m}}(h_{\tilde{m}}(0), \dots, h_{\tilde{m}}(\tilde{m})).$$

Diese Gleichung definiert den Wert an  $\tilde{m}+1$ , da alle anderen Werte bereits definiert sind. Wir überzeugen uns so dass für jede natürliche Zahl  $\tilde{m}$  obige Eigenschaften erfüllbar sind und definieren nun  $g$  mit

$$g(n) := h_n(n)$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $g(0) = a$  und

$$\begin{aligned} g(n+1) &= h_{n+1}(n+1) = V_n(h_{n+1}(0), \dots, h_{n+1}(n)) \\ &= V_n(h_0(0), \dots, h_n(n)) = V_n(g(0), \dots, g(n)) \end{aligned}$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Die Eindeutigkeit folgt durch Untersuchung der Menge  $N$ , wo zwei mögliche Abbildungen  $g, g'$  übereinstimmen. Sicherlich liegt  $0 \in N$  und mit  $n \in N$  liegt auch  $n+1 \in N$ , denn

$$g(n+1) = V_n(g(0), \dots, g(n)) = V_n(g'(0), \dots, g'(n)) = g'(n+1).$$

□

Mit dem Rekursionssatz können wir leicht die Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen beweisen:

**Theorem 1.5.** *Seien  $(\mathbb{N}, 0, \nu)$  und  $(\mathbb{N}', 0', \nu')$  zwei Mengen, die die Peanoschen Axiome erfüllen, dann gibt es eine eindeutige bijektive Abbildung  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$  mit  $g(0) = 0'$  und  $g(\nu(n)) = \nu'(g(n))$  für  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Mit rekursiver Definition können wir eine eindeutige Abbildung  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$  mit  $g(0) = 0'$  und  $g(n+1) = \nu'(g(n))$  für  $n \in \mathbb{N}$  konstruieren und (sic!) eine eindeutige Abbildung  $g' : \mathbb{N}' \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $g'(0') = 0$  und  $g'(\nu'(n)) = g'(n) + 1$  für

$n \in \mathbb{N}$ . Untersuchen wir nun die Menge  $N \subset \mathbb{N}$  auf der  $g' \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$  gilt. Offenbar gilt  $0 \in N$  und mit  $n \in N$  gilt

$$(g' \circ g)(n+1) = g'(\nu'(g(n))) = g(n) + 1 = \text{id}_{\mathbb{N}}(n+1),$$

somit  $N = \mathbb{N}$ . Analog wird  $g \circ g' = \text{id}_{\mathbb{N}}$  bewiesen.  $\square$

Mit Rekursion können wir nun für jede Folge von Zahlen  $a_1, \dots, a_n, \dots$  die Summe und das Produkt definieren:

$$\sum_{i=1}^0 a_i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \sum_{i=1}^n a_i + a_{n+1},$$

bzw

$$\prod_{i=1}^0 a_i = 1 \text{ und } \prod_{i=1}^{n+1} a_i := \prod_{i=1}^n a_i \times a_{n+1}.$$

**Korollar 1.6.** *Sei  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen, dann hat jede Zahl eine Darstellung als Produkt von Primzahlen, das sind Zahlen  $p \geq 2$ , die nur durch sich selbst und 1 teilbar sind. Die Darstellung ist insofern eindeutig als gilt: wenn  $q$  eine Primzahl ist und  $qm = p_1 \dots p_k$ , wobei  $p_1, \dots, p_k$  Primzahlen sind, dann existiert ein  $1 \leq i \leq k$  sodass  $q = p_i$ .*

*Beweis.* Bezeichne  $N$  die Menge der Zahlen die keine Darstellung als Produkt von Primzahlen hat. Falls die Menge nicht leer ist, dann hat sie ein Minimum. Dieses Minimum kann keine Primzahl sein, dann kann es ja durch ein Produkt aus Primzahlen darstellbar. Folglich ist das Minimum ein Produkt aus zwei Zahlen, die weder 1 noch es selbst sind. Beide dieser Zahlen müssen aber eine Darstellung als Produkt von Primzahlen haben, womit wir an einem Widerspruch mit der Minimalität angelangt sind. Deshalb muss  $N = \emptyset$  gelten.

Für die Eindeutigkeitsaussage gehen wir wie folgt vor: sei  $n = p_1 \dots p_k$  die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass eine Primzahl  $q$  existiert mit  $q \neq p_i$  für alle  $1 \leq i \leq k$  und  $qm = n$ . Dann gilt selbige Aussage für  $m < n$  nicht und deshalb haben wir eine eindeutige Primfaktorzerlegung  $m = q_2 \dots q_l$ , wir bezeichnen nun  $q_1 := q$ . Weiters können wir nach Umordnung annehmen, dass  $p_1 < q_1$  gilt. Folglich sind  $0 < n - p_1(q_2 \dots q_l) < n$  und  $0 < q_1 - p_1 < n$  ebenso mit eindeutiger Primfaktorzerlegung gegeben. Die erste Zahl muss aber einen Primfaktor  $p_1$  in ihrer eindeutigen Zerlegung haben, die Zahl  $q_1 - p_1$  kann aber  $p_1$  nicht als Primfaktor haben, folglich ein Widerspruch.  $\square$

Mit der Konstruktion der algebraischen Strukturen “Addition”, “Multiplikation” und “Ordnung” auf den natürlichen Zahlen stellt sich die Frage nach grösstmöglicher Anwendbarkeit dieser Operationen. Dies führt auf direkte Art und Weise zur Erweiterung der Zahlenmengen  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ . Wir geben hier nur die Definitionen der entsprechenden Mengen mit den entsprechenden Definitionen der algebraischen Strukturen. Das einfache Nachrechnen der Eigenschaften ist den LeserInnen überlassen.

**1.8. Die ganzen Zahlen.** Wir beginnen mit der Konstruktion der ganzen Zahlen: Wir führen auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$  ein,  $(m, n) \sim (\tilde{m}, \tilde{n})$  genau dann wenn  $m + \tilde{n} = n + \tilde{m}$ . Offensichtlich gilt die Reflexivität und die Symmetrie. Für die Transitivität nehmen wir  $(m, n) \sim (\tilde{m}, \tilde{n}) \sim (\tilde{\tilde{m}}, \tilde{\tilde{n}})$ , dann gilt  $m + \tilde{\tilde{n}} = n + \tilde{\tilde{m}}$  und  $\tilde{m} + \tilde{\tilde{n}} = \tilde{n} + \tilde{\tilde{m}}$ , also durch Addition der beiden Gleichungen

$$m + \tilde{n} + \tilde{\tilde{m}} + \tilde{\tilde{n}} = n + \tilde{\tilde{m}} + \tilde{\tilde{n}} + \tilde{\tilde{m}},$$

was mit Injektivität von  $l_{\tilde{m}+\tilde{n}}$  zum gewünschten führt.

Die Menge der Äquivalenzklassen  $[(m, n)]$  wird mit  $\mathbb{Z}$  bezeichnet und man stellt sich dazu “formale Differenzen”  $m - n$  vor. Auf der Menge  $\mathbb{Z}$  erklären wir nun die Addition, Multiplikation und die Ordnungsstruktur.

Für den Moment bezeichnen wir die eingeführten Relationen mit neuen Zeichen, kehren aber nach Abschluss des Beweises zu den bekannten Zeichen zurück:

- Die Addition zweier Äquivalenzklassen wird durch

$$[(m_1, n_1)] \oplus [(m_2, n_2)] := [(m_1 + m_2, n_1 + n_2)]$$

eingeführt. Das neutrale Element wird  $0_{\mathbb{Z}} := [(m, m)]$ . Das entspricht der Intuition, dass die Äquivalenzklasse  $[(m, n)]$  formale Differenzen  $m - n$  darstellt.

- Die Multiplikation zweier Äquivalenzklassen wird durch

$$[(m_1, n_1)] \otimes [(m_2, n_2)] := [(m_1 m_2 + n_1 n_2, m_1 n_2 + m_2 n_1)]$$

eingeführt. Das neutrale Element ist  $1_{\mathbb{Z}} := [(m + 1, m)]$ .

- Die Ordnungsstruktur wird durch

$$[(m_1, n_1)] \trianglelefteq [(m_2, n_2)] :\Leftrightarrow m_1 + n_2 \leq m_2 + n_1$$

für alle  $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}$  eingeführt.

Bevor die Rechenregeln geprüft werden, muss bewiesen werden, dass die Definitionen **unabhängig vom gewählten Repräsentanten der Äquivalenzklasse** sind. Wir zeigen das exemplarisch im Falle der Multiplikation: seien  $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}$  und  $\tilde{m}_1, \tilde{n}_1, \tilde{m}_2, \tilde{n}_2 \in \mathbb{N}$  natürliche Zahlen mit  $(m_1, n_1) \sim (\tilde{m}_1, \tilde{n}_1)$  und  $(m_2, n_2) \sim (\tilde{m}_2, \tilde{n}_2)$ , dann ist zu zeigen dass

$$(m_1 m_2 + n_1 n_2, m_1 n_2 + m_2 n_1) \sim (\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 + \tilde{n}_1 \tilde{n}_2, \tilde{m}_1 \tilde{n}_2 + \tilde{m}_2 \tilde{n}_1),$$

was äquivalent zu

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + \tilde{m}_1 \tilde{n}_2 + \tilde{m}_2 \tilde{n}_1 = \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 + \tilde{n}_1 \tilde{n}_2 + m_1 n_2 + m_2 n_1.$$

Dies folgt aber aus der Auswertung von  $m_1 + \tilde{n}_1 = n_1 + \tilde{m}_1$  mit  $m_2 + \tilde{n}_2 = n_2 + \tilde{m}_2$ .

Mit diesen Strukturen erkennen wir, dass  $\mathbb{Z}$  ein kommutativer, geordneter Ring wird, wobei wir zusätzlich durch  $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ , definiert durch  $i(n) := [(n, 0)]$  für  $n \in \mathbb{N}$ , die natürlichen Zahlen mit all ihren Strukturen, der Addition, der Multiplikation und der Ordnungsstruktur, **strukturerhaltend** einbetten können.

**1.9. Die rationalen Zahlen.** Analog gestaltet sich die Einführung der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ : wir bezeichnen nun die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  als eine Erweiterung der natürlichen Zahlen mit Addition  $+$ , Multiplikation  $\cdot$  und Ordnungsstruktur  $\leq$ , insbesondere betrachten wir die natürlichen Zahlen als Teilmenge der ganzen Zahlen via der obigen Einbettung. Wir definieren nun die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  als Menge von Äquivalenzklassen von Elementen von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  bezüglich der Äquivalenzrelation  $(p, q) \sim (\tilde{p}, \tilde{q})$  genau dann wenn  $p\tilde{q} = q\tilde{p}$ . Wir bezeichnen mit  $\mathbb{Z}^*$  die Menge  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  – beachte, dass wir nun durch Weglassen der Null im Nenner zu einer sinnvollen “echten” Äquivalenzrelation kommen.

Wie oben können wir algebraische Operationen einführen und wir verwenden wieder neue Zeichen:

- Die Addition zweier Äquivalenzklassen wird durch

$$[(p_1, q_1)] \oplus [(p_2, q_2)] := [(p_1q_2 + p_2q_1, q_1q_2)]$$

eingeführt. Das neutrale Element wird  $0_{\mathbb{Q}} := [(0, q)]$ . Das entspricht der Intuition, dass die Äquivalenzklasse  $[(p, q)]$  einen formalen Bruch  $\frac{p}{q}$  darstellt.

- Die Multiplikation zweier Äquivalenzklassen wird durch

$$[(p_1, q_1)] \otimes [(p_2, q_2)] := [(p_1p_2, q_1q_2)]$$

eingeführt. Das neutrale Element ist  $1_{\mathbb{Z}} := [(q, q)]$ .

- Die Ordnungsstruktur wird durch

$$[(p_1, q_1)] \leq [(p_2, q_2)] :\Leftrightarrow (q_1q_2 > 0 \wedge (p_1q_2 \leq p_2q_1)) \vee (q_1q_2 < 0 \wedge (p_1q_2 \geq p_2q_1))$$

für alle  $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{Z}$  eingeführt.

Erneut können wir leicht überprüfen, dass die eingeführten Operationen unabhängig vom gewählten Repräsentanten sind und deshalb die Struktur eines geordneten Körpers auf  $\mathbb{Q}$  einführen. Erneut lassen wir die eben eingeführten Zeichen, die uns beim Beweis hilfreich waren weg und fahren mit den üblichen Bezeichnungen fort.

## 2. DIE REELLEN ZAHLEN

**2.1. Dedekindsche Schnitte und die Konstruktion von  $\mathbb{R}$ .** Wir konstruieren einen geordneten Körper in dem jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum hat.

Sei  $\mathbb{Q}$  die Menge der rationalen Zahlen, dann bezeichnen wir als  $\mathbb{R}$  die Menge der Paare  $(A, B)$ , Dedekindsche Schnitte genannt, die folgende Eigenschaften erfüllen:

- D1 Die Mengen  $A, B \subset \mathbb{Q}$  sind nicht leer, disjunkt und  $A \cup B = \mathbb{Q}$ .
- D2 Die Menge  $A$  liegt "unterhalb" von  $B$ , oder anders ausgedrückt, für jedes  $a \in A$  gilt:  $a < b$  für alle  $b \in B$ .
- D3 Die Menge  $B$  hat kein Minimum.

Auf  $\mathbb{R}$  erklären wir wie folgt die Struktur eines geordneten Körpers:

- Wir definieren zu Beginn die Einbettungsabbildung  $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$r \mapsto (\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq r\}, \{x \in \mathbb{Q} \mid x > r\})$$

und die Ordnungsrelation

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) :\Leftrightarrow B_2 \subset B_1.$$

- Die Addition von zwei Schnitten ist durch Addition der jeweiligen Elemente erklärt:

$$(A_1, B_1) \oplus (A_2, B_2) := (\mathbb{Q} \setminus (B_1 + B_2), B_1 + B_2).$$

Das neutrale Element ist durch  $0_{\mathbb{R}} := i(0)$  gegeben.

- Die Multiplikation von zwei Schnitten ist durch Multiplikation der jeweiligen Elemente erklärt:

$$(A_1, B_1) \otimes (A_2, B_2) := (\mathbb{Q} \setminus B_1B_2, B_1B_2),$$

falls  $0 \leq (A_1, B_1), (A_2, B_2)$  gilt. Das neutrale Element ist durch  $1_{\mathbb{R}} := i(1)$  gegeben. Weiters ist die Multiplikation durch  $x \otimes y := -(-x) \otimes y$  gegeben, falls  $x \leq 0$  und  $0 \leq y$ , durch  $x \otimes y := x \otimes -(-y)$  gegeben, falls  $0 \leq x$  und

$y \leq 0$  und durch  $x \otimes y := (-x) \otimes (-y)$  gegeben, falls  $x \leq 0$  und  $y \leq 0$ . Der gemeinsame Fall  $0 \otimes 0 = 0$  ist jeweils gleich definiert.

Wir zeigen nur dass die Ordnungsrelation eine Totalordnung definiert: Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität sind klar. Es bleibt die Totalordnungseigenschaft zu zeigen. Seien  $(A_1, B_1)$  und  $(A_2, B_2)$  verschieden, dann existiert entweder  $b_1 \in B_1 \setminus B_2$  oder  $b_2 \in B_2 \setminus B_1$ . Analysieren wir den ersten Fall:  $b_1$  ist also eine untere Schranke von  $B_2$ , oder alle Elemente von  $B_2$  sind obere Schranken für  $b_1$  und damit für  $A_1$ . Folglich  $B_2 \subset B_1$ . Der zweite Fall ist analog womit die Totalordnung von  $\leq$  auf  $\mathbb{R}$  bewiesen wäre.

Der wesentliche Schritt ist nun die Vollständigkeit: sei  $M \subset \mathbb{R}$  eine nach unten beschränkte Menge. Dann existiert  $(A', B') \in \mathbb{R}$  sodass  $(A', B') \leq M$ , oder in anderen Worten, für alle  $(A, B) \in M$  gilt  $B \subset B'$ . Damit gilt aber auch  $(\bigcap_{(A,B) \in M} A, \bigcup_{(A,B) \in M} B)$  dass ein Dedekindscher Schnitt. Weiters gilt dass dieses Element eine untere Schranke ist, allerdings auch die grösste.

- Als kleine Übung mit der Ordnungsvollständigkeit beweisen wir, dass zu jeder Zahl  $\delta > 1$  eine Quadratwurzel  $\sqrt{\delta}$  existiert: wir schauen dafür die Mengen  $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq x^2 \leq \delta\}$  und  $\{x \in \mathbb{R} \mid y \geq 0, \delta < y^2\}$  an. Nach der Ordnungsvollständigkeit liegt ein Element  $c$  zwischen beiden Mengen. Zu zeigen ist dass  $c^2 = \delta$  gilt. Dazu verwenden wir  $\xi := \frac{\delta c + \delta}{c + \delta}$ : es gilt  $\xi = c - \frac{c^2 - \delta}{c + \delta}$  und  $\xi^2 - \delta = \frac{(\delta^2 - \delta)(c^2 - \delta)}{(c + \delta)^2}$ . Wenn nun  $c^2 < \delta$ , dann gilt  $\xi > c$ , aber auch  $\xi^2 < \delta$ , was der Definition von  $c$  widerspricht. Analog für  $c^2 > \delta$ , weshalb wir folgern dass  $c^2 = \delta$ .
- Als Folgerung aus dem Archimedischen Prinzip beweisen wir, dass es für je zwei reelle Zahlen  $a < b$  eine rationale Zahl  $r$  gibt mit  $a < r < b$ : zuerst ist klar dass es für  $b - a > 0$  eine natürliche Zahl  $n$  gibt, sodass  $n > \frac{1}{b-a}$ . Offenbar gibt es auch natürliche Zahlen  $m_1, m_2 \geq 0$  sodass  $-m_1 \leq na \leq m_2$ , womit wir aber unmittelbar schliessen können, dass es eine Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $m - 1 \leq na < m$ , denn das Intervall  $\{k \in \mathbb{Z} \mid -m_1 \leq k \leq m_2\}$  enthält nur endlich viele Elemente. Damit erhalten wir aber:  $na < m \leq na + 1 < nb$  und damit tut  $r = \frac{m}{n}$  das gewünschte.
- Mit der vorigen Aussage kann man nun leicht beweisen, dass es zu jeder reellen Zahl  $\alpha$  und jedem  $\epsilon > 0$  zwei rationale Zahlen  $r_1 < \alpha < r_2$  gibt, sodass  $0 < \alpha - r_1 < \epsilon$  und  $0 < r_2 - \alpha < \epsilon$ . Dazu definieren wir die Menge  $A := \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq \alpha\}$  und  $B := \{r \in \mathbb{Q} \mid r > \alpha\}$ , dann gibt es  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq c \leq b$  für alle  $a \in A$  und  $b \in B$ . Die Zahl  $c$  ist eindeutig bestimmt, denn gäbe es eine zwei  $c_1 < c_2$  mit derselben Eigenschaft, dann liegt eine rationale Zahl dazwischen, die aber entweder in  $A$  oder  $B$  liegen muss, ein Widerspruch. Das eindeutige  $c$  muss deshalb das Supremum von  $A$  sein, und gleichzeitig das Infimum von  $B$  und es muss mit  $\alpha$  übereinstimmen. Also gilt dass es rationale Zahlen  $r_1 < \alpha < r_2$  gibt, die  $\alpha$  näher als ein vorgegebener Abstand  $\epsilon$  kommen.
- Sei allgemeiner  $\mathbb{S}$  ein Körper der die Axiome der reellen Zahlen erfüllt, dann ist die Abbildung  $j : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\alpha \mapsto (\{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq \alpha\}, \{r \in \mathbb{Q} \mid r > \alpha\})$$

ein ordnungserhaltender und strukturhaltender Isomorphismus, denn die Abbildung ist injektiv und surjektiv. Injektivität folgt aus vorherigen Aussage dass zu  $a < b$  eine rationale Zahl  $r$  existiert mit  $a < r < b$ , weshalb

die Dedekindschen Schnitte im Bild verschieden sein müssen. Surjektivität folgt aus dem Faktum, dass das Urbild eines Dedekindschen Schnittes zwei Mengen von rationalen Zahlen in  $\mathbb{S}$  sind, die genau eine Zahl  $\alpha$  als Supremum bzw Infimum bestimmen.

- Der Dedekindsche Schnitt  $(A, B)$ , der  $\sqrt{\delta}$  entspricht ist durch

$$B := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > \delta, x \geq 0\}$$

gegeben.

**2.2. Beziehung von Geometrie zu Analysis.** Im weiteren Verlauf des Kapitels 2 haben wir Vektorräume, Skalarprodukte, Normen und Distanzen auf  $\mathbb{R}^n$  kennengelernt. Teilweise werden dabei “geometrische Namen” für Begriffe und Sätze verwendet. Das ist folgendermassen zu verstehen: die Axiome der (ebenen) euklidischen Geometrie können durch entsprechende Zuweisungen in der Menge  $\mathbb{R}^2$  interpretiert werden, womit die Begriffe der (ebenen) euklidischen Geometrie eine Bedeutung im  $\mathbb{R}^2$  erlangen. Der Begriff “orthogonal (senkrechte) Richtungen” kann dann mit dem Begriff “orthogonale Vektoren” identifiziert werden. In diesem Sinne ist die Namensgebung “Satz von Pythagoras” für das relativ einfache Theorem aus der Analysis mit Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  verstehen. Erst wenn man die vorher erwähnte Identifikation bewiesen hat, kann man behaupten mit dem arithmetischen Satz von Pythagoras den geometrischen bewiesen zu haben.

**2.3. Abzählbarkeit und Algorithmen.** Als interessante Anwendung des Resultates, dass die natürlichen Zahlen sich bijektiv auf die ganzen und auf die rationalen Zahlen abbilden lassen (1. Cantorsches Diagonalverfahren), aber sich nicht bijektiv auf die reellen Zahlen abbilden lassen (2. Cantorsches Diagonalverfahren), können wir analysieren wie viele partielle Abbildungen es von den natürlichen Zahlen auf sich selbst gibt. Mit dem zweiten Cantorschen Diagonalverfahren ist die Antwort einfach, nämlich jedenfalls nicht abzählbar viele.

Eine partielle Abbildung  $f : D \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist eine Abbildung, die nur für eine Teilmenge der natürlichen Zahlen definiert ist. Sei nun  $f_n : D_n \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Abzählung von partiellen Abbildungen. Dann ist aber die Abbildung

$$f(n) := f_n(n) + 1, \text{ falls } n \in D_n, \text{ und } f(n) = 0 \text{ sonst}$$

auch partiell (ja sogar total). Es muss also nach Voraussetzung ein  $m \in \mathbb{N}$  geben mit  $f_m = f$ . Offensichtlich gilt  $f_m(m) \neq f(m)$ , falls  $m \in D_m$ , also ein Widerspruch. Also  $m \notin D_m$  und  $f(m) = 0$ , was erneut ein Widerspruch ist, denn gleiche Abbildungen haben den selben Definitionsbereich. Deshalb kann es keine Abzählung der partiellen Abbildungen geben.

Im folgenden sind wir nicht präzise, obwohl es sich hierbei um den heikelsten Punkt handelt. Es geht um das Auffassen von eines Computerprogrammes oder Algorithmus (das heisst Input, einer algorithmischen Verarbeitung und Output) als partielle (eigentlich partiell-rekursive) Abbildung. Formalisieren lässt sich das mit dem Begriff der *Turingmaschine*, einem mathematischen Modell eines Computerprogramms, das wir hier nicht präzise definieren werden, aber kurz anschaulich beschreiben wollen: wenn man die Eingaben und Ausgaben von Computerprogrammen als natürliche Zahlen auffasst, dann ist jedes Computerprogramm eine partiell-rekursive Abbildung, wobei die Partialität genau das Faktum modelliert, dass nicht jeder Input einen Output nach endlicher Zeit liefert. Die Rekursivität modelliert

den algorithmischen Charakter der Verarbeitung, die ja durch ein endliches Programm angebar ist. Die Situation dass ein Algorithmus nicht anhält beschreiben wir als eternal Loop (EL). Da Computerprogramme endlich beschreibbare Vorschriften sind, nämlich als in Code geschriebene Angaben, ist die Menge der Computerprogramme eine höchstens abzählbare Teilmenge der Menge der partiellen Abbildungen und damit eine **echte** Teilmenge aus Gründen der Kardinalität. Was sind nun Kandidaten für partielle Abbildungen, die sicherlich keine Algorithmen sind. Wir nehmen an, dass man aus Computerprogrammen, durch einfache Operationen neue Computerprogramme bauen kann, die dann natürlich auch wieder in der gegebenen höchstens abzählbaren Menge liegen müssen.

Kann es zum Beispiel ein Computerprogramm (also eine partiell-rekursive Abbildung aus der spezifizierten abzählbaren Teilmenge geben), das entscheiden kann, ob ein anderes Computerprogramm (also irgendeine andere partiell-rekursive Abbildung aus der spezifizierten abzählbaren Teilmenge) bei Vorgabe eines bestimmten Inputs anhält oder in einen eternal loop verfällt? So ein Programm würde man ELCH nenne für eternal loop checker. Nehmen wir an ELCH existiert, dann hat ELCH einen Definitionsbereich, der aus Paaren von allen möglichen Inputs und allen möglichen Computerprogrammen besteht. Der Output ist JA oder NEIN, für “hält an” oder “hält nicht an”. Aus ELCH kann man ein weiteres Computerprogramm A bauen, das wie folgt funktioniert: zu einem beliebigem Input  $I$  und einem Computerprogramm  $P$  wird  $\text{ELCH}(I, P)$  berechnet. Ist das Ergebnis NEIN, dann bleibt das Programm stehen. Ist das Ergebnis JA, dann fällt das Programm in einen eternal loop. Dieses Computerprogramm muss einerseits nach Voraussetzung wieder in der vorgegebenen abzählbaren Menge liegen, andererseits gilt  $\text{ELCH}(A, A)$  kann nicht NEIN sein, dann müsste das Programm A ja angehalten haben, aber auch nicht JA sein, denn dann dürfte es ja nicht anhalten. In der Sprache der partiellen Abbildungen würde man sagen, dass es keine Abbildung ELCH geben kann, die als Argumente eine natürliche Zahl  $n$  und eine partielle Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{F}$  nimmt, wobei  $\mathcal{F}$  eine wohldefinierte abzählbare Menge von partiellen Abbildungen ist, und deren Output 1 ist falls  $n \in D$  und 0 sonst. Dann könnte man nämlich eine weitere partielle Abbildung  $g$  bauen mit  $(n, f) \in D_g$  genau dann wenn  $\text{ELCH}(n, f) = 0$ . Es gilt aber  $\text{ELCH}(n, g) = 0$  genau dann wenn  $n \notin D_g$ , was aber wiederum nach Konstruktion genau dann der Fall ist wenn  $\text{ELCH}(n, g) = 1$ . Ebenso führt der andere Fall zu einem Widerspruch. Man benötigt für diesen Widerspruch die Abzählbarkeit von  $\mathcal{F}$ , damit Elemente aus  $\mathcal{F}$  als Input erlaubt sind und die Erlaubtheit der obigen Konstruktion, wie  $g$  aus  $f$  gebaut wird. Beachte die formale Ähnlichkeit zur Russellschen Antinomie.

Auf die Mathematik im engeren Sinne kann man eine ähnliche Überlegung anwenden: falls es gelingt mathematische Aussagen durch Zahlen zu codieren (das nennt man “Gödelisierung” und das ist wieder der eigentlich komplizierte Schritt), dann kann man fragen, ob es einen Algorithmus geben kann, der entscheidet ob eine mathematische Aussage in dem formalen System ableitbar (beweisbar) ist, oder nicht. Dieser Algorithmus wäre selbst eine mathematische Aussage (“die mathematische Aussage  $n$  ist beweisbar oder nicht”). Analog zu obigem kann man nun schließen, dass ein solcher Algorithmus nicht existieren kann, weil man sozusagen den die mathematische Aussage, die diesem Algorithmus entspricht, in den Algorithmus selbst einsetzen kann. Anders ausgedrückt: unter der Voraussetzung der Konsistenz der Axiome eines formalen Systems, in dem man über natürliche

Zahlen sprechen kann, gibt es immer unentscheidbare Aussagen in diesem formalen System, also Aussagen, die weder beweisbar noch deren Gegenteil beweisbar sind. Ja man kann sogar noch weiter gehen: in jedem formalen System, in dem man über die natürlichen Zahlen sprechen kann, und in dem man einen Beweis für die Konsistenz des Systems formal abgeleitet hat, muss notwendigerweise Inkonsistenz der Axiome herrschen (Gödelsche Unvollständigkeitssätze).

### 3. FOLGEN UND REIHEN

**3.1. Grundlegendes.** Es erscheint bei Konvergenzkriterien immer problematisch, dass Konstanten oder Einschränkungen vorkommen. Dazu kann man folgenden Satz beweisen:

**Theorem 3.1.** *Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  genau dann wenn*

$$\exists E > 0 \exists M > 0 \forall 0 < \tilde{\epsilon} \leq E \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq m_0 : |a_m - a| \leq M\tilde{\epsilon}.$$

*Beweis.* Eine Richtung ist klar. Wir wollen nun zeigen, dass eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die die zweite Bedingung erfüllt, auch konvergent ist. Sei  $\epsilon > 0$ , dann definieren wir  $\tilde{\epsilon} := \min(\epsilon/M, E)$ . Dann existiert  $n_0 := m_0$  sodass für alle  $n \geq n_0$  gilt:

$$|a_n - a| \leq M\tilde{\epsilon} \leq M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon,$$

was zu beweisen war. □

Beim Heronschen Verfahren des Wurzelziehens (babylonisches Wurzelziehen) wird rekursiv eine eindeutig gegebene Folge  $x_n$  konstruiert mit  $x_1 = c > 1$  und  $x_{n+1} = \frac{c}{x_n} + x_n$  für  $n \geq 1$ . Wir erhalten

$$x_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{(x_n - \sqrt{c})^2}{2x_n} \leq \frac{(x_n - \sqrt{c})^2}{2\sqrt{c}},$$

was zu  $\sqrt{c} \leq x_{n+1} \leq x_n$  und zu quadratischer Konvergenz führt. Quadratische Konvergenz ist besonders schnell, da der *quadrierte Fehler* des vorhergehenden Schrittes in den Fehler des folgenden Schrittes eingeht. Das heisst in einem Schritt verbessert sich der Fehler von, e.g.,  $\frac{1}{1000}$  auf zumindest  $\frac{1}{1000000}$ .

Konvergente Reihen sind Limiten von (Partial-)summen von Folgengliedern, das heisst für eine gegebene Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  gibt es eine eindeutig definierte Folge von Partialsummen durch die rekursive Vorschrift:  $S_0 = 0$  und  $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ , für  $n \geq 0$ . Umgekehrt gibt definiert man zu einer Folge  $(S_n)_{n \geq 0}$  die Folge der ersten Differenzen mit  $a_0 = 0$  und  $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$  für  $n \geq 0$ . Beide zueinander inversen Operationen spielen eine grosse Rolle in der Analysis.

Konvergente Reihen kann man addieren, subtrahieren und mit einem Skalar multiplizieren, das heisst

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + cb_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + c \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

gilt für alle konvergenten Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  und Zahlen  $c \in \mathbb{C}$ . Bei Produkten bricht die Analogie mit endlichen Reihen aber zusammen! Die Abklärung dieser Fragestellung gelingt mit dem Riemannschen Umordnungssatz.

**3.2. Der Riemannsche Umordnungssatz.** Der Riemannsche Umordnungssatz besteht eigentlich aus zwei Aussagen: einmal – wie im Skriptum von Michael Struwe bewiesen – verändert sich der Wert einer absolut konvergenten Reihe nicht, wenn die Reihe umgeordnet wird. Andererseits, und das wurde in der Vorlesung nicht gezeigt, kann weder vorgegebene Grenzwert  $S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  durch Umordnung einer nicht absolut konvergenten Reihe erzielt werden, was wir nun hier beweisen werden: nehmen wir eine Zahl  $S \in \mathbb{R}$  und eine nicht absolute konvergente Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Dann sind die beiden Reihen

$$\sum_{n=0, a_n \geq 0}^{\infty} a_n$$

und

$$\sum_{n=0, a_n \leq 0}^{\infty} (-a_n)$$

divergent. Wir lassen jeweils alle Folgenglieder weg, die verschwinden und erhalten  $\sum_{k \geq 0} p_k = \infty$  und  $\sum_{k \geq 0} q_k = \infty$ , zwei divergente Reihen mit positiven Gliedern. Dann gibt es einen kleinsten Index  $n_0$  sodass  $\sum_{k=0}^{n_0} p_k > S$  aufgrund der Divergenz der Reihe  $\sum_{k \geq 0} p_k$ . Als nächstes konstruieren wir einen Index  $n_1$ , nämlich den kleinsten Index, sodass

$$\sum_{k=0}^{n_0} p_k - \sum_{k=0}^{n_1} q_k < S$$

gilt. Im nächsten Schritt konstruieren wir den kleinsten Index  $n_2 > 0$ , sodass

$$\sum_{k=0}^{n_0} p_k - \sum_{k=0}^{n_1} q_k + \sum_{k=n_0+1}^{n_2} p_k > S$$

gilt. Dieses Verfahren setzen wir rekursiv fort und erhalten eine Umordnung der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Diese Umordnung konvergiert aber gegen  $S$ , da nach Definition die Folgenglieder  $q_{n_1}, p_{n_2}, q_{n_3}, \dots$  die Abstand der Partialsummen von  $S$  nach oben abschätzen (ab der Partialsumme  $\sum_{k=0}^{n_0} p_k - \sum_{k=0}^{n_1} q_k$ ). Diese Folgenglieder bilden aber eine Nullfolge, womit die Aussage bewiesen ist. Analog kann man durch Umordnung Divergenz gegen  $\pm\infty$  erzielen, falls die die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  nicht absolut konvergiert. Hierzu wählt man  $n_0$  sodass der Wert 1 überschritten wird,  $n_1$  sodass der Wert 1 wieder unterschritten wird,  $n_2$  sodass 2 überschritten wird, etc. Das führt zu einer Umordnung, die gegen  $\infty$  konvergiert.

Im Falle von Produktreihen führt der Umordnungssatz zu folgenden beiden (sic!) Aussagen, die man eigentlich trennen sollte:

- (1) Sei  $(a_{mn})_{m,n \geq 0}$  eine Folge mit Doppelindex. Falls die Reihe für eine “Abzählung”, das heisst eine bijektive Abbildung,  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  absolut konvergiert, dann für jede und all dies Reihensumme sind gleich. Man schreibt für diese Summe  $\sum_{m,n \geq 0} a_{mn}$ .
- (2) Sei  $(a_{mn})_{m,n \geq 0}$  eine Folge mit Doppelindex. Falls die Reihe für eine “Abzählung”  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  absolut konvergiert, dann stimmen die iterierten Reihensummen mit  $\sum_{m,n \geq 0} a_{mn}$  überein, das heisst

$$\sum_{m,n \geq 0} a_{mn} = \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{n \geq 0} a_{mn} \right) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{m \geq 0} a_{mn} \right).$$

Beachte dass die iterierten Reihensummen keine Umordnungen im Sinne einer Abzählung im obigen Sinne sind. Falls umgekehrt  $\sum_{m \geq 0} (\sum_{n \geq 0} |a_{mn}|)$  absolut konvergiert, dann folgt die absolute Konvergenz für eine und damit für jede Abzählung  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ .

Die erste Aussage folgt aus dem Umordnungssatz. Die zweite Aussage bedarf eines Beweises, der implizit auch im Skriptum verwendet wird: Nehmen wir zuerst die absolute Konvergenz für eine Abzählung an, dann folgt sie für jede und damit auch die "lexikographische Abzählung"

$$\sum_{m=0}^M \left( \sum_{n=0}^{M+N} |a_{mn}| \right) \leq \sum_{m,n \geq 0} |a_{mn}|$$

für jedes  $M, N \geq 0$ . Die Ungleichung gilt folglich auch im Limes  $N \rightarrow \infty$ . Mit der Eigenschaft

$$\sum_{m=0}^M \left( \sum_{n=0}^M |a_{mn}| \right) \leq \sum_{m=0}^M \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| \right) \leq \sum_{m,n \geq 0} |a_{mn}|$$

und  $\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^M (\sum_{n=0}^M |a_{mn}|) = \sum_{m,n \geq 0} |a_{mn}|$  folgt dann auch die Gleichheit für die Absolutbeträge. Aus dieser Gleichheit folgt aber die Abschätzung

$$\sum_{m=0}^M \left( \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_{mn}| \right) \rightarrow 0$$

für  $M \rightarrow \infty$ , woraus wir die Behauptung schliessen können. Gilt umgekehrt die absolute Konvergenz der iterierten Summe, dann folgt mit obigen Ungleichungen die absolute Konvergenz einer Abzählung und damit jeder Abzählung.

**3.3. Darstellungen von reellen Zahlen.** Ein einfaches und interessantes Beispiel für unendliche Reihen sind  $b$ -adische Entwicklungen zu einer natürlichen Zahl  $b \geq 2$ : wir schauen uns hier nur die Nachkommaentwicklung an, die Vorkommaentwicklung ist analog. Sei  $(z_n)_{n \geq 0}$  eine Folge von Zahlen, wobei  $z_0 \in \mathbb{Z}$  und  $z_i \in \{0, \dots, b-1\}$ , für  $i \geq 1$ , dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z_n}{b^n}$$

absolut gegen eine reelle Zahl  $a$ . Diese Zahl schreiben wir häufig als  $z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$ . Als ersten Schritt beweisen wir, dass es zu jeder Zahl  $a \in \mathbb{R}$  eine Reihe obiger Bauart gibt, dann zeigen wir die Eindeutigkeit. Auf praktisch relevante Darstellungen gehen wir hier nicht ein (Aufrunden, Periodizitäten, etc). Sei  $a \in \mathbb{R}$ , dann existiert genau eine Zahl  $z_0 \in \mathbb{Z}$ , sodass

$$z_0 < a \leq z_0 + 1.$$

Weiters verfahren wir mit Rekursion. Seien Zahlen  $z_0, \dots, z_n$ , mit  $z_i \in \{0, \dots, b-1\}$ , für  $1 \leq i \leq n$ , für ein  $n \geq 0$ , konstruiert, dann existiert genau eine Zahl  $z_{n+1} \in \{0, \dots, b-1\}$  sodass

$$z_{n+1} < b^{n+1} \left( a - \sum_{i=0}^n \frac{z_i}{b^i} \right) \leq z_{n+1} + 1$$

gilt. Das folgt aus der Multiplikation von

$$0 < b^n \left( a - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i}{b^i} \right) - z_n \leq 1,$$

mit  $b$ , wobei die Gleichung ja nach Konstruktion gilt.

Damit erhält man eine Kandidatenfolge  $(z_n)_{n \geq 0}$ , die aber offensichtlich den gewünschten Job tut, denn

$$\frac{z_n}{b^n} < \left( a - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i}{b^i} \right) \leq \frac{z_n + 1}{b^n},$$

für  $n \geq 0$  gilt, woraus die Konvergenz unmittelbar folgt.

Die Eindeutigkeit der Darstellung gilt aus folgendem Grund. Seien  $z_0, z_1 z_2 \dots$  und  $x_0, x_1 x_2 \dots$  zwei Darstellungen der selben reellen Zahl  $a$ , dann gibt es ein kleinstes  $m \geq 0$ , wo beide Darstellungen das erste Mal verschieden sind, sagen wir  $z_m < z_m + 1 \leq x_m$ . Folglich gilt

$$\begin{aligned} a = z_0, z_1 z_2 \dots &\leq z_0, z_1 \dots z_m (b-1)(b-1) \dots \\ &\leq z_0, z_1 \dots (z_m + 1) 0 \dots \leq x_0, x_1 \dots x_m 0 \dots < x_0, x_1 x_2 \dots = a, \end{aligned}$$

da nicht alle  $x_i$  für  $i \geq m$  gleich 0 sein können. Folglich die Eindeutigkeit.

**3.4. Produktdarstellung der Exponentialfunktion.** Ein weiterer interessanter und bedeutender Satz ist die Produktdarstellung der Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n,$$

die wir hier in einer etwas allgemeineren Form wiedergeben. Sei  $c : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung mit gemeinsam mit Konstanten  $M \leq 0$ ,  $\delta > 0$ , sodass

$$|\exp(tz) - c(t)| \leq Mt^2$$

für  $0 \leq t \leq \delta$  gilt. Dann folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c\left(\frac{1}{n}\right)^n = \exp(z).$$

Der Beweis folgt aus dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} \left| \exp(z) - c\left(\frac{1}{n}\right)^n \right| &\leq \left| \left( \exp\left(\frac{z}{n}\right) \right)^n - c\left(\frac{1}{n}\right)^n \right| \\ &\leq \left| \left( \exp\left(\frac{z}{n}\right) \right) - c\left(\frac{1}{n}\right) \right| \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left( \exp\left(\frac{z}{n}\right) \right)^k c\left(\frac{1}{n}\right)^{n-k-1} \right| \end{aligned}$$

Das folgt aus der Formel für Differenzen von Produkten komplexer Zahlen

$$a_1 \dots a_n - b_1 \dots b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_1 \dots a_k (a_{k+1} - b_{k+1}) b_{k+2} \dots b_n,$$

die aus einem Teleskopsummenargument folgt.

Es gilt nun zwei Ungleichungen zu zeigen: die erste ist ausserordentlich einfach, nämlich

$$\left| \exp\left(\frac{kz}{n}\right) \right| \leq \exp(|z|)$$

für  $z \in \mathbb{C}$  und  $1 \leq k \leq n$ . Die zweite ist etwas schwieriger, nämlich

$$\left| c\left(\frac{1}{n}\right)^{n-k-1} \right| \leq \left| \exp\left(\frac{|z|}{n}\right) + M \frac{1}{n^2} \right|^{n-k-1} \leq \exp(|z| + M),$$

da

$$\exp\left(\frac{|z|}{n}\right) + M \frac{1}{n^2} \leq \exp\left(\frac{|z|}{n}\right) \left(1 + \frac{M}{n}\right) \leq \exp\left(\frac{|z| + M}{n}\right),$$

was für  $z \in \mathbb{C}$  und  $1 \leq k \leq n$  gilt. Folglich gilt

$$\left| \exp(z) - c\left(\frac{1}{n}\right)^n \right| \leq \frac{M}{n^2} \times n \times \exp(|z|) \exp(|z| + M),$$

was für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert.

Interessante Beispiele für  $c$  sind  $c(t) := 1 + tz$  oder  $c(t) = \frac{1}{1-tz}$ .

#### 4. TOPOLOGISCHE GRUNDBEGRIFFE

Im Bereich der Topologie hantieren wir das erste Mal mit abstrakten Mengen und Mengensystemen. Dafür benötigt man häufig eine Aussage, die man als Auswahlaxiom bezeichnet und auf die wir hier kurz eingehen möchten. Das Auswahlaxiom wird oft mit AC abgekürzt bezeichnet, was für Axiom of choice steht. Das Auswahlaxiom ist unabhängig von den bisherigen Axiomen der Mengenlehre und ist für den Aufbau der Mathematik wichtig – wenn man darauf verzichtet, dann gibt es eine Reihe (nicht konstruktiver) Resultate, die nicht bewiesen werden können.

**4.1. Auswahlaxiom.** Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von nicht leeren Mengen, das heißt eine Abbildung  $f : I \rightarrow Y$  von einer Indexmenge  $I$  in eine Menge von Mengen  $Y$  mit  $f(i) = X_i \neq \emptyset$  für  $i \in I$ . Das Auswahlaxiom postuliert, dass es dann auch eine Abbildung  $g : I \rightarrow \cup_{i \in I} X_i$  gibt, sodass  $g(i) \in X_i$  gilt. Mit anderen Worten, dass es eine Familie  $(x_i)_{i \in I}$  gibt mit  $x_i \in X_i$  für  $i \in I$ .

Dieses Axiom hat weitreichende Folgen auch wenn seine Formulierung auf den ersten Blick harmlos erscheint. Das Auswahlaxiom ist äquivalent zum Faktum, dass jede beliebige Menge mit einer Wohlordnung ausgestattet werden kann, zum Zornschen Lemma, zum Satz von Tychonoff, und vielen anderen bedeutenden Existenzaussagen der Mathematik. Seltsame Paradoxien lassen sich aus dem Auswahlaxiom herleiten (sind aber oft nicht dazu äquivalent). Die Aussage des Auswahlaxioms ist ihrem Charakter nach nicht konstruktiv, das heißt die Existenz der Auswahlabbildung (oder anderer Strukturen) ist auf keine Art und Weise mit einer Konstruktion verbunden.

#### 5. STETIGKEIT

**5.1. Die Eulersche Formel.** Zusätzlich zum Skriptum interessieren wir uns für elementare Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen: sei  $z \in \mathbb{C}$  eine komplexe Zahl, dann definiert

$$\exp(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

den Wert der Exponentialfunktion als Wert der Potenzreihe. Wenn wir  $z = i\phi$ , eine rein imaginäre Zahl, einsetzen, dann erhalten wir die Definition von Sinus und Kosinus:

$$\exp(i\phi) = \cos(\phi) + i \sin(\phi),$$

was zu den Reihendarstellungen

$$\cos(\phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!} (-1)^j$$

und

$$\sin(\phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} (-1)^j$$

führt. Elementare Eigenschaften sind in folgendem Lemma zusammengefasst:

**Lemma 5.1.** *Für alle  $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$  gilt:*

- (1)  $\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 = 1$ .
- (2)  $\cos(\phi_1 + \phi_2) = \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)$ .
- (3)  $\sin(\phi_1 + \phi_2) = \sin(\phi_1)\cos(\phi_2) + \cos(\phi_1)\sin(\phi_2)$ .
- (4) *Es existiert eine Zahl  $\pi > 0$ , sodass  $\frac{\pi}{2}$  die kleinste positive Nullstelle von  $\cos$  ist. Weiters gilt  $\exp(2\pi i) = 1$  und damit die Periodizität der Exponentialfunktion  $\exp(i\phi + i2\pi k) = \exp(i\phi)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus dem Additionstheorem mit

$$1 = \exp(i\phi)\exp(-i\phi) = \exp(i\phi)\overline{\exp(i\phi)} = |\exp(i\phi)|.$$

Die zweite und dritte Aussage kann man direkt aus dem Additionstheorem  $\exp(i\phi_1 + i\phi_2) = \exp(i\phi_1)\exp(i\phi_2)$  ablesen, indem man entsprechend Real- und Imaginärteil interpretiert.

Die vierte Aussage benötigt etwas mehr Zeit: Sei  $M$  die Menge der positiven Nullstellen von  $\cos$ , dann ist  $M$  aufgrund der Stetigkeit von  $\cos$  abgeschlossen (für jede konvergente Folge von Nullstellen  $(y_k)$  gilt,  $0 = \cos(y_k) \rightarrow \cos(y_0)$ , also ist auch der Limes  $y_0$  eine Nullstelle). Aufgrund des Faktums  $\cos(2) < 0$  und des Zwischenwertsatzes gilt ausserdem  $M \neq \emptyset$ . Damit ist das Infimum ein Minimum und eine wohldefinierte positive Zahl. Wir bezeichnen diese Zahl mit  $\frac{\pi}{2}$ . Offensichtlich gilt  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ , womit zwangsläufig aufgrund von 1. gilt, dass  $\sin(\frac{\pi}{2}) = \pm 1$ . Nehmen wir an, dass  $\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$ , dann muss es aber ein positives Maximum von  $\sin$  auf dem Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$  an einer Stelle  $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$  geben, da  $\sin(\phi) > \phi(1 - \phi^2/6) > 0$  für  $0 < \phi \leq 1$ . An  $x_1$  gilt aber folgende Überlegung.

$$\frac{\sin(x_1 + h) - \sin(x_1)}{h} = \sin(x_1) \frac{(\cos(h) - 1)}{h} + \cos(x_1) \frac{\sin(h)}{h} \rightarrow \cos(x_1)$$

falls  $h \rightarrow 0$  mit  $h \neq 0$ . Da an  $x_1$  aber ein Maximum vorliegt, gilt bei Konvergenz von links  $\cos(x_1) \geq 0$ , und bei Konvergenz von rechts  $\cos(x_1) \leq 0$ . Damit aber  $\cos(x_1) = 0$ . Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass  $\frac{\pi}{2}$  die kleinste positive Nullstelle ist. Deshalb gilt  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$  und weiters

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i, \exp(i\pi) = -1, \exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right) = -i, \exp(i2\pi) = 1.$$

□

Ausgestattet mit diesen Aussagen ist es leicht zu zeigen, dass  $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  eine streng monoton steigende Funktion, damit also bijektiv aufgrund der Stetigkeit. Offenbar gilt  $\sin(-\pi/2) = \sin(3\pi/2) = -1$  und  $\sin(\pi/2) = 1$ . Wenn wir annehmen, dass diese Funktion nicht streng monoton steigend ist, dann gibt es eine Zahl  $x$  und eine Folge  $h_k \rightarrow 0$  mit  $h_k > 0$ ,  $x + h_k \leq \pi/2$ , für  $k \geq 0$ , sodass

$\sin(x + h_k) \leq \sin(x)$ , für  $k \geq 0$ , oder eine Folge  $h_k \rightarrow 0$  mit  $h_k < 0$ ,  $-\pi/2 \leq x + h_k$ , für  $k \geq 0$ , sodass  $\sin(x + h_k) \geq \sin(x)$ , für  $k \geq 0$ . In beiden Fällen folgt aber mit

$$0 \geq \frac{\sin(x + h_k) - \sin(x)}{h_k} \rightarrow \cos(x),$$

dass  $\cos(x) = 0$  gelten muss. Das ist nur am Rande der Fall, wo die Monotoniebedingung aber offensichtlich erfüllt ist.

Damit gelangen wir zum Hauptsatz dieses Abschnittes:

**Theorem 5.2.** *Die Abbildung  $\exp(i \cdot) : [0, 2\pi[ \rightarrow S^1$ ,  $\phi \mapsto \exp(i\phi)$  ist bijektiv.  $S^1$  ist hier die Menge der komplexen Zahlen mit Länge 1.*

*Beweis.* Die Abbildung  $\cos|_{[0, \pi]}$  ist eine bijektive, streng monoton fallend Funktion nach  $[-1, 1]$ , da  $\cos(\phi) = -\sin(\phi - \pi/2)$  gilt. Folglich gibt es zu jeder komplexen Zahl  $z = x + iy \in S^1$  mit  $y \geq 0$  genau eine Zahl  $0 \leq \phi \leq \pi$  mit  $\cos(\phi) = x$  und  $\sin(\phi) = y$ , da  $\sin(\phi) \geq 0$  für  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Die Abbildung  $\cos|_{[\pi, 2\pi]}$  ist eine bijektive, streng monoton steigende Funktion nach  $[-1, 1]$ , da  $\cos(\phi) = \sin(\phi - 3\pi/2)$  gilt. Für  $\pi \leq \phi \leq 2\pi$  ist der Sinus aber nicht positiv und damit können wir  $x + iy$  mit  $y \leq 0$  darstellen. Die Punkte  $\pm 1$  sind ebenso eindeutig dargestellt, da ja  $2\pi$  aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen wurde.  $\square$

Dieses fundamentale Resultat führt zur Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen: für jede komplexe Zahl  $z \neq 0$  existiert ein Radius  $r > 0$  und ein "Winkel"  $0 \leq \phi < 2\pi$  mit  $z = r \exp(i\phi)$ . Mit der Polarkoordinatendarstellung lassen sich viele Sachverhalte in komplexer Arithmetik bequem ausdrücken.

**5.2. Das Gesetz der grossen Zahlen und der Weierstrasssche Approximationssatz.** Zentral ist am Ende des Kapitels die Approximierbarkeit einer stetigen Funktion auf  $[0, 1]$  durch Polynome. Wir präsentieren hier einen Beweis, der vom Beweis im Skriptum verschieden ist, und der eine praktische Relevanz aufweist (e.g. CAD). En passant beweisen wir dabei auch das schwache Gesetz der grossen Zahlen. Wir teilen den Beweis in mehrere Schritte:

*Beweis.* Zuerst zeigen wir folgende Aussage: sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt am  $\mathbb{R}^N$  und  $Y_1, \dots, Y_n$  eine endliche Folge von Vektoren mit

$$\langle Y_i, Y_j \rangle = 0 \text{ falls } i \neq j \text{ und } \langle Y_i, Y_i \rangle = \sigma^2 \geq 0$$

für  $0 \leq i, j \leq n$ . Dieses Skalarprodukt definiert natürlich eine Norm  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Dann gilt dass der Abstand des *arithmetischen Mittels*  $\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$  von der 0 durch  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  gegeben ist. Der Beweis ist eine einfache Anwendung des Satzes von Pythagoras, i.e. der Orthogonalität der Vektoren, denn es gilt

$$(5.1) \quad \left( \left\| \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \right\| \right)^2 = \frac{1}{n^2} \langle Y_1 + \dots + Y_n, Y_1 + \dots + Y_n \rangle$$

$$(5.2) \quad = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \langle Y_i, Y_j \rangle = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Diese Aussage wenden wir auf folgende Situation an, wobei wir die Semantik der Wahrscheinlichkeitstheorie verwenden. Hier erkennt man dass abstrakte Konzepte auf allen möglichen Bereiche angewandt werden können, zum Beispiel kann man so die Anschauung der Geometrie in die Wahrscheinlichkeitstheorie übertragen,

und umgekehrt. Betrachten wir erneut  $\mathbb{R}^N$  und eine endliche Folge positiver Zahlen  $p_0, \dots, p_N$  mit  $\sum_{\omega=0}^N p_\omega = 1$ . Dann können wir ein Skalarprodukt definieren, nämlich

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{\omega=0}^N p_\omega X(\omega) Y(\omega),$$

für Vektoren  $X, Y \in \mathbb{R}^N$ . Beachte dass wir hier die Koordinaten der Vektors  $X$  mit  $X(\omega)$  schreiben, wobei  $\omega$  der Index ist. Diese Auffassung eines Vektors als Funktion  $\omega \mapsto X(\omega)$  bedeutet natürlich auch, dass wir mit konstanten Funktionen rechnen können und das tun wir auch ab jetzt: der Vektor  $X - \mu$ , wobei  $\mu$  eine Zahl ist, ist durch die Koordinaten  $X(\omega) - \mu$  gegeben, für  $\omega = 0, \dots, N$ . Die Vektoren nennen wir ab jetzt auch nicht mehr Vektoren, sondern Zufallsvariablen. Seien nun Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gegeben mit immer gleichem Erwartungswert

$$E[X_i] := \sum_{\omega=0}^N p_\omega X_i(\omega) = \mu$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Weiters gelte, dass die Korrelationen verschwinden, das heisst

$$E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] := \sum_{\omega=0}^N p_\omega (X_i(\omega) - \mu)(X_j(\omega) - \mu) = 0$$

falls  $i \neq j$  und die Varianzen sind konstant, i.e.

$$E[(X_i - \mu)^2] := \sum_{\omega=0}^N p_\omega (X_i(\omega) - \mu)^2 = \sigma^2.$$

Dann können wir die zuvor bewiesene Aussage direkt auf  $Y_i := X_i - \mu$  für  $i = 1, \dots, n$  anwenden. Aufgrund der Varianzaussage gilt

$$\|Y_i\| = \sigma$$

und aufgrund der Korrelationsaussage gilt

$$\langle Y_i, Y_j \rangle = 0$$

falls  $i \neq j$ . Dann aber gilt

$$\left( \left\| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right\| \right)^2 = \left( \left\| \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \right\| \right)^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

das arithmetische Mittel der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  konzentriert sich also an  $\mu$ , dem Erwartungswert der einzelnen Variablen. Diese sehr bekannte Aussage heisst *schwaches Gesetz der grossen Zahlen* und hat eine weitreichende Bedeutung in Theorie und Anwendung.

Konstruieren wir nun ein konkretes Beispiel mit konkreten Zufallsvariablen und einer konkreten Wahl des Skalarproduktes. Wir wählen  $n \geq 1$  und definieren  $\Omega$  die Menge der Folgen  $(\omega(1), \dots, \omega(n))$  wobei jedes  $\omega(i) \in \{0, 1\}$  liegt. Das kann man auch auffassen als ein Schreiben der Indizes im Binärsystem beginnend mit  $0 \dots 0$ ,  $0 \dots 01$ , etc. Sei  $0 < p < 1$ , dann definieren wir

$$p_\omega = p^{\#\{k \mid \omega(k)=1\}} (1-p)^{\#\{l \mid \omega(l)=0\}} > 0,$$

wobei die Hochzahl die Anzahl der Elemente im Vektor  $\omega$  zählt die 1 oder 0 sind.

Die Zufallsvariablen  $X_i$  sind wie folgt koordinatenweise definiert:

$$X_i(\omega) := 1 \text{ falls } \omega(i) = 1, \quad X_i(\omega) := 0 \text{ falls } \omega(i) = 0$$

für  $i = 1, \dots, n$  und  $\omega \in \Omega$ . Das heisst der Wert der Zufallsvariable  $X_i$  hängt nur von der  $i$ -ten Stelle der Binärzahl  $\omega$  ab.

Wir müssen nun eine Reihe von Aussagen beweisen um die vorherigen Überlegungen anwenden zu können. Zuerst zeigen wir dass  $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ . Das gilt aber aufgrund folgender Identitäten

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega &= \sum_{\omega \in \Omega} p^{\#\{k \mid \omega(k)=1\}} (1-p)^{\#\{l \mid \omega(l)=0\}} \\
&= \sum_{\omega(1) \in \{0,1\}} \dots \sum_{\omega(n) \in \{0,1\}} p^{\#\{k \mid \omega(k)=1\}} (1-p)^{\#\{l \mid \omega(l)=0\}} \\
&= \sum_{\omega(1) \in \{0,1\}} \dots \sum_{\omega(n) \in \{0,1\}} (p1_{\omega(1)=1} + (1-p)1_{\omega(1)=0}) \dots (p1_{\omega(n)=1} + (1-p)1_{\omega(n)=0}) \\
&= (p + (1-p))^n = 1.
\end{aligned}$$

Wir verwenden hier die Notation  $1_{\omega(i)=1} = 1$  falls  $\omega(i) = 1$  gilt und  $1_{\omega(i)=1} = 0$  falls  $\omega(i) = 0$  gilt. Die Funktion  $1_{\cdot(i)=1}$  testet sozusagen für jedes  $\omega$ , das eingesetzt wird, ob an der Stelle  $i$  eine 1 steht oder nicht. Damit gelingt es das Produkt

$$p^{\#\{k \mid \omega(k)=1\}} (1-p)^{\#\{l \mid \omega(l)=0\}}$$

in den identischen Ausdruck

$$(p1_{\omega(1)=1} + (1-p)1_{\omega(1)=0}) \dots (p1_{\omega(n)=1} + (1-p)1_{\omega(n)=0})$$

umzuformen. Dieser Ausdruck aber kann mit dem Ausmultiplizieren eines Binoms hoch  $n$  in Zusammenhang gebracht werden. Die letzte Gleichung folgt nämlich aus der Tatsache, dass das direkte Ausmultiplizieren des Ausdruckes  $(p + (1-p))^n$  zu einer Summe von Produkten führt, wobei es für jedes  $\omega \in \Omega$  genau einen Summanden gibt.  $\omega$  gibt dann an, ob man an der  $i$ -ten Stelle ein  $p$  (entspricht der 1) oder ein  $1-p$  (entspricht der 0) im Produkt hat.

Analog können wir die Aussage  $E[X_i] = p$  beweisen.

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega X_i(\omega) &= \sum_{\omega \in \Omega} X_i(\omega) p^{\#\{k \mid \omega(k)=1\}} (1-p)^{\#\{l \mid \omega(l)=0\}} \\
&= \sum_{\omega(i) \in \{0,1\}} \dots \sum_{\omega(n) \in \{0,1\}} X_i(\omega) p^{\#\{k \mid \omega(k)=1\}} (1-p)^{\#\{l \mid \omega(l)=0\}} \\
&= \sum_{\omega(i) \in \{0,1\}} \dots \sum_{\omega(n) \in \{0,1\}} X_i(\omega) \times \\
&\quad \times (p1_{\omega(i)=1} + (1-p)1_{\omega(i)=0}) (p1_{\omega(1)=1} + (1-p)1_{\omega(1)=0}) \dots (p1_{\omega(n)=1} + (1-p)1_{\omega(n)=0}) \\
&= \sum_{\omega(i) \in \{0,1\}} X_i(\omega) (p1_{\omega(i)=1} + (1-p)1_{\omega(i)=0}) \times \\
&\quad \times \left( \sum_{\omega(1) \in \{0,1\}} \dots \sum_{\omega(n) \in \{0,1\}} (p1_{\omega(1)=1} + (1-p)1_{\omega(1)=0}) \dots (p1_{\omega(n)=1} + (1-p)1_{\omega(n)=0}) \right) \\
&= \sum_{\omega(i) \in \{0,1\}} X_i(\omega) (p1_{\omega(i)=1} + (1-p)1_{\omega(i)=0}) \\
&= 1p + 0(1-p) = p
\end{aligned}$$

Als dritte Aussage beweisen mit der obigen Summationstechnik dass

$$E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] := \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega (X_i(\omega) - \mu)(X_j(\omega) - \mu) = 0$$

falls  $i \neq j$  und die Varianzen sind konstant, i.e.

$$E[(X_i - \mu)^2] := \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega (X_i(\omega) - \mu)^2 = p - p^2.$$

Ganz analog können wir die Summation über die Indizes  $i, j$  vornehmen und alles von  $i, j$  abhängige herausheben. Die restlichen Terme ergeben jeweils 1 und wir landen bei einer Summe von vier Elementen für  $i \neq j$  und von zwei Elementen für  $i = j$ , nämlich jeweils

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega(i) \in \{0,1\}} \sum_{\omega(j) \in \{0,1\}} (X_i(\omega) - p)(X_j(\omega) - p) \times \\ & \times (p1_{\omega(i)=1} + (1-p)1_{\omega(i)=0})(p1_{\omega(j)=1} + (1-p)1_{\omega(j)=0}) \\ & = (0-p)(0-p)(1-p)^2 + (0-p)(1-p)(1-p)p + \\ & + (1-p)(0-p)p(1-p) + (1-p)(1-p)p^2 = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega(i) \in \{0,1\}} (X_i(\omega) - p)^2 (p1_{\omega(i)=1} + (1-p)1_{\omega(i)=0}) \\ & = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2p = p - p^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Aussage, dass obiges geometrische Theorem für diesen Spezialfall anwendbar ist. Dieser Spezialfall führt aber direkt zu den Bernsteinpolynomen, die wie folgt definiert sind: sei  $f \in C^0([0,1])$  eine stetige Funktion, dann ist das Bernsteinpolynom der Ordnung  $n$  zu  $f$  definiert als

$$B_n(f)(p) := E \left[ f \left( \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right) \right]$$

Dazu müssen wir zuerst zeigen, dass dieser Ausdruck tatsächlich ein Polynom in  $p$  ist. Das folgt aber unmittelbar aus der Definition des Erwartungswertes, denn

$$\begin{aligned} B_n(f)(p) &= E \left[ f \left( \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right) \right] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} f \left( \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} \right) p^{\#\{k \mid \omega(k)=1\}} (1-p)^{\#\{l \mid \omega(l)=0\}} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} f \left( \frac{\#\{k \mid \omega(k)=1\}}{n} \right) p^{\#\{k \mid \omega(k)=1\}} (1-p)^{\#\{l \mid \omega(l)=0\}} \\ &= \sum_{i=0}^n f \left( \frac{i}{n} \right) \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}. \end{aligned}$$

Am Ende bleibt uns zu zeigen, dass  $B_n(f)$  tatsächlich für grosse  $n$  die Funktion  $f$  gleichmässig approximiert. Wir erwarten diese Aussage, da das arithmetische Mittel  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  mit hoher Wahrscheinlichkeit den Wert  $p$  annimmt. Sei  $\epsilon > 0$ ,

dann existiert ein  $\delta > 0$  sodass für alle  $x \in [0, 1]$  gilt:  $|x - y| < \delta$  impliziert  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ . Wir definieren nun zwei Mengen  $A, B \subset \Omega$ .

$$A := \left\{ \omega \in \Omega \mid \left| \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} - p \right| < \delta \right\}$$

und

$$B := \left\{ \omega \in \Omega \mid \left| \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} - p \right| \geq \delta \right\}.$$

Dann gilt aber

$$\begin{aligned} |f(p) - B_n(f)(p)| &\leq \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \left| f\left(\frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n}\right) - f(p) \right| \\ &= \sum_{\omega \in A} p_\omega \left| f\left(\frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n}\right) - f(p) \right| + \sum_{\omega \in B} p_\omega \left| f\left(\frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n}\right) - f(p) \right| \\ &< \sum_{\omega \in A} p_\omega \epsilon + \sum_{\omega \in B} p_\omega 2 \|f\|_\infty \\ &\leq \epsilon + \sum_{\omega \in B} p_\omega \frac{\left| \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} - p \right|^2}{\delta^2} 2 \|f\|_\infty \\ &\leq \epsilon + \frac{\left( \left\| \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} - p \right\| \right)^2}{\delta^2} 2 \|f\|_\infty \\ &\leq \epsilon + \frac{p - p^2}{n\delta^2} 2 \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

woraus wir das Resultat folgern können, denn für grosse  $n$  wird der zweite Ausdruck klein und  $p \in [0, 1]$ .

**5.3. Irrationalität von  $\pi$  und Dichtheit von  $\{\exp(in)\}_{n \geq 0}$  in  $S^1$ .** Wir zeigen zuerst dass  $\pi$  eine irrationale Zahl. Interessanterweise ist der angegebene Beweis relativ jung aus historischer Perspektive, insbesondere wenn man die Bedeutung der Fragestellung bedenkt. Der Beweis ist indirekt. Nehmen wir an  $\pi = p/q$  für positive natürliche Zahlen  $p, q \geq 1$ , dann ist das Polynom

$$f_n(x) = x^n(p - qx)^n$$

ein Polynom vom Grad  $2n$ , für  $n \geq 1$ , mit Nullstellen  $0$  und  $\pi$ . Aus  $f_n$  kann man ein Polynom  $g_n$  bilden via

$$g_n = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i f_n^{(2i)},$$

sodass gilt  $g_n'' + g_n = f$ . Damit erhält man aber sofort, dass  $h_n = g_n' \sin - g_n \cos$  die Eigenschaft  $h_n' = f \sin$  erfüllt. Damit folgt aber mit dem Mittelwertsatz, dass es ein  $x_0 \in ]0, \pi[$  gibt mit

$$0 < f(x_0) \sin(x_0) = \frac{h_n(\pi) - h_n(0)}{\pi} = \frac{g_n(\pi) + g_n(0)}{\pi}.$$

Da  $f_n(\pi - x) = f_n(-x)$  für  $x \in \mathbb{R}$  gilt, und  $g_n(0) \in \mathbb{Z}$ , erhalten wir aber überraschenderweise, dass

$$1 \leq g_n(\pi) + g_n(0) \leq \pi \frac{\pi^n p^n}{n!},$$

was aber nicht für jedes  $n \geq 1$  stimmen kann. Also ein Widerspruch.

Aus dieser bedeutenden Aussage kann man nun mit einfachen Mitteln folgern, dass die Abbildung  $n \mapsto \exp(in)$ , für  $n \in \mathbb{N}$ , injektiv ist und ein in  $S^1$  dichtes Bild hat. Die Injektivität folgt aus der Irrationalität von  $\pi$ , denn  $\exp(im) = \exp(in)$  genau dann wenn  $m - n \in 2\pi\mathbb{Z}$ , was nur für  $m - n = 0$  gehen kann. Das Bild der injektiven Abbildung  $n \mapsto \exp(in)$  muss aber – aufgrund der Kompaktheit von  $S^1$  – einen Häufungspunkt haben, was wiederum bedeutet, dass es für jedes  $\epsilon > 0$  natürliche Zahlen  $k \neq l$  gibt mit  $|\exp(ik) - \exp(il)| < \epsilon$ . In anderen Worten gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $n \neq 0$  sodass  $|\exp(in) - 1| < \epsilon$ . Klarerweise ist die Vereinigung der offenen Bälle  $(B_\epsilon(\exp(inj)))_{j \geq 0}$  aber eine offene Überdeckung von  $S^1$  und so findet man für jedes  $\epsilon > 0$  und jedes  $\phi \in [0, 2\pi[$  eine natürliche Zahl  $j$  mit  $|\exp(inj) - \exp(i\phi)| < \epsilon$ .  $\square$

## 6. DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

Als entscheidende erste wichtige Anwendung der Differentialrechnung sehen wir lineare Differentialgleichungen erster Ordnung:

**6.1. Das Matrixexponential.** Für die Theorie der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung ist das Matrixexponential das entscheidende Hilfsmittel zur allgemeinen Lösung. Sei  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl. Wir verstehen die Menge der Matrizen über dem Zahlkörper  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  als einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n^2$ . Eine Basis dieses Vektorraumes ist durch Matrizen  $E_{ij} = (\delta_{ii'}\delta_{jj'})_{i',j'=1,\dots,n}$ , für  $i, j = 1, \dots, n$  gegeben, wobei  $\delta_{ii'} = 1$  falls  $i = i'$  und 0 sonst, das Kronecker-Delta bezeichnet. Dieser Vektorraum ist mit der Matrizenmultiplikation sogar eine  $\mathbb{K}$ -Algebra, insbesondere gibt es ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation, nämlich

$$\text{id} = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Im folgenden definieren wir die Operatornorm auf  $M_n(\mathbb{K})$  und erhalten eine normierte Algebra. Diese Struktur erlaubt uns die Exponentialmatrix zu definieren. Sei  $A \in M_n(\mathbb{K})$  eine  $n \times n$ -Matrix, dann können wir Elemente aus  $\mathbb{K}^n$  als  $n \times 1$  Matrizen auffassen (“stehende Vektoren”) und die Matrixmultiplikation  $Ax$  ist definiert für  $x \in \mathbb{K}^n$ . Das definiert eine (lineare) Abbildung  $x \mapsto Ax$  auf  $\mathbb{K}^n$  mit Werten in  $\mathbb{K}^n$ . Die Norm der Matrix  $A$  ist dann das Supremum der Abbildung  $x \mapsto \|Ax\|$  auf dem Einheitsball, das heisst

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Da die Abbildung  $x \mapsto Ax$  stetig auf  $\mathbb{K}^n$  ist, ist das Supremum ein Maximum und insbesondere endlich. Die so definierte nicht negative reelle Zahl heisst Matrixnorm ist und ist insbesondere eine Norm: es gilt naheliegenderweise  $\|A\| = 0$  genau dann wenn  $A = 0$ . Ebenso  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  und  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$  für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ . Ausserdem gilt folgende Ungleichung für alle  $x \in \mathbb{K}^n$ ,

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|,$$

indem man die Gleichung durch  $\|x\|$  dividiert falls  $x \neq 0$  und damit die Definition erhält.

Zentral ist folgende Ungleichung, die  $M_n(\mathbb{K})$  gemeinsam mit der Operatornorm zu einer normierten Algebra macht:

**Lemma 6.1.** Für  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  gilt:  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

Der Beweis folgt aus folgender Ungleichung,

$$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|,$$

die für alle  $x \in \mathbb{K}^n$  gilt.

Damit können wir das Matrixexponential definieren:

**Theorem 6.2.** *Die Abbildung  $\exp : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K})$  mit*

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

*ist stetig. Es gilt weiters  $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$  für alle  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Die Reihe konvergiert absolut bezüglich der Operatornorm und es gilt*

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp(tA)A$$

*für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .*

*Beweis.* Sei  $A \in M_n(\mathbb{K})$  fix, dann gilt

$$\left\| \sum_{i=m}^m \frac{A^i}{i!} \right\| \leq \sum_{i=m}^m \frac{\|A^i\|}{i!} \leq \sum_{i=m}^m \frac{\|A\|^i}{i!} \rightarrow 0$$

für  $m, n \rightarrow \infty$  aufgrund der Konvergenz von  $\exp(\|A\|)$ . Insbesondere folgt die behauptete Ungleichung sofort. Wenn man die Reihe auf der Menge  $\{A \mid \|A\| \leq \rho\}$  betrachtet, dann handelt es sich um eine gleichmässig konvergente Reihe von *stetigen* Funktionen  $A \mapsto f_i(A) := \frac{A^i}{i!}$ , da

$$\left\| \sum_{i=m}^n f_i(A) \right\| \leq \sum_{i=m}^n \frac{\|A\|^i}{i!} \rightarrow 0$$

für  $m, n \rightarrow \infty$ . Mit der Gleichmässigkeit folgt aber die Stetigkeit. Schliesslich kann die Potenzreihe

$$t \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} t^i \frac{A^i}{i!}$$

gliedweise differenziert werden mit der entsprechenden Regel für die Ableitung.  $\square$

**6.2. Jordansche Normalform.** Wenn man die Frage nach der Berechnung eines allgemeinen Matrixexponentials stellt, dann kann man probieren die Frage durch Transformationen auf Normalformen zu lösen. Dazu benötigt man Wissen über das Verhalten der Exponentialabbildung unter Transformationen und man benötigt Wissen über die erreichbaren Normalformen bei allgemeinen Matrizen. Diese Fragestellung wird in aller Allgemeinheit in der linearen Algebra behandelt. Trotzdem geben wir hier mehrere analytische Techniken an, wie man zu Jordanschen Normalformen kommt, sozusagen als Anwendung der analytischen Theorie auf lineare Abbildungen.

Zuerst behandeln wir das Verhalten der Exponentialmatrix unter Transformationen:

**Lemma 6.3.** *Sei  $A \in M_n(\mathbb{K})$  und  $T \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , dann gilt*

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1} \exp(A)T.$$

*Beweis.* Da  $(T^{-1}AT)^i = T^{-1}A^i T$  für alle  $i \geq 0$  gilt, folgt mit der Stetigkeit der Matrixmultiplikation die Aussage.  $\square$

Es genügt also für eine gegebene Matrix  $A$  eine invertierbare Matrix  $T$  zu finden sodass  $T^{-1}AT$  von möglichst einfacher Form ist. Machen wir dazu zuerst eine analytische Überlegung: sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  eine beliebige *symmetrische* Matrix, das heisst  $a_{ij} = a_{ji}$  für  $i, j = 1, \dots, n$ .

- (1) Nehmen wir  $\mathbb{K}^n$  mit der euklidischen Norm und betrachten die Funktion  $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ . Diese Funktion ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.
- (2) Auf  $S^{n-1}$  hat diese Funktion zumindest ein Maximum an der Stelle  $x_1 \in S^{n-1}$ .
- (3) Nehmen wir eine glatte Kurve  $c : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S^{n-1}$  mit  $c(0) = x_1$  und  $c'(0) = v$  mit  $\langle v, x_1 \rangle = 0$  und testen das Maximum aus. Solche Kurven gibt es: nimm zum Beispiel eine schiefsymmetrische Matrix  $M$  mit  $Mx_1 = v$  und betrachte  $c(t) = \exp(tM)x_1$ , zum Beispiel  $M = v\langle x_1, \cdot \rangle - x_1\langle v, \cdot \rangle$ . Aus der Kriterium, dass die erste Ableitung an  $x_1$  verschwindet, folgt dann aber

$$\langle x_1, Av \rangle + \langle v, Ax_1 \rangle = 0,$$

also  $\langle Ax_1, v \rangle = 0$  für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\langle v, x_1 \rangle = 0$ .

- (4) Diese letzte Aussage impliziert aber dass es ein  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  gibt sodass  $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ , also ist  $x_1$  ein *Eigenvektor* von  $A$  mit *Eigenwert*  $\lambda$ .
- (5) Diesen Vorgang können wir fortsetzen indem wir die Abbildung  $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$  auf

$$S^{n-1} \cap \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x_1, y \rangle = 0\}$$

einschränken und dort eine analoge Überlegung anstellen.

- (6) Das führt zu einer Folge von Vektoren  $x_1, \dots, x_n \in S^{n-1}$  mit Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  und  $Ax_i = \lambda_i x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  und  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$  für  $i, j = 1, \dots, n$ . Diese Relation ist aber nichts anderes als

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit der invertierbaren Matrix  $T := (x_1, \dots, x_n)$ . Insbesondere gilt dass die transponierte Matrix  $T'$  von  $T$  mit der inversen übereinstimmt, das heisst  $T$  ist eine *orthogonale Matrix*.

Folglich sind die Eigenvektoren Kandidaten für eine Basis, auf der die Matrix sich besonders einfach verhält. Das ist richtig, aber noch nicht das Ende der Geschichte, denn im allgemeinen gibt es nicht genug Eigenvektoren zu einer Matrix  $A$  um den gesamten Raum aufzuspannen. Das führt uns zum Begriff des *verallgemeinerten Eigenvektors*, mit dem wir das Normalformproblem lösen werden. Wir setzen hier  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Definition 6.4.** Wir definieren für  $\lambda \in \mathbb{K}$  den Vektorraum

$$V(\lambda) := \cup_{m \geq 0} \text{Kern}((A - \lambda \text{id})^m)$$

und nennen ihn den Raum der verallgemeinerten Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ , falls  $V(\lambda) \neq \{0\}$ .

Offenbar gilt, dass es für jedes  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein eindeutiges  $m(\lambda) \geq 0$  gibt, sodass

$$\text{Kern}((A - \lambda \text{id})^{m(\lambda)}) = V(\lambda)$$

und  $m(\lambda) \geq 0$  die erste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Wir können nun folgendes einfache Lemma beweisen:

**Lemma 6.5.** *Sei  $\lambda \neq \mu$ , dann gilt  $V(\lambda) \cap V(\mu) = \{0\}$ . Weiters gilt  $AV(\lambda) \subset V(\lambda)$  und die Abbildung  $A - \mu \text{id}$  ist auf  $V(\lambda)$  bijektiv für  $\mu \neq \lambda$  (Invarianz und Injektivität).*

*Beweis.* Fixieren wir  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Sei  $v \in V(\lambda)$ ,  $v \neq 0$ , dann gilt  $(A - \lambda \text{id})^{m(\lambda)}v = 0$ , und  $m(\lambda) \geq 1$ , folglich aber auch

$$(A - \lambda \text{id})^{m(\lambda)-1}(A - \lambda \text{id})v = 0,$$

also  $Av - \lambda v \in V(\lambda)$  nach Definition. Damit liegt aber auch  $Av \in V(\lambda)$ .

Als nächstes beantworten wir die Frage ob  $A - \mu \text{id}$  bijektiv auf  $V(\lambda)$  ist, falls  $\mu \neq \lambda$ . Wäre es nicht bijektiv, dann gibt es ein  $0 \neq v \in V(\lambda)$  mit  $(A - \mu \text{id})v = 0$ . Sei  $k \geq 0$  die grösste natürliche Zahl mit  $w = (A - \lambda \text{id})^k v \neq 0$ , dann gilt aber

$$Aw = \lambda w \text{ und } Aw = \mu w,$$

ein Widerspruch. Die zweite Gleichung folgt, da  $A - \mu \text{id}$  mit  $(A - \lambda \text{id})^k$  kommutiert.

Sei  $\mu \neq \lambda$ . Die erste Aussage ist dann eine einfache Folgerung aus der Tatsache, dass  $v \in V(\lambda) \cap V(\mu)$  im Kern einer Abbildung der Form  $(A - \lambda \text{id})^{m(\lambda)}$  liegen muss, die aber auf  $V(\mu)$  bijektiv ist, somit gilt  $v = 0$ .  $\square$

Aus diesem Lemma folgt, dass Vektoren  $v_i \in V(\lambda_i)$  für  $i = 1, \dots, n$ , mit  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , für  $i \neq j$  mit  $v_1 + \dots + v_n = 0$  alle verschwinden müssen.

Offenbar können dann aber nur endlich viele Räume  $V(\lambda) \neq \{0\}$  sein, da es die Vektoren aus  $V(\lambda)$  für verschiedene  $\lambda$  linear unabhängig sein müssen. Die als endlich erkannte Summe aller Vektoren in den  $V(\lambda)$  bezeichnen wir dann mit

$$S := \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V(\lambda).$$

Das führt uns zu einer weiteren wichtigen Frage, nämlich ob  $(A - \lambda \text{id})^m v \in S$  liegen kann, falls  $v \notin S$  und ein  $m \geq 0$ . Nehmen wir einen Vektor  $v \notin S$  und nehmen wir an, dass  $(A - \lambda \text{id})^m v = v_0 \in S$ . Dann gibt es aufgrund der Bijektivitätseigenschaft auf den  $V(\mu)$  für  $\mu \neq \lambda$  zwei Vektoren  $v_1 \in S$  und  $v_2 \in V(\lambda)$  sodass

$$(A - \lambda \text{id})^m v = (A - \lambda \text{id})^m v_1 + v_2$$

woraus aber folgt

$$(A - \lambda \text{id})^{m+m(\lambda)}(v - v_1) = 0,$$

also  $v - v_1 \in V(\lambda)$  nach Definition von  $V(\lambda)$  und somit  $v \in S$ , ein Widerspruch.

Ausgerüstet mit diesen Überlegungen können wir folgende zwei Frage beantworten: erstens, ob sich jeder Vektor als Linearkombination von verallgemeinerten Eigenvektoren schreiben lässt und, zweitens, ob wir die Nilpotenz von  $(A - \lambda \text{id})$  gut verstehen können.

**Theorem 6.6.** *Jeder Vektor lässt sich eindeutig als Summe von verallgemeinerten Eigenvektoren schreiben.*

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass der Vektorraum  $\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V(\lambda)$  aller Summen aus verallgemeinerten Eigenvektoren mit  $\mathbb{K}^n$  übereinstimmt. Nehmen wir an es gäbe  $v \in \mathbb{K}^n$  mit

$$S := v \notin \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V(\lambda).$$

Es muss dann aber jedenfalls einen Index  $n \geq 0$  und Zahlen  $a_0, \dots, a_n, a_n = 1$  geben, sodass

$$a_0 + a_1 Av + \dots + a_n A^n v \in \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V(\lambda),$$

denn sonst könnte man die Dimension des Systems von Vektoren beliebig erhöhen. Das Polynom  $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  hat nun eine Faktorzerlegung  $\prod_{i=1}^k (z - \mu_i)^{r_i}$ , mit  $\mu_i \in \mathbb{K}$  und  $r_i \geq 1$ . Somit gilt

$$\prod_{i=1}^k (A - \mu_i \text{id})^{r_i} v \in \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V(\lambda).$$

Da die Abbildungen  $(A - \mu_i \text{id})^{r_i}$  jeweils den Vektor  $v \notin S$  überführen in einen neuen Vektor  $(A - \mu_i \text{id})^{r_i} v$  erhalten wir einen Widerspruch.

Die Eindeutigkeit folgt sofort dann mit dem vorherigen Lemma.  $\square$

Auf die Nilpotenz möchte ich hier nur kurz eingehen. Man kann sich leicht vorstellen, dass sich aus der Struktur von

$$\text{Kern}((A - \lambda \text{id})^{m(\lambda)}) = V(\lambda)$$

Jordankästchen  $J_i = \lambda \text{id} + N_i$  aufbauen lassen, wobei  $N_i$  eine Matrix mit Nullen ausser in der ersten oberen Nebendiagonalen ist, also die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Nehmen wir einen Vektor

$$v \in \text{Kern}((A - \lambda \text{id})^m) \setminus \text{Kern}((A - \lambda \text{id})^{m-1})$$

für ein  $m \geq 1$ . Dann gilt dass

$$x_m := v, x_2 := (A - \lambda \text{id})v, \dots, x_1 := (A - \lambda \text{id})^{m-1}v$$

linear unabhängig sind und

$$A(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m)(\lambda \text{id} + N)$$

gilt. Insbesondere sieht man, dass die Anzahl der Jordankästchen der geometrischen Vielfachheit entspricht. Die Summe der Dimensionen der Jordankästchen muss der algebraischen Vielfachheit entsprechen aus Gründen der Dimensionalität.

In Dimension  $n = 2$  gibt es nur zwei verschiedene Normalformen, nämlich

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

wobei es im zweiten Fall nur einen Eigenwert  $\lambda_1$  geben kann.

Mit dem Transformationssatz für Matrixexponentiale und der Nilpotenz von  $N$  können nun Matrixexponentiale von allgemeinen Matrizen  $A$  leicht berechnet werden.

**6.3. Das Zweikörperproblem.** Das Zweikörperproblem ist instruktiv für den Umgang mit nicht-linearen Differentialgleichungen, die im Gegensatz zu linearen Differentialgleichungen weder eine allgemeine Lösungsformel erlauben noch Lösungen für alle Zeiten im allgemeinen existieren. Ausserdem ist die Lösung des Zweikörperproblems ein schönes Beispiel für Methoden der Analysis 1 angewandt auf ein kulturgeschichtlich bedeutendes Problem.

Das klassische astronomische Zweikörperproblem befasst sich mit der Bewegung zweier zweier Punktmassen im gegenseitigen Gravitationsfeld. Wir erhalten nach den Newtonschen Gesetzen folgende Differentialgleichungen für die Bewegung der beiden Punktmassen:

$$\ddot{x}_1 = -Gm_2 \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|^3}, \ddot{x}_2 = -Gm_1 \frac{x_2 - x_1}{\|x_1 - x_2\|^3},$$

wobei wir jeweils die Masse des angezogenen Körpers  $m_1$  bzw  $m_2$  auf beiden Seiten gekürzt haben. Als ersten Schritt führen wir neue Koordinaten, nämlich den gegenseitigen Abstand  $q = x_1 - x_2$  und den Schwerpunkt

$$R := (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2).$$

des Systems ein. Glatte Kurven gehen klarerweise durch diese linear Transformation in glatte Kurven über, folglich erhalten wir durch entsprechende Addition der gegebenen Differentialgleichungen

$$\ddot{R} = 0, \ddot{q} = -GM \frac{q}{\|q\|^3},$$

wobei  $M := m_1 + m_2$  die Gesamtmasse bezeichnet. Die gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes ist nichts anderes als der *Impulserhaltungssatz*.

Nun haben wir bereits eine Reduktion der Dimension des Systems erster Ordnung auf 6 Dimensionen durchgeführt. Das verbleibende System entspricht der Bewegung eines Punktes mit Masse  $M$  in einem Gravitationszentralfeld.

Es gilt nun weitere Erhaltungsgrößen zu finden, um die Dimension des Systems weiter zu reduzieren: dazu schreiben wir das System als System erster Ordnung auf  $\Omega := \{(q, p) \in \mathbb{R}^6 \mid q \neq 0\}$

$$\dot{q} = p, \dot{p} = -GM \frac{q}{\|q\|^3}$$

und wir definieren am Phasenraum  $\Omega$  zwei Abbildungen, nämlich die Energie

$$E(q, p) = \frac{|\dot{q}|^2}{2} - \frac{GM}{\|q\|},$$

für  $(q, p) \in \Omega$  und den Drehimpuls

$$L = \dot{q} \times q,$$

für  $(q, p) \in \Omega$ . Beide Funktionen sind entlang der Lösungen der obigen Differentialgleichungen konstant und erlauben eine Reduktion der Dimension des Systems um weitere vier Dimensionen. Das überprüft man leicht durch Nachrechnen.

Man kann also das Koordinatensystem erneut linear transformieren, sodass die Bewegung des Systems in einer mit Polarkoordinaten parametrisierten *Ebene* erfolgt.  $L$  steht nun für die Länge des Drehimpulsvektors, der parallel zur  $z$ -Achse

ist,  $q_x = r \cos(\phi)$ ,  $q_y = r \sin(\phi)$  für  $r > 0$  und  $\phi \in \mathbb{R}$ . Glatte Kurven gehen erneut auf glatte Kurven über und wir erhalten für das neue System

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\ddot{\phi} &= -GM\frac{1}{r^2}, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Gibt man die Werte für die beiden Konstanten der Bewegung  $E$  und  $L \neq 0$  vor, dann kann man die Gleichungen lösen.

Die Idee ist anstatt der Zeit den Winkel als Parametrisierung zu verwenden, was funktioniert falls

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \neq 0$$

Wenn man die Gleichung auf Ableitungen nach  $\phi$  umschreibt, unter Beibehaltung des Funktionszeichens für den Radius (wie es in der Physik üblich ist) dann erhalten wir

$$E = \frac{L^2}{2r^2} \left( \frac{r'^2}{r^2} + 1 \right) - \frac{GM}{r}$$

Die Bahnkurve, die diese Gleichung ist, ist, wenn man die Willkr in der Wahl des Winkels  $\phi$  so ausnutzt, dass die grösste Annäherung an das Zentrum bei  $\phi = 0$  liegt, von der Form

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\phi)},$$

wobei man durch Einsetzen nachrechnen kann, dass fr die beiden Parameter

$$p = \frac{l^2}{GM}$$

und

$$\epsilon^2 = \frac{2EL^2}{G^2M^2} + 1$$

gelten muss. Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts mit numerischer Exzentrizität  $\epsilon$ . Die Rechnung ist auch im Sage-worksheet gravitation.sws implementiert.

Ist die Gesamtenergie negativ, dann ist die Bewegung geschlossen, dh es gibt einen maximalen Abstand  $p/(1 - \epsilon)$  vom Zentrum da  $\epsilon^2 < 1$ . Es handelt es sich bei der Bahn in diesem Fall um eine Ellipse (Kreis), in deren einem Brennpunkt das Zentrum liegt und deren grosse Halbachse  $a = p/(1 - \epsilon)$  ist.

Ist die Gesamtenergie positiv, so ist die Bahn eine Hyperbel mit kleinstem Abstand  $p/(1 + \epsilon)$  vom Zentrum. Der Grenzfall mit Energie  $E = 0$  bzw  $\epsilon = 1$  ist der einer Parabel, deren kleinster Abstand vom Zentrum gerade gleich  $p/2$  ist.

## 7. INTEGRATION

Das Kapitel Integration beschäftigt sich mit Riemannscher Integration und Differentialgleichungen. Integration wurde als “Umkehrung” der Differentiation eingeführt, aber auch als Grenzwert Riemannscher Summen erkannt. Auch wenn die Theorie der Riemannschen Integration einige Fragen offen lässt (Stichwort: Integration jenseits der Stetigkeitsannahmen), so stellt sie doch ein sehr starkes Instrument

dar mit dem viele Erkenntnisse und Methoden der reellen Analysis verstanden werden können: als instruktiv erweist sich dabei der Satz von Taylor und die Herleitung des Integralrestgliedes. Da die in der Vorlesung präsentierte Herleitungstechnik beim mehrdimensionalen Taylorthorem eine grosse Rolle spielen wird, wird der Beweis erst in Sektion 8 gezeigt werden. Hier folgen noch ein paar Bemerkungen zu Differentialgleichungen.

Wir konnten durch Umformulierung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(t) = f(t, u(t)), u(t_0) = u_0$$

mit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  in eine Integralgleichung der Form

$$u(t) = u(0) + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

die Anwendung eines Fixpunktsatzes ermöglichen. Unter geeigneten Annahmen an das *zeitabhängige Vektorfeld*  $f$ , nämlich lokal Lipschitz in  $u$  lokal gleichmässig in der Zeit  $t$ , gelang es dann lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Integralgleichung und damit der Differentialgleichung zu beweisen. Genauer gesagt gibt es zu jedem *Anfangswert*  $u_0$  und zu jedem Anfangszeitpunkt  $t_0$  einen Zeithorizont  $T = T(u_0, t_0)$  sodass für Startwerte  $u_1$  in einer Umgebung von  $u_0$  und Anfangszeitpunkte  $t_1$  in einer Umgebung von  $t_0$  eindeutige  $C^1$ -Lösungen  $u = u(\cdot; u_1, t_1)$  der Differentialgleichung existieren mit  $u(t_1) = u(t_1; u_1, t_1) = u_1$ , und zwar auf dem Intervall  $[t_1, t_1 + T]$ . Hier ist es besonders wichtig zu erkennen, dass der Zeithorizont auf einer möglicherweise kleinen Umgebung von  $u_0$  gleich gewählt werden kann. Im Gegensatz zur Vorlesung notieren wir auch den Startzeitpunkt  $t_1$  mit, vor allem um das folgende Anneinanderreihen verständlich zu machen:

Wenn man auf kleinen offenen Mengen den Zeithorizont uniform wählen kann, dann auf allen kompakten Mengen. Insofern kann die Lösung einer Differentialgleichung, solange sie eine vorgegebene kompakte Menge nicht verlässt, auf immer grösseren Intervallen definiert werden. Sei  $u(\cdot; 0, u_0)$  die Lösung zum Anfangswert  $u_0$  und zum Anfangszeitpunkt 0 auf dem Intervall  $[0, T]$ , das der kompakten Menge  $\overline{B_{R/2}(0)}$  mit  $|u_0| \leq R/2$  zugeordnet wurde. Falls  $|u(T; 0, u_0)| \leq R/2$ , dann kann man dort erneut eine Lösung  $u(\cdot; T, u(T; 0, u_0))$  der Differentialgleichung zum Anfangswert  $u_1 := u(T; 0, u_0)$  und Startzeitpunkt  $t_1 = T$  finden, und zwar auf dem Intervall  $[T, 2T]$ . Dieses Verfahren kann man solange fortsetzen, solange der Ball mit Radius  $R/2$  nicht verlassen wird. Aus diesem Gedankengang schliesst man, dass die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung unter obigen Lipschitzannahmen entweder eine unendliche Lebensdauer hat, oder aber explodiert.

## 8. DIFFERENTIALRECHNUNG IM $\mathbb{R}^n$

Es wird hier noch der Beweis des allgemeinen Taylorthorems nachgeholt: in Dimension  $n = 1$  erhalten wir durch Anwendung der Formel

$$f(x_0 + s_1(x_1 - x_0)) - f(x_0) = \int_0^{s_1} f'(x_0 + s_2(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) ds_2 \quad 0 \leq s_1 \leq 1, x_0, x_1 \in I$$

auf sich selbst den Taylorschen Satz. Sei  $f \in C^m(I)$  für ein offenes Intervall  $I$ ,  $m \geq 1$ , dann gilt

$$f(x_1) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x_1 - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^m}{(m-1)!} \int_0^1 (1-s_1)^{m-1} f^{(m)}(x_0 + s_1(x_1 - x_0)) ds_1.$$

Wir beweisen die Aussage mit Induktion. Offenbar gilt sie für  $m = 1$  nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung. Wir setzen nun voraus dass sie für  $m \geq 1$  gelte und beweisen sie für  $m + 1$ . Dazu wenden wir den Fundamentalsatz auf

$$\frac{1}{m} \int_0^1 (1 - s_1)^{m-1} f^{(m)}(x_0 + s_1(x_1 - x_0)) ds_1$$

an, was zu folgender Umformung führt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \int_0^1 (1 - s_1)^{m-1} f^{(m)}(x_0 + s_1(x_1 - x_0)) ds_1 \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1 - s_1)^{m-1} f^{(m)}(x_0) ds_1 + \\ & \quad + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1 - s_1)^{m-1} \int_0^{s_1} f^{(m+1)}(x_0 + s_2(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) ds_2 ds_1 = \\ &= \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0) + \frac{1}{m!} \int_0^1 (1 - s_1)^m f^{(m+1)}(x_0 + s_1(x_1 - x_0)) ds_1 \end{aligned}$$

mit partieller Integration. Aus der Integralform des Taylorschen Theorems kann man nun leicht die verschiedenen bekannten Restglieder herleiten. Wir leiten das allgemeine Schlömilchsche her: dazu spalten wir das Restglied in Integralform für  $1 \leq p \leq m$  auf

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1 - s_1)^{m-1} f^{(m)}(x_0 + s_1(x_1 - x_0)) ds_1 \\ &= \int_0^1 (1 - s_1)^{m-p} (1 - s_1)^{p-1} f^{(m)}(x_0 + s_1(x_1 - x_0)) ds_1 \\ &= \frac{1}{p} (1 - \theta)^{m-p} f^{(m)}(x_0 + \theta(x_1 - x_0)). \end{aligned}$$

und verwenden folgenden verallgemeinerten Mittelwertsatz für stetige Funktionen  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \geq 0$ : es existiert ein  $0 < \theta < 1$  sodass

$$\int_0^1 f(s)g(s)ds = f(\theta) \int_0^1 g(s)ds.$$

Der Beweis dieses Satzes folgt aus dem Faktum dass der Wert des Integrals zwischen  $\min f \int_0^1 g(s)ds$  und  $\max f \int_0^1 g(s)ds$  liegt.

Damit erhalten wir den Satz von Taylor mit Schlömilchschem Restglied für  $1 \leq p \leq m$

$$f(x_1) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x_1 - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^m}{p(m-1)!} (1 - \theta)^{m-p} f^{(m)}(x_0 + \theta(x_1 - x_0)).$$

Für  $p = m$  erhalten wir das Lagrangesche Restglied, für  $p = 1$  das Cauchysche.

## 9. INTEGRATION AM $\mathbb{R}^n$

Der Satz von Stokes in seiner modernen Form fasst eine Reihe von Sätzen der Vektoranalysis zusammen. Man kann das Theorem leicht verstehen wenn man sich – ausgehend vom Substitutionstheorem – auf die Suche nach geeigneten Integranden und nach der entsprechenden Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differentialrechnung macht.

Die Erkenntnis des Substitutionstheorems ist, dass ein Koordinatenwechsel durch Multiplikation des Integranden mit dem Betrag der Funktionaldeterminante erfolgt. In anderen Worten: ein Integrand wird durch ein geometrisches Objekt beschrieben, welches bei Koordinatenwechseln durch Multiplikation mit der Funktionaldeterminante transformiert. Solche Objekte sind Differentialformen, allerdings nur wenn man eine Orientierung festlegt:

**Definition 9.1.** Wir bezeichnen den Vektorraum der  $k$ -multi-linearen, schiefsymmetrischen (alternierenden)  $\mathbb{R}$ -wertigen Abbildungen mit  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Insbesondere meinen wir  $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ . Wir können folgende natürliche algebraische Struktur betrachten: für  $\omega_1 \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  und  $\omega_2 \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet

$$\omega_1 \wedge \omega_2(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{k+l}} \text{sgn}(\pi) \omega_1(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \omega_2(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)})$$

das Dachprodukt der beiden multilinearen Abbildungen, eine  $k+l$ -multilineare, alternierende Abbildung. Zentral ist die einfach zu sehende Schiefsymmetrie des Dachproduktes:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{kl} \omega_2 \wedge \omega_1,$$

da man beim Vertauschen des Produktreihenfolge das Signum der Permutation

$$(1, \dots, k, k+1, \dots, k+l) \rightarrow (k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k)$$

berechnen muss, welches  $(-1)^{kl}$  ist. Mit Hilfe des Dachproduktes können wir eine Basis der endlich-dimensionalen Vektorräume  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  konstruieren. Sei dafür  $(\delta^j)_j$  dual zur kanonischen Basis  $(e_i)_i$ , dann gilt dass jede  $k$ -multilineare Abbildung  $\omega$  durch die Koeffizienten

$$\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) =: \omega_{i_1 \dots i_k}$$

für  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  eindeutig bestimmt ist und wir die Basisdarstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \delta^{i_1} \wedge \dots \wedge \delta^{i_k}$$

erhalten.

*Bemerkung 9.2.* Die Existenz und Eindeutigkeit der Basisdarstellung folgt aus der Formel

$$(\delta^{i_1} \wedge \dots \wedge \delta^{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\pi) \delta^{i_1}(v_{\pi(1)}) \dots \delta^{i_k}(v_{\pi(k)}),$$

für  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , die leicht aus der Definition des Dachproduktes folgt. Damit erkennt man dass

$$(\delta^{i_1} \wedge \dots \wedge \delta^{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \det((\delta^{i_j}(v_l))_{1 \leq j, l \leq k})$$

gilt, was den Zusammenhang von Dachprodukten und Determinanten erklärt.

**Proposition 9.3.** Sei  $\omega$  eine  $n$ -Form am  $\mathbb{R}^n$  und  $A$  eine Matrix, denn gilt

$$\omega(Av_1, \dots, Av_n) = \det(A) \omega(v_1, \dots, v_n)$$

für alle Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Es genügt die Aussage auf der kanonischen Basis  $e_1, \dots, e_n$  zu zeigen: Aufgrund der Schiefsymmetrie und der Linearität gilt aber

$$\omega(Ae_1, \dots, Ae_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

Nun ist aber  $\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \omega(e_1, \dots, e_n) \operatorname{sgn}(\pi)$  genau dann wenn  $i_j = \pi(j)$ ,  $j = 1, \dots, n$  für (genau) eine Permutation  $\pi \in \mathfrak{S}_k$  gilt, sonst gilt  $\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$ . Damit folgt die Aussage mit der Definition der Determinante.  $\square$

**Definition 9.4.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, dann heisst

$$x \mapsto \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

eine Differentialform vom Grad  $0 \leq k \leq n$  der Klasse  $C^m$ , oder einfach  $k$ -Form der Klasse  $C^m$ , falls die Koeffizienten  $x \mapsto \omega_{i_1 \dots i_k}(x)$  von Klasse  $C^m$  sind für alle  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .

**Definition 9.5.** Sei  $\psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^d$  eine  $C^{m+1}$ -Abbildung, und sei  $\omega$  eine  $k$ -Form der Klasse  $C^m$  auf  $V$ , dann heisst die  $k$ -Form der Klasse  $C^m$  auf  $U$

$$(\psi^* \omega)(x)(v_1, \dots, v_k) := \omega(\psi(x))(d\psi(x)v_1, \dots, d\psi(x)v_k)$$

der Pullback von  $\omega$  entlang von  $\psi$ . Offensichtlich gilt  $\psi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\psi^* \omega_1) \wedge (\psi^* \omega_2)$  für alle Formen  $\omega_1, \omega_2$  (das Dachprodukt ist natürlich bezüglich Pullbacks). Weiters gilt ebenso dass  $\psi^* f = f \circ \psi$  und  $\psi^* df = d(f \circ \psi)$ .

**Proposition 9.6.** Sei durch

$$\omega(y) = f(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k$$

eine  $k$ -Form auf einer offenen Menge  $V \subset \mathbb{R}^k$  gegeben, und sei  $\psi : U \rightarrow V$  eine  $C^1$ -Abbildung, dann gilt

$$\psi^* \omega(x) = f(\psi(x)) \det(d\psi(x)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k.$$

*Beweis.* Mit Proposition 9.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi^* \omega(x)(e_1, \dots, e_k) &= f(\psi(x))(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k)(d\psi(x)e_1, \dots, d\psi(x)e_k) \\ &= f(\psi(x)) \det(d\psi(x))(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k)(e_1, \dots, e_k), \end{aligned}$$

was wir beweisen wollten. Beachte in diesem Beweis, dass im Tangentialraum von  $y = \psi(x)$  die Formen  $dy^l$  dual zur kanonischen Basis sind, ebenso sind die  $dx^j$  dual zur kanonischen Basis im Tangentialraum an  $x$ . Wenn man die beiden Räume als  $\mathbb{R}^k$  identifiziert, dann sind auch diese beide Formen identisch, was die Anwendung der Proposition erlaubt.  $\square$

*Bemerkung 9.7.* Man kann Integration nun auch ausgehend von Differentialformen definieren, indem man die Form an Punkten  $x_i$  auf “tangentiale” Quader  $Q_i$  anwendet und – analog zu Riemannschen Summen – einen Grenzübergang macht. Die Operation ist dann eine geometrische wenn sie nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt, was bedeutet, dass der Koordinatenwechsel durch Multiplikation mit der Funktionaldeterminante erfolgen muss.

Weiters benötigen wir den Begriff der äussere Ableitung:

**Definition 9.8.** Sei  $\omega$  eine  $k$ -Form der Klasse  $C^{m+1}$ , dann definiert

$$x \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_k}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

eine  $k+1$ -Form der Klasse  $C^m$ . Da  $d(\psi^* f) = \psi^* df$  folgt die Natürlichkeit der Definition, das heisst

$$d(\psi^* \omega) = \psi^* d\omega.$$

*Bemerkung 9.9.* Wir schreiben hier den Beweis für die Natürlichkeit der äusseren Ableitung noch genauer auf: mit der Definition der äusseren Ableitung folgt unmittelbar, dass für eine  $k$ -Form  $\omega_1$  und eine  $l$ -Form  $\omega_2$

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$$

gilt, aufgrund der Produktregel und des Faktums, dass man die Ableitung der Koeffizienten von  $\omega_2$  durchtauschen muss, und zwar  $k$ -mal. Weiters gilt für  $C^2$ -Funktionen  $f$ , dass  $d^2 f = 0$ , da

$$d^2 f = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) dx^i\right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(x) dx^i \wedge dx^j = 0$$

aufgrund der Symmetrie der Hessematrix von  $f$  und der Antisymmetrie von  $dx^i \wedge dx^j$ . Daraus folgt aber sofort dass für jede Form  $\omega$  gilt  $d^2 \omega = 0$ , da  $d\omega$  eine *Summe von Produkten von Ableitungen von Funktionen* ist. Weiters erhalten wir

$$(9.1) \quad d(\psi^* \omega) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d[(\omega_{i_1 \dots i_k} \circ \psi) \wedge (\psi^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \psi^* dx^{i_k})]$$

$$(9.2) \quad = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \psi^* d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge \psi^* (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$$

$$(9.3) \quad = \psi^* d\omega,$$

da die äussere Ableitung des Teiles nach dem ersten Dachprodukt in der ersten Zeile verschwindet.

*Example 9.10.* Äussere Ableitungen sind einfach zu berechnen: sei  $\omega(x, y) = \cos(x+y)dx + \sin(x+y)dy$ , dann ist die äussere Ableitung durch die 2-Form

$$\begin{aligned} d\omega(x, y) &= (-\sin(x+y)dx - \sin(x+y)dy) \wedge dx + \\ &\quad + (\cos(x+y)dx + \cos(x+y)dy) \wedge dy \\ &= (\sin(x+y) + \cos(x+y))dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Als technisches Hilfsmittel zur Definition von Integralen über  $k$ -Formen auf  $k$ -dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten mit Rand benötigen wir den Begriff der Zerlegung der Eins.

**Definition 9.11.** Sei  $k \geq 1$ . Eine Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$  heisst  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Rand  $\partial S$  der Klasse  $C^m$  falls es zu jedem Punkt  $p_0 \in S$  eine offene Menge  $p_0 \in W \subset \mathbb{R}^n$  und einen Diffeomorphismus  $\psi : W \rightarrow V$  der Klasse  $C^m$  gibt, sodass

$$\psi(W \cap S) = V \cap \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}.$$

Man nennt  $W$  (gemeinsam mit  $\psi$ ) eine Kartenumgebung von  $p_0 \in S$ ,  $\psi$  eine Karte und  $\phi := (\psi|_{W \cap S})^{-1}$  die zur Karte gehörende Immersion. Falls  $\psi(p_0) \in \partial(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}) = \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$  zu liegen kommt, dann heisst  $p_0$  ein

Randpunkt von  $S$ . Die Menge aller Randpunkte  $\partial S$  ist eine  $k - 1$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit der Klasse  $C^m$  mit durch  $\psi$  induzierte Karten.

Sei  $S$  eine kompakte  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Rand  $\partial S$  und sei  $(W_i)_{i=1,\dots,K}$  eine endliche Überdeckung von  $S$  durch Kartenumgebung. Dann heisst eine Familie von  $C^m$ -Funktionen  $(g_i)_{i=1,\dots,K}$  am  $\mathbb{R}^n$  eine zur Überdeckung subordinierte Zerlegung der Eins, falls jedes  $g_i \geq 0$ , jedes  $g_i$  kompakten Träger hat, der jeweils in einer Kartenumgebung liegt, und  $\sum_i g_i = 1$  gilt.

Eine Orientierung eines Vektorraumes  $V$  ist durch eine geordnete Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  gegeben. Zwei Orientierungen heissen gleich wenn der Basiswechsel positive Determinante hat. Wir betrachten auch den  $\mathbb{R}^0$  als Vektorraum mit zwei Orientierungen. Eine lineare Abbildung zwischen zwei orientierten Vektorräumen aufeinander heisst orientierungserhaltend, wenn die Determinante der Matrix der Abbildung, berechnet bezüglich der beiden Basen positiv ist.

Eine kompakte Teilmannigfaltigkeit mit Rand  $S$  heisst orientierbar, falls es eine Überdeckung mit Kartenumgebungen  $(W_i)_{i=1,\dots,K}$  gibt gemeinsam mit einer Orientierung  $(v_1, \dots, v_k)$  (eine orientierte Basis!) des jeweiligen  $\mathbb{R}^k$ , sodass der Kartenwechsel  $\psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(W_i \cap W_j \cap S) \rightarrow \psi_i(W_i \cap W_j \cap S)$  eine orientierungserhaltende Abbildung ist. Die Orientierung auf  $\partial S$  ist die von einer gewählten Orientierung auf  $S$  durch Einschränkung induzierte! Die Wahl einer solchen Kartenüberdeckung heisst dann Wahl einer Orientierung auf  $S$ .

*Bemerkung 9.12.* Warum ist der Rand von  $S$  randfrei? Für  $S$  wird als Modellraum zur Kartierung  $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1}$  verwendet, also Bereiche, die potentiell Randpunkte kennen. Wenn ein Punkt in einer Karte auf einen Randpunkt abgebildet wird, dann in jeder, denn Randpunkte zeichnen sich dadurch aus, dass es in einer Koordinate in eine Richtung “rausgeht”, während man an inneren Punkten in alle Richtungen ein kleines Stück gehen kann. Schaut man also den Rand an, dann kann man dort für jeden Punkt in der Karte in alle Richtungen des Randes ein kleines Stück weit gehen, also gibt es keinen Rand. Formal sieht man das dadurch, dass zur Modellierung der Kartierung  $\mathbb{R}^{k-1}$  verwendet wird, etwas Randloses.

Nach dieser etwas langen Definition kann das Integral definiert werden:

**Definition 9.13.** Sei  $S$  eine orientierbare, kompakte Teilmannigfaltigkeit der Dimension  $k \geq 0$  und Klasse  $C^m$ ,  $m \geq 1$  mit Rand  $\partial S$  und  $\omega$  eine auf einer offenen Umgebung  $U$  von  $S$  definierte Differentialform, dann heisst

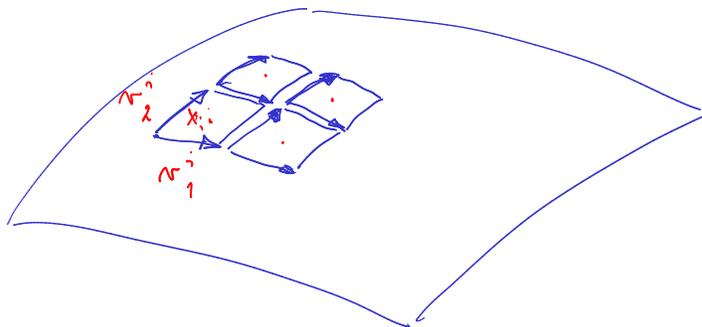
$$\int_S \omega := \sum_{i=1}^K \int_{\psi_i(W_i \cap S)} \phi_i^*(g_i \omega)$$

das Integral von  $\omega$  entlang  $S$ , wobei  $(W_i)$  eine Überdeckung durch Kartenumgebungen mit orientierungserhaltenden Kartenwechseln ist mit  $\cup W_i \subset U$  und  $(g_i)_i$  eine dazu subordinierte Zerlegung der Eins. Das Integral einer  $k$ -Form  $\omega(y) := f(y)dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k$  am  $\mathbb{R}^k$  ist durch

$$\pm \int_Q f(y)\mu(dy)$$

erklärt ( $f$  hat ja kompakten Träger), wobei  $Q$  ein genügend grosser Quader ist und  $\pm$  der Vorzeichen von  $d^1 \wedge \dots \wedge dy^k(v_1, \dots, v_k)$  entspricht. Aufgrund der Orientierungserhaltung und aufgrund des Substitutionstheorems ist das Integral wohldefiniert (dh unabhängig von den gewählten Koordinaten  $y$ ), denn es gilt für jeden

$$\int_S \omega \approx \sum_i \omega(x_i) \left( \tau_i^1, \tau_i^2 \right)$$



Diffeomorphismus  $\psi$  dass

$$\psi^* \omega(x) = \det(d\psi(x)) f(\psi(x)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$$

nach Definition des Pullback. Natürlich kann auch auf Teilmengen  $\Omega \subset S$ , falls deren Bilder unter Kartenabbildungen Jordan-messbar sind, das Integral erklären.

*Bemerkung 9.14.* Beachte dass das Integral hier nur unter Angabe einer Orientierung definiert ist, denn sonst könnte bei Kartenwechseln eine negative Determinante auftreten. Der Beweis der Unabhängigkeit von der gewählten Kartenüberdeckung und der gewählten Zerlegung der Eins funktioniert mit Verfeinerung: wenn man zwei gleich orientierte Kartenüberdeckungen  $(W_i^1)$  und  $(W_j^2)$  mit subordinierten Zerlegungen der Eins  $(g_i^1)_i$  und  $g_j^2$  hat, dann kann man sich die Zerlegung der Eins  $(g_i^1 g_j^2)$  anschauen und mit ihr arbeiten. Dann gilt aber folgende Überlegung, die die

Unabhängigkeit belegt:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \int_{\psi_i^1(W_i^1 \cap S)} (\phi_i^1)^*(g_i^1 \omega) \\
&= \sum_{i,j} \int_{\psi_i^1(W_i^1 \cap S)} (\phi_i^1)^*(g_i^1 g_j^2 \omega) \\
&= \sum_{i,j} \int_{\psi_i^1(W_i^1 \cap W_j^2 \cap S)} (\phi_i^1)^*(g_i^1 g_j^2 \omega) \\
&= \sum_{i,j} \int_{\psi_j^2(W_i^1 \cap W_j^2 \cap S)} (\phi_j^2)^*(g_i^1 g_j^2 \omega) \\
&= \sum_{i,j} \int_{\psi_j^2(W_j^2 \cap S)} (\phi_j^2)^*(g_j^2 \omega).
\end{aligned}$$

Der Schritt von der ersten zur zweiten Zeile erfolgt durch  $\sum_j g_j^2 = 1$ , von der zweiten zur dritten Zeile durch weiteres Verfeinern der Zerlegung. Der entscheidende Schritt ist der Schritt von der dritten zur vierten Zeile: hier wird ein Koordinatenwechsel vollzogen, der in Koordinaten des  $\mathbb{R}^k$  wie die Anwendung eines Diffeomorphismus wirkt, unter Verwendung von Proposition 9.6. Der Koordinatenwechsel ist aber orientierungserhaltend, weshalb Gleichheit gilt. Beachte dazu dass das Substitutionstheorem mit Differentialformen folgende Gestalt hat:

$$\int_{\psi(U)} \eta = \int_U \psi^* \eta$$

für eine  $k$ -Form  $\eta$  (mit entsprechender Integrierbarkeitsbedingung wie im Substitutionstheorem) und einen *orientierungserhaltenden* Diffeomorphismus  $\psi$ . In obige Situation übertragen gilt aufgrund von  $\phi_i^1 = \phi_j^2 \circ \psi_j^2 \circ (\psi_i^1)^{-1}$  auf  $\psi_i^1(W_i^1 \cap W_j^2 \cap S)$  dass

$$\begin{aligned}
& \int_{\psi_i^1(W_i^1 \cap W_j^2 \cap S)} (\phi_i^1)^*(g_i^1 g_j^2 \omega) = \\
&= \int_{\psi_i^1(W_i^1 \cap W_j^2 \cap S)} (\phi_j^2 \circ \psi_j^2 \circ (\psi_i^1)^{-1})^*(g_i^1 g_j^2 \omega) \\
&= \int_{\psi_i^1(W_i^1 \cap W_j^2 \cap S)} (\psi_j^2 \circ (\psi_i^1)^{-1})^*(\phi_j^2)^*(g_i^1 g_j^2 \omega) \\
&= \int_{\psi_j^2(W_i^1 \cap W_j^2 \cap S)} (\phi_j^2)^*(g_i^1 g_j^2 \omega)
\end{aligned}$$

Man kann an dieser Stelle auch konzeptuell argumentieren (siehe Bild): Wenn man die Mannigfaltigkeit mit kleinen, gekrümmten Quadern überdeckt, dann liefert die Anwendung der Form auf die (orientierten) Kantenrichtungen dieser Quader eine Approximation des Integrals, und im Limes das Integral selbst. Das hängt offenbar weder von Karten noch von Zerlegungen der Eins ab. Das einzige was man braucht ist eine Orientierung, denn sonst haben die Kanten keine konsistente Reihenfolge.

*Example 9.15.* Das Integral einer  $k$ -Form entlang einer  $k$ -dimensionalen Teilmannigfaltigkeit  $S$  wird durch Lokalisierung auf Kartenumgebung mit Hilfe von Zerlegungen der Eins und dann durch Pullback auf den  $\mathbb{R}^k$  definiert. Am  $\mathbb{R}^k$  definiert

man dann das Integral mit dem Riemannschen Integral: formal lässt man die Dachproduktzeichen weg. Sei  $S$  zum Beispiel eine Viertelsphäre  $S$  gegeben durch die Parametrisierung

$$\phi(s, t) = (\cos(s) \cos(t), \cos(s) \sin(t), \sin(s)),$$

für  $0 \leq s \leq \pi$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ , und  $\omega(x, y, z) = z dx \wedge dy$ , dann wird der Pullback formal durch Ersetzen von  $x$  durch  $\psi_x(s, t) = \cos(s) \cos(t)$  bzw von  $dx$  durch  $-\sin(s) \cos(t) ds - \cos(s) \sin(t) dt$ , etc, berechnet. Das ergibt dann

$$\begin{aligned} \phi^* \omega(s, t) &= \\ &= \sin(s) (-\sin(s) \cos(t) ds - \cos(s) \sin(t) dt) \wedge (-\sin(s) \sin(t) ds + \cos(s) \cos(t) dt) \\ &= (-\sin^2(s) \cos^2(t) \cos(s) - \cos(s) \sin^2(t) \sin^2(s)) ds \wedge dt. \end{aligned}$$

Der Pullback wird dann integriert, folglich

$$\int_S \omega = \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} (-\sin^2(s) \cos^2(t) \cos(s) - \cos(s) \sin^2(t) \sin^2(s)) ds dt.$$

**Theorem 9.16.** *Sei  $S$  eine kompakte Teilmannigfaltigkeit der Dimension  $k \geq 1$  mit Rand  $\partial S$  der Klasse  $C^m$  für  $m \geq 1$  und  $\omega$  eine auf einer offenen Umgebung von  $S$  definierte  $k-1$ -Form. Dann gilt*

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

*Beweis.* Wir können mit einer Zerlegung der Eins in einer Kartenumgebung rechnen, weiters gilt natürlich (wegen  $\sum_i g_i = 1$ )

$$\sum_i \int_{\psi_i(W_i \cap S)} d(g_i \omega) = \sum_i \int_{\psi_i(W_i \cap S)} g_i d\omega.$$

In einer Kartenumgebung gilt aber mit

$$\phi_i^* g_i \omega = \sum_{j=1}^k f_j(x) dx^1 \dots dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \dots dx^k$$

die folgende Umformung mit Fubinis Theorem im dritten Schritt

$$\begin{aligned} & \int_{\psi_i(W_i \cap S)} \phi_i^* d(g_i \omega) \\ &= \int_{\psi_i(W_i \cap S)} d(\phi_i^* g_i \omega) \\ &= \int_Q \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x^j} \mu_k(dx) \\ &= \int_{Q \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}} f_1(x) \mu_{k-1}(dx) \\ &= \int_{\psi_i(W_i \cap \partial S)} \phi_i^* g_i \omega. \end{aligned}$$

Das bedarf einer genaueren Erklärung: die  $f_j$  haben kompakten Träger, der den Rand von  $Q$  nicht berühren kann, ausser für  $x_1 = 0$ , denn das entspricht ja Randpunkten von  $S$ . Wenn man also Fubini anwendet ( $k$  mal!), dann bleibt ein einziges Mal ein Term übrig  $\int_{Q \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}} f_1(x) \mu_{k-1}(dx)$ .  $\square$

Der Satz von Stokes ist die korrekte Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes, des klassischen Satzes von Stokes, des Satzes von Gauss, etc, was wir an folgenden instruktiven Beispielen sehen werden:

*Example 9.17.* Sei  $k = n = 1$  und sei  $S = [a, b]$  ein Intervall mit  $a < b$ , dann sind durch  $\psi_1 : W_1 \rightarrow V_1, x \mapsto x - b$  mit  $W_1 = ]a, b + 1[$  und  $\psi_2 : W_2 \rightarrow V_2, x \mapsto -x + a, W_2 = ]-1 + a, b[$  Karten mit entsprechenden Kartenumgebungen gegeben. Wir betrachten die 0-Form  $\omega(x) = f(x)$  der Klasse  $C^1$  auf  $\mathbb{R}$ , dann liefert der Satz von Stokes

$$\int_{[a,b]} d\omega = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Beachte dass  $\partial S = \{a, b\}$  eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension 0 des  $\mathbb{R}^1$  ist und dass der Kartenwechsel orientierungserhaltend ist, falls wir für  $\psi_1$  den orientierten  $\mathbb{R}$  mit geordneter Basis (1) betrachten, für  $\psi_2$  den orientierten  $\mathbb{R}$  mit geordneter Basis  $(-1)$ . Als Zerlegung der Eins kann man zwei Funktionen  $g_1 \geq 0, g_2 \geq 0$  nehmen, deren Träger jeweils in  $W_1, W_2$  liegt, mit  $g_1 + g_2 = 1$ .

*Example 9.18.* Sei  $k = n = 2$  und sein  $S$  ein Kreis mit Radius 1. Sei weiters  $\omega(x, y) = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ , dann gilt

$$d\omega(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial x}g(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) \right) dx \wedge dy$$

und wir erhalten

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

nach dem Satz von Stokes, wobei der Kreis im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, was der Standardorientierung des Kreis entspricht. Das Resultat kann man natürlich auch direkt sehen.

Es gibt zwei bedeutende natürliche Operationen mit Differentialformen: das Einsetzen von Vektorfeldern und die Dualität von 1-Formen und Vektorfeldern.

**Definition 9.19.** Sei  $K$  ein Vektorfeld am  $\mathbb{R}^n$  und bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt, dann kann man durch

$$\omega(x)(v) = \langle K(x), v \rangle$$

für alle  $v \in \mathbb{R}^n$ , dem Vektorfeld  $K$  genau eine Form zuordnen (und umgekehrt).

**Definition 9.20.** Sei  $\omega$  eine  $k$ -Form am  $\mathbb{R}^n$  und  $K$  ein Vektorfeld, dann definiert

$$\eta(x)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(x)(K(x), v_1, \dots, v_{k-1})$$

für alle  $v_1, \dots, v_{k-1} \in \mathbb{R}^n$  eine  $k-1$ -Form am  $\mathbb{R}^n$ . Man bezeichnet  $\eta$  auch mit  $\iota_K \omega$  und nennt es die Einsetzung von  $K$  in  $\omega$ .

**Definition 9.21.** Wir nennen die  $n$ -Form  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  die Standard-Volumsform am  $\mathbb{R}^n$ . Die Namensgebung folgt aus dem Faktum, dass wir durch Integrieren der Volumsform das Volumen einer kompakten Teilmannigfaltigkeit  $\Omega$  der Dimension  $n$  berechnen können. Sei  $S$  eine kompakte Teilmannigfaltigkeit mit Rand der Dimension  $k$  und seien  $K_1, \dots, K_{n-k}$  linear unabhängige  $C^1$ -Vektorfelder auf einer Umgebung von  $S$ . Die Vektorfelder bilden ein geordnetes System von Einheitsnormalen der Klasse  $C^1$  falls  $K_i(p)$  orthogonal auf  $T_p S$  stehen, für alle  $p \in S, i = 1, \dots, n-k$  und falls  $\|K_i(p)\| = 1$  gilt.

**Lemma 9.22.** *Sei  $S$  eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand und  $K_1, \dots, K_{n-k}$  ein geordnetes System von Einheitsnormalenvektorfelder der Klasse  $C^1$ , dann ist  $S$  orientierbar.*

*Beweis.* Wähle einen Atlas sodass bezüglich der Standardvolumsform  $\omega$  gilt

$$\omega(\phi(u))(K_1(\phi(u)), \dots, K_{n-k}(\phi(u)), d\phi(u)v_1, \dots, d\phi(u)v_k) > 0$$

für  $u \in \psi(W \cap S) \subset \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1}$  und eine passend gewählte Orientierung  $(v_1, \dots, v_k)$  des  $\mathbb{R}^k$ . Das ist aufgrund der Stetigkeit der Vektorfelder  $K_1, \dots, K_{n-k}$  immer möglich. Damit sind aber die Kartenwechsel zwischen zwei Karten per constructionem aber auch orientierungserhaltend und man hat global eine Orientierung auf der Mannigfaltigkeit gewählt.  $\square$

*Bemerkung 9.23.* In obiger Situation kann man leicht ein Einheitsnormalenvektorfeld zu  $\partial S$  bauen, nämlich durch Hinzufügen eines Vektorfeldes  $K_{n-k+1}$ , das normal auf den Rand und alle anderen Vektorfelder steht und

$$\langle K_{n-k+1}(\phi(0, v)), d\phi(u)v_1 \rangle > 0$$

für  $(0, v) \in \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1} \cap \psi(W \cap S)$  erfüllt. Das entspricht dann der Orientierung des Randes durch Einschränkung.

Mit Einheitsnormalen kann man auch Volumina bestimmen: sei  $S$  eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand und sei  $K_1, \dots, K_{n-k}$  ein geordnetes System von Einheitsnormalen, dann induziert die  $k$ -Form  $\eta$

$$\eta(x)(v_1, \dots, v_k) := \omega(x)(K_1(x), \dots, K_{n-k}(x), v_1, \dots, v_k)$$

das Volumenelement von  $S$ , wenn man tangentielle Richtungen  $v_1, \dots, v_k \in T_x S$  einsetzt. Das Integral  $\int_{\Omega} \eta$  definiert das Volumen von  $\Omega \subset S$ .

*Example 9.24.* Wenn wir die Kugel (Radius  $r = 1$ ) mit östlicher Länge und nördlicher Breite parametrisieren, also  $(\lambda, \beta) \mapsto (\cos(\lambda) \cos(\beta), \sin(\lambda) \cos(\beta), \sin(\beta))$  für  $-\pi/2 < \beta < \pi/2$  und  $0 \leq \lambda < 2\pi$ , dann können wir das Flächenelement der Kugeloberfläche berechnen. Zuerst setzen wir die äussere Normale in die Standardvolumsform ein und ziehen das dann entlang der Parametrisierung zurück, dh man zieht die Form

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy)$$

zurück. Das ergibt dann die Form

$$\begin{aligned} & (\cos(\lambda) \cos(\beta)(\cos(\lambda) \cos^2(\beta)) - \sin(\lambda) \cos(\beta)(-\sin(\lambda) \cos^2(\beta)) + \\ & + \sin^2(\beta) \cos(\beta)) d\beta \wedge d\lambda = \cos(\beta) d\beta \wedge d\lambda. \end{aligned}$$

Als letzte Aussage beweisen wir das Lemma von Poincaré, das wichtig in den Anwendungen ist und eine Fingerübung im Kalkül mit Formen:

**Theorem 9.25.** *Sei  $U$  ein sternförmiges, offenes Gebiet um  $x_0$ , das heisst die Verbindungsstrecke von  $x_0$  zu  $x$  liegt in  $U$  für jedes  $x \in U$ . Sei  $k \geq 1$  und  $\omega \in \Omega^k(U)$  eine unendlich oft differenzierbare  $k$ -Form auf  $U$  mit  $d\omega = 0$ , dann existiert  $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$  mit  $\omega = d\eta$ .*

*Beweis.* Wir können die Form  $\eta$  direkt angeben, wobei die spezielle Gestalt durch eine Konstruktion erklärbar wird, die wir hier nicht vorführen. Ohne Einschränkung wählen wir  $x_0 = 0$ . Dann definieren wir

$$\eta(x) := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) x^{i_\alpha} dt dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

für  $x \in U$ . Der Hut bedeutet das Weglassen von  $dx^{i_\alpha}$  im Dachprodukt. Wenn wir das äussere Differential dieser Form bilden dann erhalten wir

$$\begin{aligned} d\eta(x) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 x^{i_\alpha} t^k d\omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \\ &+ \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt dx^{i_\alpha} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 x^{i_\alpha} t^k d\omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \\ &+ \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k \int_0^1 t^{\alpha-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 x^{i_\alpha} t^k d\omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \\ &+ \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_0^1 k t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \omega_1(x) + \omega_2(x) \end{aligned}$$

wobei im zweiten Ausdruck  $k$ -mal über denselben Summanden summiert wird, was den Faktor  $k$  erklärt. Vorher wurde  $dx^{i_\alpha}$  in das Produkt hineingetauscht, weshalb das Vorzeichen verschwindet. Wir rechnen nun nur für  $\omega_1$  weiter und verwenden  $d\omega = 0$  bzw ein analoges Hineintauschargument,

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 x^{i_\alpha} t^k d\omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k \int_0^1 x^{i_\alpha} t^k \frac{\partial}{\partial x^{i_\alpha}} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \\ &+ \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^n \int_0^1 x^{i_\alpha} t^k \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \\ &+ i_X \left( \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_0^1 t^k d\omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \end{aligned}$$

wobei der addierte dritte Ausdruck verschwindet.  $i_X$  bedeutet einfach die Einsetzung des Vektorfeldes  $x \mapsto x$  in die verschwindende Form  $\int_0^1 t^k d\omega(tx) dt$ . Folglich überleben im zweiten und dritten Ausdruck für jedes  $i_1 < \dots < i_k$  nur Terme der Form  $x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx)$ ,  $j \neq i_l$ , weshalb wir zusammenfassen und partiell integrieren

dürfen

$$\begin{aligned}
\omega_1(x) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \int_0^1 x^j t^k \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_0^1 t^k \sum_{j=1}^n x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left[ \omega_{i_1 \dots i_k}(x) - \int_0^1 k t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \right] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\
&= \omega - \omega_2
\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir  $d\eta = \omega$ , was zu beweisen war.  $\square$

Das Poincaré Lemma übersetzt sich in klassischer Vektoranalysis in die Aussagen, dass es Potentiale für wirbelfreie Vektorfelder und Vektorpotentiale für divergenzfreie Vektorfelder auf sternförmigen Gebieten gibt. Interessant ist auch die Integralformulierung über den Satz von Stokes, die eine physikalische Interpretation erlaubt. Sei  $U$  ein sternförmiges Gebiet und  $\omega$  eine  $k$ -Form auf  $U$  und gelte dass

$$\int_{\partial S} \omega = 0$$

für jede kompakte Teilmannigfaltigkeit mit Rand  $S \subset U$ , genau dann gilt dass es eine  $k-1$ -Form  $\eta$  gibt sodass  $d\eta = \omega$ . Der Beweis ist einfach mit dem Poincaré Lemma: offenbar ist die Integralbedingung äquivalent zur Aussage, dass  $d\omega = 0$  auf  $U$  woraus wir schliessen können.

ETH ZÜRICH, D-MATH, RÄMISTRASSE 101, CH-8092 ZÜRICH, SWITZERLAND  
*E-mail address:* [jteichma@math.ethz.ch](mailto:jteichma@math.ethz.ch)