Geometrie der Zinsen

Josef Teichmann

9. Oktober 2002

1 Endlichdimensionale Realisierungen

Viele Probleme der Mathematik, Physik und Finanzmathematik lassen sich als Evolutionsprobleme darstellen, d.h. man möchte die zeitliche Veränderung einer Zustandsgröße beschreiben. Unter bestimmten Bedingungen genügen endlich viele Bestimmungsgrößen und der Anfangswert eines Problems, um die zeitliche Veränderung zu beschreiben.

Sei Z ein Zustandsraum und

$$dc(t) = V_1(c(t))dt + V_2(c(t))dB_t$$

mit Anfangswert $c(0) \in Z$, dann spricht man von einer endlichdimensionalen Realisierung, wenn es eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^m \to Z$ und einen Prozeß $(z(t))_{t \geq 0}$

gibt,sodaß

$$c(t) = \Phi(z(t)) \text{ für } t \geq 0.$$

2 Invariante Teilmengen

Ein *Evolutionsproblem* ist durch ein Vektorfeld $V : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Eine *Lösung* des Evolutionsproblems zum *Anfangswert* $x \in U$ ist eine glatte Kurve $c : [0, \epsilon[\to U$, sodaß

$$(EP) \begin{cases} \frac{d}{dt} c(t) = V(c(t)) \\ c(0) = x \end{cases}$$

Wir interessieren uns für *invariante Teilmengen* bezüglich des Flusses von (EP), d.h. Mengen $K \subset U$ sodaß für alle $x \in K$ jede Lösung von (EP) mit Anfangswert $c(0) = x$ zumindest für kurze Zeit in K bleibt. Von besonderem Interesse sind hier Teilmengen, die Mannigfaltigkeiten mit Rand sind, da diese zu endlich dimensionalen Realisierungen führen.

3 Drehung im $\mathbb{R}^2$

Wir nehmen ein freundliches Vektorfeld, nämlich

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Die zugehörige Evolutionsgleichung ist

$$x'(t) = y(t),\ y'(t) = -x(t)$$

mit einem Anfangswert (x_0, y_0). Das Picard-Lindelöf Verfahren liefert die eindeutige glatte Lösung der Gleichung:

$$\begin{aligned} x^{(0)}(t) &= x_0,\ y^{(0)}(t) = y_0, \\ x^{(n+1)}(t) &= x_0 + \int_0^t y^{(n)}(s)ds, \\ y^{(n+1)}(t) &= y_0 - \int_0^t x^{(n)}(s)ds. \end{aligned}$$

Nehmen wir den Anfangswert $(1,0)$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&x^{(0)}(t) = 1,\ y^{(0)}(t) = 0 \\
&x^{(1)}(t) = 1,\ y^{(1)}(t) = -t \\
&x^{(2)}(t) = 1 - \frac{t^2}{2},\ y^{(2)}(t) = -t \\
&x^{(3)}(t) = 1 - \frac{t^2}{2},\ y^{(3)}(t) = -t + \frac{t^3}{6}, \\
&x^{(4)}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24},\ y^{(4)}(t) = -t + \frac{t^3}{6}.
\end{aligned}$$

was zu der Lösung $x(t) = \cos t$ und $y(t) = -\sin t$ für $t \geq 0$ konvergiert. Es gilt für alle Zeiten $(x(t), y(t)) \in S^1$.

4 Invariante Teilmannigfaltigkeiten

Gegeben ein glattes Vektorfeld $V : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, und eine Teilmannigfaltgkeit mit Rand $M \subset U$. Die Teilmannigfaltigkeit mit Rand M heißt *lokal invariant* bezüglich des Flusses des Evolutionsproblems

$$(*) \begin{cases} dc(t) = V(c(t))dt \\ c(0) = r \in U \end{cases}$$

falls $c(t) \in M$ für kleine t, immer wenn $c(0) \in M$ gilt.

M ist lokal invariant bezüglich $(*)$, genau dann wenn

$$V(r) \in T_r M$$

für $r \in M \setminus \partial M$ und

$$V(r) \in (T_r M)_{\geq 0}$$

für $r \in \partial M$ gilt.

5 Die Brownsche Bewegung

Ein stochastischer Prozeß $(B_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ heißt *Brownsche Bewegung*, wenn

- jeder Pfad stetig ist, d.h. für alle ω die Kurve $t \mapsto B_t(\omega)$ stetig ist,

- die Zuwächse des Prozesses $(B_t - B_s)$, $t \geq s$, unabhängig von der Vergangenheit sind,

- $E(B_t) = 0$ und $E((B_t - B_s)^2) = t - s$ für $t \geq s \geq 0$ gilt.

  Aus dem zentralen Grenzwertsatz erhält man hier unmittelbar, daß der Prozeß Gaußsch ist und die Pfade *rauh* mit quadratischer Variation t sind, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{2^n-1} (B_{\frac{t(i+1)}{2^n}} - B_{\frac{ti}{2^n}})^2 \to t$$

fast sicher bezüglich P.

Die Brownsche Bewegung ist aufgrund dieser einfachen Eigenschaften ein zentrales Objekt der Stochastik und geeignet "*weisses Rauschen*" zu modellieren, das heißt stochastische Einflüsse auf Bewegungen, die aus unabhängigen kleinen Störungen entstehen.

Die Rauhheit der Pfade hat eine einfache Konsequenz für die p-Variationen, nämlich

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{2^n-1} |B_{\frac{t(i+1)}{2^n}} - B_{\frac{ti}{2^n}}|^p = \begin{cases} \infty \text{ für } 1 \leq p < 2 \\ t \text{ für } p = 2 \\ 0 \text{ für } p > 2 \end{cases}$$

fast sicher bezüglich P.

6 Verrauschtes Drehen im $\mathbb{R}^2$

Stochastische Differentialgleichungen werden an hand von folgendem Beispiel eingeführt. Es handelt sich um gewöhnliche Differentialgleichungen mit einer Störung durch weisses Rauschen in Richtungen eines Vektorfeldes.

Wir nehmen erneut freundliche Vektorfelder und lösen folgende Gleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - \frac{1}{2}\int_0^t x(s)ds + \int_0^t y(s)dB_s, \\ y(t) &= y_0 - \frac{1}{2}\int_0^t y(s)ds - \int_0^t x(s)dB_s. \end{aligned}$$

wieder mit Picard-Lindelöf. Die Integralform ist deshalb notwendig, weil die Ableitungen der Brownschen Bewegung, das weiße Rauschen, nicht mehr leicht zu definieren sind.

$$
\begin{aligned}
x^{(0)}(t) &= x_0,\ y^{(0)}(t) = y_0 \\
x^{(n+1)}(t) &= x_0 - \frac{1}{2}\int_0^t x^{(n)}(s)ds + \int_0^t y^{(n)}(s)dB_s, \\
y^{(n+1)}(t) &= y_0 - \frac{1}{2}\int_0^t y^{(n)}(s)ds - \int_0^t x^{(n)}(s)dB_s.
\end{aligned}
$$

Nehmen wir den Anfangswert $(1, 0)$, dann erhalten wir

$$
\begin{aligned}
x^{(0)}(t) &= 1,\ y^{(0)}(t) = 0, \\
x^{(1)}(t) &= 1 - \frac{1}{2}t,\ y^{(1)}(t) = -B_t.
\end{aligned}
$$

Hier benötigt man eine Idee, wie man nach der Brownschen Bewegung integriert:

- aufgrund der Rauhheit der Pfade kann es kein pfadweises Riemann-Stieltjes Integral sein.

- man möchte die Unabhängigkeit der stochastischen Zuwächse erhalten.

7 Das Itosche Integral

Das Itosche Integral sollte ein Grenzwert Riemannscher Summen werden, wobei die bedingt deterministische Struktur berücksichtigt wird:

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{2^n-1} B_{\frac{ti}{2^n}}(B_{\frac{t(i+1)}{2^n}} - B_{\frac{ti}{2^n}}),$$

was man umformen kann zu

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2^n-1} B_{\frac{ti}{2^n}}(B_{\frac{t(i+1)}{2^n}} - B_{\frac{ti}{2^n}}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2^n-1} (B_{\frac{t(i+1)}{2^n}})^2 - (B_{\frac{ti}{2^n}})^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2^n-1} (B_{\frac{t(i+1)}{2^n}} - B_{\frac{ti}{2^n}})^2 \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(B_t^2 - t)\end{aligned}$$

fast sicher bezüglich P. Hier kommt die Rauhheit der Pfade entscheidend ins Spiel.

Weiters gilt für das Itosche Integral, wie für alle Grenzwerte von Riemannschen Summen, eine partielle Integrationsformel, falls f eine C^1-Funktion ist,

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s f'(s)ds.$$

Mit derselben Methode erhält man fast sicher

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} B^2_{\frac{ti}{2^n}}(B_{\frac{t(i+1)}{2^n}} - B_{\frac{ti}{2^n}}) =$$

$$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2^n-1}(B_{\frac{t(i+1)}{2^n}})^3 - (B_{\frac{ti}{2^n}})^3 -$$

$$-\sum_{i=0}^{2^n-1} B_{\frac{ti}{2^n}}(B_{\frac{t(i+1)}{2^n}} - B_{\frac{ti}{2^n}})^2 -$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2^n-1}(B_{\frac{t(i+1)}{2^n}} - B_{\frac{ti}{2^n}})^2$$

$$\overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds.$$

Damit können wir die Picard-Lindelöf Approximation der Lösung fortsetzen:

$$\begin{aligned}
x^{(2)}(t) &= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{2}(B_t^2 - t) \\
&= 1 - \frac{B_t^2}{2} + \frac{t^2}{4} \\
y^{(2)}(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t B_s ds - \int_0^t (1 - \frac{1}{2}s) dB_s \\
&= -B_t + \frac{1}{2}tB_t.
\end{aligned}$$

Mit einiger Akrobatik in partieller Integration und Ito-scher Integration erhält man schließlich

$$x(t) = \cos B_t, \ y(t) = -\sin B_t$$

und für alle Zeiten gilt $(x(t), y(t)) \in S^1$. Ein Phänomen von "magic cancellation".

8 Effekte

- man benötigt einen Drift nach innen, um den Effekt der verrauschten Geschwindigkeit tangential zum Kreis so auszugleichen, daß man am Kreis bleibt.

- die Gleichung für verrauschtes Drehen ohne Drift

$$dx(t) = y(t)dB_t,$$
$$dy(t) = -x(t)dB_t,$$

  hat als Lösung für den Anfangswert $(1, 0)$

$$x(t) = e^{\frac{1}{2}t} \cos B_t, \; y(t) = -e^{\frac{1}{2}t} \sin B_t.$$

  Das weisse Rauschen erzeugt einen Drift nach außen. Trotzdem ist der Träger der Verteilung von $x(t)$ zu jedem fixen Zeitpunkt ein Kreis, d.h. $P(c(t) \notin e^{\frac{1}{2}t} S^1) = 0$

- dieser Drift heißt *Stratonovich-Drift* und das benötigte Vektorfeld, um diesen Drift auszugleichen, heißt *Stratonovich Korrekturterm*.

9 Hypoelliptischer Fall

Versucht man die Gleichung

$$dx(t) = (-\frac{1}{2}x(t) + \epsilon y(t))dt + y(t)dB_t$$
$$dy(t) = -\frac{1}{2}y(t)dt - x(t)dB_t$$

zu lösen, dann sieht man zuerst, dass keine "magic cancellation" auftritt. Die Lösung hat die Eigenschaft, daß zu einem fixen Zeitpunkt t jeder Punkt in einer offenen Umgebung des Anfangswertes erreicht werden kann! Die Darstellung der Lösung gelingt nicht mehr mit elementaren Mitteln. Es gibt keine invariante Teilmannigfaltigkeiten ausser offenen Teilmannigfaltigkeiten. Der Träger der Verteilung von $c(t)$ ist eine Umgebung und $P(c(t) \notin S^1) = 1$, ja sogar

$$P(c(t) \in A) = \int_A \nu_t(x)dx$$

für $A \subset \mathbb{R}^2$ Borel, wobei ν_t eine glatte Dichtefunktion ist.

10 3 Fälle

- die Drehung im $\mathbb{R}^2$ bleibt auf einem Kreis mit Radius r, wenn man am Kreis mit Radius r startet.

- die verrauschte Drehung im $\mathbb{R}^2$ füllt im Laufe der Zeit offene Teilmengen im $\mathbb{R}^2$ aus, aber zu jedem Zeitpunkt ist der Träger der Verteilung der Lösung ein Kreis mit Radius $re^{\frac{1}{2}t}$, wenn man am Kreis mit Radius r gestartet ist.

- im hypoelliptischen Fall ist der Träger der Verteilung der Lösung zu jedem Zeitpunkt eine Umgebung des Anfangswertes.

11 Stochastische Evolutionsprobleme

Gegeben $d+1$ glatte Vektorfelder $V, V_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für $i = 1, ...d$, und eine Teilmannigfaltigkeit mit Rand $M \subset U$, dann ist die Bedingung dafür, daß die Lösungen der *stochastischen Evolutionsproblems*

$$(SEP) \begin{cases} dc(t) = V(c(t))dt + \sum_{i=1}^{d} V_i(c(t))dB_t^i \\ c(0) = x \in U \end{cases}$$

lokal in M liegen falls ihr Anfangswert in M liegt, durch die Tangentialbedingungen

$$V_0(r) = V(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} DV_i(r) \cdot V_i(r) \in T_r M$$
$$V_i(r) \in T_r M$$

für $r \in M \setminus \partial M$, $i = 1, ..., d$, und

$$V_0(r) \in (T_0 M)_{\geq 0}, V_i(r) \in (T_r M)_0$$

für $r \in \partial M$, $i = 1, \ldots, d$ gegeben.

12 Liesche Klammern

Seien X, Y zwei glatte Vektorfelder und Fl^X der lokale Fluß zu X, dann ist folgendes Vektorfeld von fundamentaler Bedeutung

$$\begin{aligned}
[X,Y](x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(Fl^X_{-t})^*Y(x) \\
&= DX(x)Y(x) - DY(x)X(x) \\
&= 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}|_{t=0} Fl^X_t \circ Fl^Y_t \circ Fl^X_{-t} \circ Fl^Y_{-t}(x),
\end{aligned}$$

da es diejenige Richtung angibt, die möglicherweise eine neue, notwendige Koordinatenrichtung wird.

- Sei M eine Teilmannigfaltigkeit und X, Y zu M tangentiale Vektorfelder, dann gilt auch $[X, Y]$ tangential zu M.

13 Blätter

Gegeben $X_1, \ldots, X_m$ zur m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M tangentiale Vektorfelder, die $T_r M$ am Punkt r aufspannen, dann ist

$$(u_1, \ldots, u_m) \mapsto Fl^{X_1}_{u_1} \circ \cdots \circ Fl^{X_m}_{u_m}(r) \qquad (\#)$$

ein lokaler Diffeomorphismus auf M in einer kleinen Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^m$.

Hat man umgekehrt linear unabhängige Vektorfelder $X_1, \ldots, X_m$ sodaß

$$[X_i, X_j](r) \in \langle X_1(r), \ldots, X_m(r) \rangle \,,$$

dann definiert (#) eine Mannigfaltigkeit der Dimension m, sodaß die X_i tangential sind, ein Blatt.

14 Frobenius und Malliavin bei der Arbeit

- forme eine involutive Distribution von Vektorräumen $D_{LA}(r)$ für jeden Punkt $r \in U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, via

$$D_{LA}(r) = \left\langle V_0(r), \ldots, V_d(r), [V_i, V_j](r), \ldots \right\rangle$$

- suche Punkte $r_0 \in U$, wo die Dimension lokal konstant m ist und baue eine Blätterung der Dimension m um r_0, wobei jedes Blatt eine lokal invariante Teilmannigfaltigkeit ist.

- forme die Distribution von Vektorräumen

$$M_{LA}(r) = \left\langle V_1(r), \ldots, V_d(r), [V_i, V_j](r), \ldots \right\rangle .$$

  Falls die Dimension von D_{LA} lokal m ist, dann haben die Lösungen von (SEP) eine Dichte auf den Blättern bezüglich jeder Volumsform.

15 ein Blick zurück

- im Falle des verrauschten Drehens mit Drift gilt: $\dim D_{LA}(r) = 1$, $\dim M_{LA}(r) = 1$ in einer Umgebung von $(1, 0)$.

- für die verrauschte Drehung gilt: $\dim D_{LA}(r) = 2$, $\dim M_{LA}(r) = 1$ in einer Umgebung von $(1, 0)$.

- im hypoelliptischen Fall gilt: $\dim D_{LA}(r) = 2$, $\dim M_{LA}(r) = 2$ in einer Umgebung von $(1, 0)$.

- in den ersten beiden Fällen kann man eine 1-dimensionalen Realisierung bauen, im letzten nicht.

16 Zinsen

Wir verwenden folgende wichtige Größen:

- $P(t, T)$ bezeichnet den Abzinsungsfaktor vom Auslaufzeitpunkt T auf den Zeipunkt $t \leq T$ (für einen jährlichen Zinssatz von 3% und Zeiträume $t = 0Y$ and $T = 2Y$ erhält man hier $P(0, 2) = e^{-0.06} = 0.941\,76$).

- $P(T, T) = 1$.

- $P(t, T) = \exp(-\int_t^T f(t, s)ds)$, hier bezeichnet $f(t, T)$ die Terminstruktur der Zinsen, $0 \leq t \leq T$

- $r_t = f(t, t)$ ist der Tageszins, derjenige Zins, den man für frei bewegliches Geld erhält.

17 Zinsevolution

- Abzinsungsfaktoren werden an Börsen gehandelt: Investiere $P(0, T)$ heute und erhalte $P(T, T) = 1$ zum Zeitpunkt T oder verkaufe zu einem früheren Zeitpunkt t und erhalte $P(t, T)$.

- Die zeitliche Entwicklung $t \mapsto P(t, T)$ ist eine stochastische für jedes $T \geq 0$.

- Der Verlauf von $T \mapsto P(t, T)$ ist regulär.

Die Prozesse $(f(t, T))_{0 \leq t \leq T}$ mögen folgenden Gleichungen

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sum_{i=1}^{d} \beta_i(t, T)dB_t^i$$

für $T \geq 0$ und vorhersehbare stochastische Prozesse $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_d$ genügen. Darin steckt insbesondere die Annahme, daß die Stochastik der Evolution von Zinsstrukturen mit d Brownschen Bewegungen ausgedrückt werden kann.

18 HJM-Gleichung

Wir machen folgende Grundannahmen für ein Modell der Zinsstrukturevolution:

- no arbitrage im Sinne von Musiela,

- analytische Bedingungen an die Funktionen $T \mapsto f(t,T)$, zum Beispiel keine großen Fluktuationen bei großen Laufzeiten,

- Markoveigenschaft - es ist möglich alle stochastischen Faktoren zu bestimmen und die Lösung zu rekalibrieren für einen neuen Anfangswert ohne alle Parameter neu berechnen zu müssen.

- Lipschitzbedingungen an die Volatilitätsvektorfelder.

Unter diesen Annahmen erhält man die HJM-Gleichung

$$dr_t = (\frac{d}{dx} r_t + \alpha_{HJM}(r_t))dt + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(r_t) dB_t^i$$
$$r_0 = r^* \in H,$$

wobei H ein separabler Hilbertraum von H^1-Terminstrukturkur r ist, auf dem die Shifthalbgruppe stark stetig wirkt. Es wird die Parametrisierung $r(t,x) = f(t, t+x)$ verwendet.

Die Gleichung ist lokal lösbar und alle bisher bekannten Zinsmodelle sind spezielle Lösungen dieser Gleichung für bestimmte Anfangswerte und Volatilitätsstrukturen.

19 Evolutionen jenseits von $\mathbb{R}^n$

Jedes zeitabhängige Phänomen läßt sich als Evolution von Zuständen auffassen. Hier werden Evolutionsprobleme der Form

$$(SEP) \begin{cases} dr_t = (Ar_t + \alpha(r_t))dt + \sum_{i=1}^d \sigma_i(r_t)dB_t^i \\ r_0 = r^* \in U \end{cases}$$

eine besondere Rolle spielen, wobei

- H ein separabler Hilbertraum ist,
- $\alpha, \sigma_1, \ldots, \sigma_d : U \subset H \to H$ glatt,
- A der Generator einer stark-stetigen Halbgruppe $(S_t)_{t \geq 0}$ auf H ist.

20 Lokale Invarianz jenseits von $\mathbb{R}^n$

Lokale Invarianz ist für unendlichdimensionale Probleme von noch größerer Bedeutung, da es damit möglich wird die Komplexität von Problemen entscheidend zu reduzieren.

Für eine endlichdimensionale Teilmannigfaltigkeit $M \subset H$ gilt, M ist lokal invariant bezüglich der stochastischen Evolution (SEP) genau dann, wenn

$$M \subset D(A)$$

$$\mu(r) = Ar + \alpha_{HJM}(r) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} D\sigma_i(r) \cdot \sigma_i(r) \in T_r M$$

$$\sigma_i(r) \in T_r M$$

für $i = 1, \ldots, d$ und $r \in M$. Analog für Mannigfaltigkeiten mit Rand.

21 Geeignetes Programm

1. definiere das Problem auf $D(A^\infty)$, das heißt, die Annahme, daß die Einschränkungen der Vektorfelder $\alpha, \sigma_1, \ldots, \sigma_d$ auf $D(A^\infty)$ glatt sind.

2. verwende ein Frobeniustheorem auf dem Fréchetraum $D(A^\infty)$, um die Existenz von schwachen Blätterungen zu charakterisieren.

3. klassifiziere die Fälle lokaler Konstanz der Distributionen.

4. zeige, daß es keine invarianten Teilmannigfaltigkeiten außerhalb von $D(A^\infty)$ gibt.

5. berechne die Faktorprozesse und zeige Hypoelliptizität.

22 Typische Volatilitäten

In der Zinstheorie sind Volatilitätsvektorfelder der folgenden Form typisch

$$\sigma_i(r) = \phi_i(l_1(r), \ldots, l_n(r))$$

für $\phi_i : V \subset \mathbb{R}^n \to D(A^\infty)$ glatt und $l_k : H \to \mathbb{R}$ stetig linear.

Das bedeutet, daß die stochastischen Veränderungen der Zinsstruktur von linearen Funktionalen der Terminstrukturkurve abhängen, nicht aber von ihrer gesamten Gestalt.

- diese Vektorfelder kann man leicht auf $D(A^\infty)$ einschränken, wo sie Banachvektorfelder sind!

- Banachvektorfelder bilden eine Liesche Algebra.

- μ ist kein Banachvektorfeld, trotzdem wirkt μ durch Liesche Klammern auf Banachvektorfeldern.

23 Berechnung von FDRs

Schwache Blätterungen von lokal invarianten Teilmannigfaltigkeiten und endlichdimensionale Realisierungen sind idente Begriffe. Zur Berechnung von schwachen Blätterungen lokal invarianter Teilmannigfaltigkeiten benötigt man die involutive Distribution D_{LA}

$$\Big\langle \mu(r), \sigma_1(r), \ldots, \sigma_d(r), [\sigma_i, \sigma_j](r), [\mu, \sigma_i](r), \ldots \Big\rangle .$$

- es gibt m-dimensionale Realisierungen genau dann, wenn dim $D_{LA}(r) = m$ für $r \in V \subset D(A^\infty)$.

- die Realisierungen sind affine, das heißt es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1} \in D(A^\infty)$ sodaß
$$D_{LA}(r) = \langle \mu(r) \rangle + \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1} \rangle$$
für $r \in V$, falls V klein genug ist.

- der zugrundeliegende Faktorprozeß hat eine Dichte, der Generator ist hypoelliptisch. Mit weniger Faktoren läuft nichts.

24 Was bedeutet das?

- alle FDRs sind affin (somit sind Faktorprozesse affine Prozesse), affine Modelle sind das einzige, was man im HJM-Rahmen erwarten kann.

- man kann die Faktorprozesse immer so wählen, daß sie eine Dichte besitzen (minimale stochastische Dimension).

- ausgehend von einer genügend präzise festgestellten Volatilitätsstruktur kann man genau sagen, wie man ein Volatilitätsvektorfeld bauen muss, um zu einer FDR zu kommen.

- FDRs scheinen die einzigen finanzmathematisch relevanten Lösungen der HJM-Gleichung zu sein (under construction!).

- Konsistenzproblem.

25 Literatur (thematisch)

- geeignete Analysis: Andreas Kriegl, Peter Michor

- no arbitrage: Freddy Delbaen, Walter Schachermayer, Marek Musiela, Damir Filipovic.

- stochastic analysis: Paul Malliavin.

- lokal invariante Teilmannigfaltigkeiten (mit Rand) bezüglich milder Lösungen von SPDEs: Damir Filipovic (PTRF), Damir Filipovic & Josef Teichmann (Proceedings der Royal Society London).

- Frobeniustheoreme: Josef Teichmann (Monatshefte für Mathematik), Damir Filipovic & Josef Teichmann (JFA).

- Klassifikation aller FDRs: Damir Filipovic & Josef Teichmann (JFA).

- Geeignete Theorie glatter Evolutionsprobleme: Josef Teichmann (JLT, Revista Matematica Complutense).

Josef Teichmann

Institute for Financial and Actuarial Mathematics,

Technical University of Vienna,

E 107/5, Wiedner Haupstraße 8-10,

A-1040 Vienna, Austria

josef.teichmann@fam.tuwien.ac.at

www.fam.tuwien.ac.at/~jteichma