Lösung Lineare Algebra I – Sommer 2018 – Version A

1. *(25 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!
Bewertung:

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

(i) Sei X eine Menge und seien $A, B, C \subseteq X$ Teilmengen. Dann gilt

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$$

Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist $X = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$. Dann ist $B \setminus C = B$, $A \cup B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = A$, $(A \cup B) \setminus C = A \cup B$ und wegen $A \neq A \cup B$ folgt

$$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus C$$

(ii) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X, dann definiert

$$\mathcal{P}_\sim = \{[x] | x \in X\}$$

eine Partition von X.
Die Aussage ist wahr und war Bestandteil der Grundlagen.

(iii) Sei $E \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Elementarmatrix, sei $b \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann hat $EX = b$ eine Lösung.
Die Aussage ist wahr. E ist invertierbar, und somit ist $E^{-1}b$ eine Lösung.

(iv) Die Elementarmatrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zusammen mit der Matrixmultiplikation bilden eine Gruppe.
Die Aussage ist falsch. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ sind Elementarmatrizen, ihr Produkt $2I_2$ ist keine Elementarmatrix.

(v) Sei V ein Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Dann sind $W_1 \cap W_2 \subseteq V$ und $W_1 \cup W_2 \subseteq V$ auch Unterräume von V.
Die Aussage ist falsch. $W_1 \cup W_2$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$.

(vi) Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume, sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann ist T genau dann invertierbar, wenn $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.
Die Aussage ist falsch. Die Nullabbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht invertierbar.

(vii) Seien gegeben die Unterräume

$$V_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y + z = 0\}$$

des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Dann gilt $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.
Die Aussage ist falsch, denn $V_1 \subseteq V_2$.

Bitte wenden!

(viii) Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ invertierbar, dann ist auch $A + A^{-1}$ invertierbar.
Die Aussage ist falsch. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $A^{-1} = -A$ und folglich $A + A^{-1} = 0$ nicht invertierbar.

(ix) Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Dann gilt

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + \det(A) - \det(A - I_2).$$

Die Aussage ist wahr. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A - I_2) &= (a-1)(d-1) - bc \\ &= ad - bc - a - d + 1 \\ &= \det(A) - \mathrm{tr}(A) + 1\end{aligned}$$

und Umordnung der Terme liefert die gewünschte Gleichung.

(x) Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $\dim(V) > \dim(W)$. Dann gilt $\mathrm{Rang}(T) = \dim(W)$.
Die Aussage ist falsch. Seien $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$ und T die Nullabbildung. Dann ist

$$\mathrm{Rang}(T) = 0 \neq 1 = \dim(W).$$

(xi) Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume. Dann gilt

$$\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim\big(\mathrm{Hom}(W^*, V^*)\big)$$

Die Aussage ist wahr. Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass $\dim(V) = \dim(V^*)$ und $\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) = \dim(V)\dim(W)$ für alle endlichdimensionalen Vektorräume V, W über $\mathbb{K}$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}\dim\big(\mathrm{Hom}(V, W)\big) &= \dim(V)\dim(W) \\ &= \dim(V^*)\dim(W^*) \\ &= \dim\big(\mathrm{Hom}(W^*, V^*)\big)\end{aligned}$$

(xii) Sei V ein Vektorraum und seien $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ Teilmengen. Wenn S_2 linear unabhängig ist, so ist S_1 auch linear unabhängig.
Die Aussage ist wahr.

(xiii) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt

$$V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T).$$

Die Aussage ist falsch, denn für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v \in W$ gilt $\mathrm{Ker}(A) = \mathbb{K}e_1 = \mathrm{Im}(A)$, und somit $V \neq \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{Im}(A)$ und $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A) \neq \{0\}$.

Siehe nächstes Blatt!

(xiv) Die Menge $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ der reellen 2×2 Matrizen versehen mit Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation ist ein Körper.
Die Aussage ist falsch, denn $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ besitzt keine multiplikative Inverse.

(xv) Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist

$$\dim \operatorname{Ker}(L_A) = 2 - \det(A).$$

Die Aussage ist falsch. Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $2 - \det(A) = \frac{7}{4}$ und da die Dimension eines Unterraumes immer ganzzahlig ist, ist die Aussage also falsch.

(xvi) Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt

$$m \geq \dim \left({}^{\mathbb{K}^n}\!/_{\operatorname{Ker}(A)} \right).$$

Die Aussage ist wahr. Es gilt

$$\dim \left({}^{\mathbb{K}^n}\!/_{\operatorname{Ker}(A)} \right) = n - \dim \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Rang}(A) \leq m.$$

(xvii) Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Seien des Weiteren $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$ und $\operatorname{Im}(T) \neq \{0\}$. Dann ist $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) \neq \{0\}$.
Die Aussage ist falsch. Sei T die Abbildung $T(x, y, z) = (x, 0, 0)$. Dann ist $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}e_1$ und $\operatorname{Ker}(T) = \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$. Insbesondere ist $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$ und $\operatorname{Im}(T) \neq \{0\}$, aber $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$.

(xviii) Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $m < n$, dann hat $AX = 0$ nicht-triviale Lösungen.
Die Aussage ist wahr, denn $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(L_A) \leq m$ und somit

$$\dim \operatorname{Ker}(A) = \dim \mathbb{R}^n - \operatorname{Rang}(A) \geq n - m > 0.$$

(xix) Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ ist genau dann ein Unterraum von V, wenn $\langle W \rangle = W$.
Die Aussage ist wahr. Wir wissen, dass $\langle W \rangle$ der Schnitt aller Unterräume von V ist, die W enthalten. Falls W ein Unterraum ist, dann ist also $\langle W \rangle \subseteq W$. Da $W \subseteq \langle W \rangle$ nach Konstruktion, folgt also Gleichheit. Sei nun $W \subseteq V$ eine Teilmenge, sodass $W = \langle W \rangle$. Dann ist insbesondere W ein Unterraum von V.

(xx) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A^T)}$$

Die Aussage ist wahr. In der Vorlesung wurden gezeigt, dass $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ und $\det(A) = \det(A^T)$.

Bitte wenden!

(xxi) Sei V ein Vektorraum und $S \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge. Sei T ein Endomorphismus von V. Dann ist $T(S)$ auch linear unabhängig.
Die Aussage ist falsch, denn zum Beispiel ist $S = \{1\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}$, und die Nullabbildung ein Endomorphismus. Sei also T die Nullabbildung, dann ist $T(S) = \{0\}$ nicht linear unabhängig.

(xxii) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und sei $W = \{v \in \mathbb{K}^n | Av = -v\}$. Dann gilt $W \subseteq \mathrm{Im}(A)$.
Die Aussage ist wahr, denn für $v \in W$ gilt $v = -Av \in \mathrm{Im}(A)$, da $\mathrm{Im}(A)$ ein Unterraum ist.

(xxiii) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ sei gegeben die Relation $\sim$, wobei für $x, y \in \mathbb{Z}$ gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y$ ungerade ist. Dies definiert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$.
Die Aussage ist falsch. Die Relation ist nicht reflexiv.

(xxiv) Sei $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren $n \times n$ Matrizen, so ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ein Unterraum des Vektorraums $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Die Aussage ist falsch, denn $0 \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(xxv) Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $A^T = -A$. Dann gilt $\det(A) = 0$.
Die Aussage ist falsch. Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt $A^T = -A$ und $-A^2 = I_2$, also insbesondere $\det(A) \neq 0$.

Siehe nächstes Blatt!

Antworten MC:

FALSCH
WAHR
WAHR
FALSCH
FALSCH
FALSCH
FALSCH
FALSCH
WAHR
FALSCH
WAHR
WAHR
FALSCH
FALSCH
FALSCH
WAHR
FALSCH
WAHR
WAHR
WAHR
FALSCH
WAHR
FALSCH
FALSCH
FALSCH

Bitte wenden!

2. **a)** *(3 Punkte)* Wir definieren auf $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Relation durch

$$A \sim B \iff \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B) \qquad \big(A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})\big).$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definiert.

b) *(6 Punkte)* Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass $AF \sim A$ gilt.

c) *(6 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse $[A]$ von $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ gegeben ist durch

$$[A] = \{AF | F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}.$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis die folgende Aussage verwenden. Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ surjektiv. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Wenn die Einschränkung $T|_U : U \to W$ eine Bijektion ist, dann gilt

$$V = U \oplus \mathrm{Ker}(T).$$

Lösung:

a) **Reflexivität:** Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, dann ist $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A)$ und folglich $A \sim A$.

Symmetrie: Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ so, dass $A \sim B$, dann ist $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$ und wegen Symmetrie der Gleichheit von Mengen auch $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A)$ und somit $B \sim A$.

Transitivität: Seien $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ so, dass $A \sim B$ und $B \sim C$ gelten. Dann sind $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$ und $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(C)$ und wegen Transitivität der Gleichheit von Mengen also $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(C)$ und somit $A \sim C$.

b) Sei $w \in \mathrm{Im}(AF)$, dann existiert nach Voraussetzung ein $v \in \mathbb{K}^n$, sodass $w = (AF)v = A(Fv)$. Sei $u = Fv \in \mathbb{K}^n$, dann ist $w = Au$ und somit $w \in \mathrm{Im}(A)$. Dies zeigt, dass $\mathrm{Im}(AF) \subseteq \mathrm{Im}(A)$.

Sei nun $w \in \mathrm{Im}(A)$, dann existiert $v \in \mathbb{K}^n$ so, dass $w = Av$. Sei $u = F^{-1}v$. Dann ist $(AF)u = Av = w$ und somit $w \in \mathrm{Im}(AF)$.

c) Eine Richtung der Inklusionen folgt aus der vorangehenden Aussage. Seien nun $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ so, dass $A \sim B$. Falls $A = 0$ ist, dann ist auch $B = 0$ und es folgt $B = AI_n$ wie gewünscht. Sei also $A \neq 0$, sodass $\dim(\mathrm{Im}(A)) = r > 0$. Sei $\{w_1, \dots, w_r\} \in \mathbb{K}^m$ eine Basis von $\mathrm{Im}(A)$, dann existieren nach Voraussetzung $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_r \in \mathbb{K}^n$, sodass $w_i = Av_i = Bu_i$. Die Abbildungen $L_A : \langle v_1, \dots, v_r\rangle \to \mathrm{Im}(A)$ und $L_B : \langle u_1, \dots, u_r\rangle \to \mathrm{Im}(A)$ sind bijektiv, und somit gilt unter Verwendung des Hinweises

$$\mathbb{K}^n = \langle v_1, \dots, v_r\rangle \oplus \mathrm{Ker}(A) = \langle u_1, \dots, u_r\rangle \oplus \mathrm{Ker}(B).$$

Wähle Basen $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$, $\{u_{r+1}, \dots, u_n\}$ von $\mathrm{Ker}(A)$ bzw. von $\mathrm{Ker}(B)$. Sei F die Basiswechselmatrix so, dass $Fu_i = v_i$. Dann gilt

$$AFu_i = Av_i = \begin{cases} w_i & \text{falls } 1 \leq i \leq r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere stimmen L_{AF} und L_B auf einer Basis von $\mathbb{K}^n$ überein und es folgt $B = AF$. Da F eine Basiswechselmatrix ist, folgt die Behauptung.

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** *(3 Punkte)* Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Sei $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und sei U ein Unterraum von W. Zeigen Sie, dass $T^{-1}(U)$ ein Unterraum von V ist.

b) *(6 Punkte)* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sei $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis von $L_A^{-1}(U)$.

c) *(6 Punkte)* Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ so, dass $\dim(V) < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\dim(T^{-1}(U)) = \operatorname{nullity}(T) + \dim(\operatorname{Im}(T) \cap U).$$

Lösung:

a) Da $0 \in U$, ist $\operatorname{Ker}(T) \subseteq T^{-1}(U)$. Da $\operatorname{Ker}(T) \subseteq V$ ein Unterraum ist, folgt $0 \in T^{-1}(U)$. Seien $v_1, v_2 \in T^{-1}(U)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind per definitionem $T(v_1), T(v_2) \in U$ und somit $T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \in U$. Es folgt $v_1 + \lambda v_2 \in T^{-1}(U)$ und somit ist $T^{-1}(U)$ ein Unterraum.

b) Es ist $\det(A) = 4$ und somit ist A invertierbar und folglich $L_A^{-1}(U) = L_{A^{-1}}(U)$. Da die Abbildung $L_{A^{-1}}$ injektiv ist, bildet sie linear unabhängige Teilmengen auf linear unabhängige Teilmengen ab und somit ist insbesondere das Bild jeder Basis von U unter $L_{A^{-1}}$ eine Basis von $L_{A^{-1}}(U)$. Wir bestimmen also A^{-1} sowie eine Basis von U.

Zuerst bestimmen wir ein minimales Erzeugendensystem von U. Sei hierfür

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels elementarer Zeilenumformungen findet man

$$B \xrightarrow[Z_3 - 3Z_1]{Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung. Andererseits sind v_1 und v_2 linear unabhängig da zwei Vektoren genau dann linear abhängig sind, wenn sie skalare Vielfache voneinander sind, und folglich ist (v_1, v_2) eine Basis von U, bzw. $(L_{A^{-1}} v_1, L_{A^{-1}} v_2)$ ine Basis von $L_A^{-1}(U)$.

Bitte wenden!

Wir berechnen also $L_{A^{-1}}v_1$ und $L_{A^{-1}}v_2$. Der Gauss Algorithmus liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 24 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{4}Z_3}{\overset{Z_2-2Z_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 18 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$
$$\underset{Z_1-3Z_3}{\overset{Z_2-18Z_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -\frac{18}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

und somit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ -2 & 1 & -\frac{18}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Man berechnet

$$L_{A^{-1}}v_1 = A^{-1}v_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 \\ -54 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L_{A^{-1}}v_2 = A^{-1}v_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -17 \\ -118 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

c) Wir betrachten $T|_{T^{-1}(U)}$. Nach der Dimensionsformel gilt

$$\dim\left(T^{-1}(U)\right) = \operatorname{nullity}(T|_{T^{-1}(U)}) + \operatorname{Rang}(T|_{T^{-1}(U)}),$$

und es reicht also zu zeigen, dass gilt

$$\operatorname{Ker}(T|_{T^{-1}(U)}) = \operatorname{Ker}(T) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(T|_{T^{-1}(U)}) = \operatorname{Im}(T) \cap U.$$

Sei $v \in \operatorname{Ker}(T|_{T^{-1}(U)})$, dann ist $Tv = 0$, also $v \in \operatorname{Ker}(T)$. Andererseits folgt aus $\operatorname{Ker}(T) \subseteq T^{-1}(U)$ sofort, dass $\operatorname{Ker}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(T|_{T^{-1}(U)})$, und folglich ist $\operatorname{Ker}(T|_{T^{-1}(U)}) = \operatorname{Ker}(T)$. Sei nun $u \in \operatorname{Im}(T|_{T^{-1}(U)})$. Dann existiert ein $v \in T^{-1}(U)$ so, dass $Tv = u$. Insbesondere ist also $u \in \operatorname{Im}(T)$ und wegen $v \in T^{-1}(U)$ gilt $Tv \in U$. Also $\operatorname{Im}(T|_{T^{-1}(U)}) \subseteq \operatorname{Im}(T) \cap U$. Sei nun $u \in \operatorname{Im}(T) \cap U$, dann existiert ein $v \in V$ so, dass $Tv = u \in U$ und insbesondere ist $v \in T^{-1}(U)$. Also ist $u \in \operatorname{Im}(T|_{T^{-1}(U)})$. Es folgt $\operatorname{Im}(T|_{T^{-1}(U)}) = \operatorname{Im}(T) \cap U$ und somit folgt die Behauptung.

4. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$, $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Sei $T^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ gegeben durch

$$(T^*f)(v) = f(Tv) \quad (f \in W^*, v \in V).$$

a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie: Wenn T surjektiv ist, dann ist T^* injektiv.

b) *(6 Punkte)* Sei $T : V \to W$ ein injektiver Homomorphismus und sei $U \subseteq W$ ein Unterraum mit der Eigenschaft $W = U \oplus \operatorname{Im}(T)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : W \to V$ gegeben durch $w = u + Tv \mapsto v$ ein wohldefinierter Homomorphismus ist.

c) *(5 Punkte)* Zeigen Sie: Wenn T injektiv ist, dann ist T^* surjektiv.

Siehe nächstes Blatt!

Lösung:

a) Sei $f \in \mathrm{Ker}(T^*)$, dann gilt $f(Tv) = 0$ für alle $v \in V$. Sei $w \in W$ beliebig, dann existiert nach Voraussetzung $v \in V$ so, dass $Tv = w$. Folglich ist $f(w) = f(Tv) = 0$ und da $w \in W$ beliebig war, ist $f = 0$. Also ist T^* injektiv.

b) Sei $w \in \mathrm{Im}(T)$, dann existiert wegen der Injektivität von T genau ein $v \in V$ so, dass $Tv = w$ gilt. Die Abbildung $\varphi : \mathrm{Im}(T) \to V$, $Tv \mapsto v$ ist also wohldefiniert. Sei nun $w \in W$. Nach Voraussetzung existieren eindeutige $u \in U$ und $w' \in \mathrm{Im}(T)$ so, dass $w = u + w'$. Die Projektion $P_{\mathrm{Im}(T),U}$, $w \mapsto w'$ ist also wohldefiniert, und wir haben in den Serien gezeigt, dass die Abbildung $w \mapsto w'$ linear ist. Die Komposition wohldefinierter Abbildungen (mit kompatiblen Definitions- und Bildbereichen) ist wiederum wohldefiniert, und die Komposition linearer Abbildungen ist wieder linear. Es bleibt nur zu zeigen, dass die Abbildung $\varphi : \mathrm{Im}(T) \to V$, $Tv \mapsto v$ linear ist, woraus dann folgt, dass $\Phi = \varphi \circ P_{\mathrm{Im}(T),U}$ wohldefiniert linear ist. Seien also $v_1, v_2 \in V$ und sei $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$\varphi(Tv_1 + \lambda Tv_2) = \varphi\big(T(v_1 + \lambda v_2)\big) = v_1 + \lambda v_2 = \varphi(Tv_1) + \lambda\varphi(Tv_2)$$

und somit ist φ linear.

c) Da W endlichdimensional ist, existiert ein Unterraum $U \subseteq W$ so, dass $W = \mathrm{Im}(T) \oplus U$ gilt. Sei $f \in V^*$ beliebig. Sei $\Phi : W \to V$ die Abbildung gegeben durch $\Phi(u + Tv) = v$. Definiere $g : W \to \mathbb{K}$ durch $g = f \circ \Phi$. Da Kompositionen linearer Abbildungen linear sind und da $\mathrm{Im}(f \circ \Phi) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ gilt, ist $g \in W^*$ wohldefiniert. Sei $v \in V$, dann gilt

$$(T^*g)(v) = g(Tv) = (f \circ \Phi)(Tv) = f(\Phi(Tv)) = f(v)$$

und da $v \in V$ beliebig war, ist $T^*g = f$. Da $f \in V^*$ beliebig war, ist T^* surjektiv.

5. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) *(8 Punkte)* Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung von A.

b) *(7 Punkte)* Benützen Sie die LR-Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem

$$Av = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (v \in \mathbb{R}^3)$$

zu lösen.

Sollten Sie die LR-Zerlegung von A nicht gefunden haben, lösen Sie das Gleichungssystem

$$Bv = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

für die Matrix B unter Verwendung der LR-Zerlegung

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Wir wenden elementare Zeilenumformungen an:

$$A \underset{Z_3 - Z_1}{\xrightarrow{Z_2 - 2Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 + \frac{1}{3}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und folglich ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} A,$$

beziehungsweise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

.

b) Es gilt

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 6y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt also $-z = 0$, $6y = 12$ und $x = 3 - 2y = -1$.

Für das alternative Beispiel berechnet man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 33 & -7 & 1 \end{pmatrix},$$

und somit müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} x + 3y + 5z \\ 6y + 4z \\ -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 33 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -28 \end{pmatrix}.$$

Rückwärts einsetzen liefert $z = 14$, $y = -\frac{53}{6}$ und $x = -\frac{81}{2}$.

6. a) *(4 Punkte)* Geben Sie die Definition der Determinanten aus der Vorlesung wieder.

Siehe nächstes Blatt!

b) *(6 Punkte)* Zeigen Sie, dass für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ gilt:

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

Hinweis: Für $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K}), N \in M_{m\times m}(\mathbb{K}), U \in M_{n\times m}(\mathbb{K}), V \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} M & U \\ 0 & N \end{pmatrix} = \det(M)\det(N) = \det \begin{pmatrix} M & 0 \\ V & N \end{pmatrix}.$$

Sie können diese Aussage ohne Beweis verwenden.

c) *(5 Punkte)* Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$$

genau dann invertierbar ist, wenn $n+1$ nicht durch p teilbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b).

Lösung:

a) Die Determinante auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist eine bzw. die eindeutige (in den Spalten) multilineare, alternierende Abbildung $\det : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, sodass $\det(I_n) = 1$.

b) Man bemerkt

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n + BA \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist also

$$\begin{aligned} \det(I_m + AB) &= \det \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I_m + AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n + BA \end{pmatrix} \\ &= \det(I_n + BA) \end{aligned}$$

c) Es ist $A_n = I_n + vv^T$, wobei $v \in \mathbb{K}^n$ der Spaltenvektor ist, dessen Einträge alle gleich 1 sind. Insbesondere gilt nach Teilaufgabe b), dass

$$\det(A_n) = \det(1 + v^T v) = \det(1+n) = 1+n$$

und da $\mathbb{K}$ ein Körper ist, ist also $\det(A_n) \neq 0 \iff 1+n \neq 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$, was genau dann der Fall ist, wenn $p \nmid n+1$.