

1. (30 Punkte) Kreuzen Sie **direkt auf dem Abgabebblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen!**

Bewertung:

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
 - 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.
- i) Die Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $AX = b$ für eine quadratische Matrix A und einen von 0 verschiedenen Vektor b sei $X = -b$. Dann ist $-b$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A .
- ii) Jede reelle 2017×2017 Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.
- iii) Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Dann ist A ähnlich zu A^T .
- iv) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit $\dim(V) > 1$ und sei β eine Bilinearform auf V . Dann existiert für jedes $u \in V$ ein $v \in V \setminus \{0\}$, sodass $\beta(u, v) = 0$.
- v) Jede Rotation eines endlichdimensionalen Euklidischen Vektorraums besitzt einen Eigenwert.
- vi) Die zur Matrix
- $$A = \begin{pmatrix} \pi & -7 & 4 + 2i \\ -7 & \sqrt{2} & 3i \\ 4 - 2i & -3i & 2i \end{pmatrix}$$
- zugehörige Sesquilinearform ist hermitesch.
- vii) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ ist über \mathbb{C} diagonalisierbar, aber nicht über \mathbb{R} .
- viii) Seien S und T selbstadjungierte Abbildungen. Dann ist die Komposition ST selbstadjungiert.
- ix) Seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, $T \in \text{End}(V)$ und $W \subset V$ ein T -invarianter Unterraum. Dann ist W^\perp auch T -invariant.
- x) Jede symmetrische, positiv definite Matrix $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ besitzt eine eindeutige Quadratwurzel $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, d.h. $A^2 = B$.
- xi) Sei Q eine quadratische Form auf \mathbb{R}^n . Die Darstellungsmatrix von Q ist genau dann invertierbar, wenn sie positiv oder negativ definit ist.
- xii) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum, und sei $T \in \text{End}(V)$, sodass 1 der einzige Eigenwert von T ist. Dann ist T unitär.
- xiii) Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, positiv definit. Dann ist $A + B$ positiv definit.

xiv) Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum, $T \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und sei $W \subset V$ gegeben durch

$$W = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (T - \lambda I_V)^k(v) = 0\}.$$

Dann ist $T - \lambda I_V|_W$ nilpotent.

xv) Jede zu einer orthogonalen Matrix kongruente Matrix ist selbst wieder orthogonal.

xvi) Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und sei β eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V . Dann ist die Abbildung $V \mapsto V^*$, $v \mapsto \beta(v, \cdot)$ ein Isomorphismus.

xvii) Jede diagonalisierbare Matrix ist normal.

xviii) Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{F}_3 -Vektorraum und sei β eine nicht ausgeartete Bilinearform auf V . Dann ist die Darstellungsmatrix von β invertierbar.

xix) Eine lineare Abbildung T auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V ist diagonalisierbar genau dann, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Multiplizität gleich sind.

xx) Hat eine 3×3 Matrix A nur einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 3, so gilt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

xxi) Jede reelle normale Matrix in $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ ist selbstadjungiert.

xxii) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $S \subset V$. Dann ist $(S^\perp)^\perp = S$.

xxiii) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} und sei $T \in \text{End}(V)$ ein Operator endlicher Ordnung, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $T^k = I_V$ ist. Dann ist T diagonalisierbar.

xxiv) Seien U eine unitäre und A eine invertierbare $n \times n$ Matrix, sodass AUA^{-1} diagonal ist. Dann ist A unitär.

xxv) Es gibt eine Basis (u_1, u_2) von \mathbb{R}^2 mit dem standard inneren Produkt, sodass $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ und $\langle u_1, u_2 \rangle = 1$.

xxvi) Sei $Q \in O(n)$, dann ist Q über \mathbb{C} diagonalisierbar.

xxvii) Sei V ein komplexer Vektorraum. Für jede hermitesche Form $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ gilt $\gamma(u, u) \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$.

xxviii) Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ mit $A_{ij} \neq 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist A nicht nilpotent.

xxix) Die inverse Matrix einer invertierbaren diagonalisierbaren Matrix ist diagonalisierbar.

xxx) Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum und sei $T \in \text{End}(V)$. Dann ist $T = T_1 + T_2$, wobei $T_1 T_2 = T_2 T_1$ gilt, T_1 diagonalisierbar und T_2 nilpotent ist.

Siehe nächstes Blatt!

2. (15 Punkte)

- a) Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} und sei $T \in \text{End}(V)$. Geben Sie die Definition eines Eigenwertes von T und zeigen Sie für endlichdimensionales V , dass $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann ein Eigenwert von T ist, wenn $\det(T - \lambda I_V) = 0$.
- b) Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar, sodass $AB = BA$ ist. Zeigen Sie, dass A und B einen gemeinsamen Eigenvektor in \mathbb{R}^n besitzen.
- c) Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und sei $\text{Rang}(A) = 1$. Zeigen Sie, dass $\det(I_n + A) = 1 + \text{Spur}(A)$ gilt.

3. (15 Punkte)

- a) Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $S \subset V$ eine nicht-leere Teilmenge, deren Elemente alle von 0 verschieden und paarweise orthogonal sind. Dann ist S linear unabhängig.
- b) Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, sodass alle Eigenwerte der Abbildung $L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ von der Form αi für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ sind. Zeigen Sie, dass $I_n + A$ und $I_n - A$ invertierbar sind.
- c) Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch. Zeigen Sie, dass die Matrix $I_n + A$ invertierbar und dass $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ orthogonal ist.

4. (15 Punkte) Im Folgenden sei $S_3(\mathbb{R}) \subset M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen, symmetrischen 3×3 -Matrizen.

- a) Definieren Sie den Begriff Kongruenz für Matrizen in $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.
- b) Zeigen Sie, dass Kongruenz eine Äquivalenzrelation auf $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ und auf $S_3(\mathbb{R})$ definiert.
- c) Zeigen Sie, dass es auf $S_3(\mathbb{R})$ genau 10 Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation gibt.
- d) Eine Matrix $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ist eine *Gram'sche* Matrix, falls $B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ existiert, sodass $A = B^T B$ gilt. Zeigen Sie: $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ist genau dann eine Gram'sche Matrix, wenn A symmetrisch ist und alle Eigenwerte von A nicht-negativ sind.

5. (15 Punkte)

- a) Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} , $T \in \text{End}(V)$ und $\lambda \in \sigma(T)$. Definieren Sie den Zyklus des verallgemeinerten Eigenvektors $v \in K_\lambda \setminus \{0\}$.
- b) Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: falls 0 der einzige Eigenwert von A ist, dann ist A nilpotent.

Bitte wenden!

c) Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ nicht nilpotent. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha A \text{ und } A \text{ sind \u00e4hnlich}\}$$

endlich ist.

d) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Menge

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha A \text{ und } A \text{ sind \u00e4hnlich}\}.$$

6. (15 Punkte) Im Folgenden sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum \u00fcber \mathbb{R} oder \mathbb{C} versehen mit einem Euklidischen bzw. einem hermiteschen inneren Produkt.

a) Nehmen Sie an, dass $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unit\u00e4rer Vektorraum ist, und beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn $T \in \text{End}(V)$ einen Eigenvektor in V besitzt, dann besitzt die adjungierte Abbildung T^* einen Eigenvektor.

b) Nehmen Sie an, dass $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum ist, und beweisen Sie dieselbe Aussage in diesem Fall.

c) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unit\u00e4r und sei $S \in \text{End}(V)$, sodass $\langle Sv, v \rangle = 0$ gilt f\u00fcr alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass $S = 0$ ist.

d) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unit\u00e4rer Vektorraum. Geben Sie die Definition eines selbstadjungierten Operators $T \in \text{End}(V)$. Zeigen Sie im Anschluss, dass T genau dann selbstadjungiert ist, wenn die Adjungierte von T existiert und f\u00fcr alle $v \in V$ gilt

$$\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \quad (v \in V).$$

7. (15 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jede positiv definite, symmetrische Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ eine Cholesky-Zerlegung besitzt, d.h. es existiert eine obere Dreiecksmatrix $R \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, sodass $A = R^T R$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Cholesky-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$