Lineare Algebra I – Winter 2018

1. *(25 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!
Bewertung:

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

(i) Es gilt $\mathcal{P}(\{\}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\}))$.

(ii) Seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen einer Menge X. Es gilt

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

(iii) Sei X eine Menge und $\mathscr{P}$ eine Partition von X, dann definiert

$$x \sim_{\mathscr{P}} y \iff \exists P \in \mathscr{P} : x \in P \wedge y \in P$$

eine Äquivalenzrelation auf X.

(iv) Gegeben sei eine Menge X der Kardinalität 4. Es gibt genau 6 verschiedene Äquivalenzrelationen mit genau 6 Elementen auf X.

(v) Sei X eine Menge und seien $A, B \subseteq X$, dann gilt

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B,$$

wobei χ_C die Indikatorfunktion einer Menge C ist.

(vi) Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, sei $T : V \to W$ eine Abbildung und sei gegeben $w \in W \setminus \{0\}$, sodass die Menge $T^{-1}(\{w\})$ ein Unterraum ist. Dann ist T linear.

(vii) Seien $f, g \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(f) = \deg(g) = n$, dann gilt $\deg(f + g) = n$.

(viii) Sei $\mathbb{F}_5$ der Körper mit fünf Elementen. Sei $W \subseteq \mathbb{F}_5^3$ der Unterraum erzeugt durch $(1, 1, 1)$. Dann hat der Quotient $\mathbb{F}_5^3/W$ zehn Elemente.

(ix) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei $W \subseteq V$ ein Unterraum mit der Eigenschaft $\dim(V) = \dim(W)+1$. Falls $v \in V \setminus W$, dann gilt $V = W \cup \langle v \rangle$.

(x) Seien $A \in M_{7\times 2}(\mathbb{R}), B \in M_{2\times 5}(\mathbb{R})$ und $M = AB \in M_{7\times 5}(\mathbb{R})$. Für beliebige Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^5$ sind Mu, Mv und Mw linear abhängig.

(xi) Die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

ist linear unabhängig.

Bitte wenden!

(xii) Seien $\mathcal{B}_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B}_2 = (w_1, \ldots, w_n)$ zwei verschiedene geordnete Basen eines Vektorraums V. Dann existiert ein i, sodass die geordnete Menge

$$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

auch eine geordnete Basis von V ist.

(xiii) Seien $T : V \to W$ linear und $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ linear unabhängig. Dann ist die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ auch linear unabhängig.

(xiv) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Dann ist die Abbildung $V \to \mathbb{K}^n, v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ linear.

(xv) Jede invertierbare Matrix ist eine Basiswechselmatrix.

(xvi) Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$, so gilt: T ist genau dann invertierbar, wenn $\dim(V) = \dim(W)$ ist.

(xvii) Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ und $j \in \mathbb{N}$ höchstens p. Dann gilt

$$(A \cdot B)^{(j)} = A \cdot B^{(j)}.$$

(xviii) Sei V ein Vektorraum und $v \in V$, so ist die Auswertungsabbildung definiert durch

$$\mathrm{ev}_v : V^* \to \mathbb{K}, f \mapsto f(v)$$

linear.

(xix) Für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ sowie Elementarmatrizen $E \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gilt $EA = AE$.

(xx) Für jede ganze Zahl r zwischen 0 und 6 existiert eine Matrix $A \in M_{3\times 6}(\mathbb{R})$ mit Rang r.

(xxi) Sei $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 3$, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 6$$

(xxii) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann gilt $\det(A^{-1}) = -\det(A)$.

(xxiii) Zwei Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie die gleiche Determinante haben.

(xxiv) Sei $(A|b)$ in Zeilenstufenform, so hat das System $AX = b$ eine Lösung.

(xxv) Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(W, V).$$

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** *(6 Punkte)* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Beweisen Sie die folgende Aussage: S ist genau dann eine Basis von V, wenn jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Linearkombination der Elemente in S dargestellt werden kann.

Im Folgenden sei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper mit 2 Elementen.

b) *(4 Punkte)* Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3$$

gegeben. Finden Sie alle Vektoren $v_3 \in \mathbb{F}_2^3$, sodass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{F}_2^3$ ist.

c) *(5 Punkte)* Sei $n \geq 2$. Im Vektorraum $\mathbb{F}_2^n$ seien $n-1$ linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1}$ gegeben. Wie viele Vektoren $v_n \in \mathbb{F}_2^n$ gibt es, sodass $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{F}_2^n$ ist?

3. **a)** *(4 Punkte)* Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $T : V \to W$ linear mit $\mathrm{Rang}(T) = r$. Zeigen Sie, dass eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ von W existieren, sodass

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})_{ii} = 1 \quad \text{für alle} \quad i \leq r \quad \text{und} \quad ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})_{ij} = 0 \quad \text{sonst.}$$

b) *(3 Punkte)* Geben Sie die Definition des Ranges einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und zeigen Sie, dass dieser mit der Dimension des Spaltenraumes übereinstimmt.

c) *(3 Punkte)* Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

d) *(5 Punkte)* Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, wobei V endlichdimensional ist. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum und sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$V = U + \mathrm{Ker}(T) \iff \mathrm{Rang}(T) = \mathrm{Rang}(T|_U).$$

4. Sei $V = \mathbb{R}_2[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und von Grad höchstens 2. Wir definieren die Linearformen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ auf V durch

$$\varphi_1(p) = \int_0^1 p(t)\mathrm{d}t, \quad \varphi_2(p) = p'(0), \quad \varphi_3(p) = p(0) \quad (p \in V)$$

a) *(5 Punkte)* Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ eine Basis von V^* ist.

Bitte wenden!

b) *(6 Punkte)* Bestimmen Sie die Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $\mathcal{B}^*$ die duale Basis zu $\mathcal{B}$ ist.

c) *(4 Punkte)* Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $p \mapsto p'$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ von V.

Bemerkung: Sollten Sie $\mathcal{B}$ in Teilaufgabe b) nicht gefunden haben, bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = (X^2 + 1, -X^2 - 2, 3X^2 + X + 3).$$

5. **a)** *(4 Punkte)* Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $X, b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie: Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn das Gleichungssystem $AX = b$ genau eine Lösung hat.

b) *(3 Punkte)* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A nicht invertierbar?

c) *(8 Punkte)* Bestimmen Sie für λ wie in Teilaufgabe b):

(i) die Zeilenstufenform von A.

(ii) den Kern und das Bild von L_A.

Bemerkung: Sollten Sie λ in Teilaufgabe b) nicht bestimmt haben, lösen Sie diese Teilaufgabe für die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -3 & -8 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. **a)** *(3 Punkte)* Geben Sie die Definition der Determinante einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

b) *(3 Punkte)* Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ mit $m > n$. Zeigen Sie, dass $\det(AB^T) = 0$.

c) *(4 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie $\det(A_n)$ für

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta & & 0 \\ \alpha & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & & \alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),$$

das heisst, A_n hat Diagonaleinträge alle gleich $\alpha + \beta$, auf der oberen Nebendiagonalen sind die Einträge alle gleich β und auf der unteren Nebendiagonalen sind die Einträge alle gleich α.

Siehe nächstes Blatt!

d) *(5 Punkte)* Sei $A \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ und $M_A : M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ die lineare Abbildung gegeben durch $M_A(B) = AB$. Zeigen Sie, dass

$$\det(M_A) = (\det(A))^n$$