Lineare Algebra I – Winter 2018 (Lösung)

1. *(25 Punkte)* Kreuzen Sie **direkt auf dem Abgabeblatt** an, ob die Behauptungen WAHR oder FALSCH sind. Sie müssen Ihre Antworten **nicht begründen**!
Bewertung:

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsch oder nicht beantwortete Frage.

(i) Es gilt $\mathcal{P}(\{\}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\}))$.
Es ist $\mathcal{P}(\{\}) = \{\{\}\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\})) = \{\{\}, \{\{\}\}\}$ und die Aussage somit falsch.

(ii) Seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen einer Menge X. Es gilt

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Diese Eigenschaft des relativen Komplements wurde in den Vorlesungen bewiesen.

(iii) Sei X eine Menge und $\mathscr{P}$ eine Partition von X, dann definiert

$$x \sim_{\mathscr{P}} y \iff \exists P \in \mathscr{P} : x \in P \wedge y \in P$$

eine Äquivalenzrelation auf X.
Auch das wurde in den Vorlesungen bewiesen.

(iv) Gegeben sei eine Menge X der Kardinalität 4. Es gibt genau 6 verschiedene Äquivalenzrelationen mit genau 6 Elementen auf X. Jede Äquivalenzrelation enthält die Diagonale $\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Die Diagonale hat Kardinalität 4. Diagonale plus ein Element abseits der Diagonalen plus dessen Transposition ergibt eine Menge der Kardinalität 6. Es existieren bis auf Transposition 6 Elemente abseits der Diagonalen. Die Aussage ist also richtig.

(v) Sei X eine Menge und seien $A, B \subseteq X$, dann gilt

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B,$$

wobei χ_C die Indikatorfunktion einer Menge C ist.
$\chi_A \chi_B = \chi_{A \cap B}$ wurde in den Übungen gezeigt. Die Aussage ist also richtig.

(vi) Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, sei $T : V \to W$ eine Abbildung und sei gegeben $w \in W \setminus \{0\}$, sodass die Menge $T^{-1}(\{w\})$ ein Unterraum ist. Dann ist T linear.
T linear impliziert $T(0) = 0$. Die Aussage ist also falsch.

(vii) Seien $f, g \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(f) = \deg(g) = n$, dann gilt $\deg(f + g) = n$.
$\deg(-f) = \deg(f)$ wurde in den Übungen gezeigt. Die Aussage ist also falsch.

(viii) Sei $\mathbb{F}_5$ der Körper mit fünf Elementen. Sei $W \subseteq \mathbb{F}_5^3$ der Unterraum erzeugt durch $(1, 1, 1)$. Dann hat der Quotient $\mathbb{F}_5^3/W$ zehn Elemente.
Die Aussage ist falsch. $\dim W = 1$, folglich $\dim \mathbb{F}_5^3/W = 2$ und somit enthält der Quotient $5^2 = 25$ Elemente.

(ix) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei $W \subseteq V$ ein Unterraum mit der Eigenschaft $\dim(V) = \dim(W)+1$. Falls $v \in V \setminus W$, dann gilt $V = W \cup \langle v \rangle$.
Die Aussage ist falsch. Die Vereinigung ist kein Vektorraum.

(x) Seien $A \in M_{7\times2}(\mathbb{R}), B \in M_{2\times5}(\mathbb{R})$ und $M = AB \in M_{7\times5}(\mathbb{R})$. Für beliebige Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^5$ sind Mu, Mv und Mw linear abhängig.
Die Aussage ist richtig, denn $\operatorname{Rang}(M) \leq \min\{\operatorname{Rang}(A), \operatorname{Rang}(B)\} \leq 2$.

(xi) Die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

ist linear unabhängig.
Die Aussage ist falsch. Jede Teilmenge, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

(xii) Seien $\mathcal{B}_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B}_2 = (w_1, \ldots, w_n)$ zwei verschiedene geordnete Basen eines Vektorraums V. Dann existiert ein i, sodass die geordnete Menge

$$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

auch eine geordnete Basis von V ist.
Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel liefern die geordneten Basen (e_1, e_2) und (e_2, e_1).

(xiii) Seien $T : V \to W$ linear und $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ linear unabhängig. Dann ist die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ auch linear unabhängig.
Die Aussage ist falsch. Betrachte den Fall $T(v_i) = w \in W \setminus \{0\}$. Falls $v_1 \neq v_2$, dann ist $\{w\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, v_2, \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\}$ linear abhängig.

(xiv) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V. Dann ist die Abbildung $V \to \mathbb{K}^n, v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ linear.
Die Aussage ist richtig und wurde in der Vorlesung bewiesen.

(xv) Jede invertierbare Matrix ist eine Basiswechselmatrix.
Die Aussage ist richtig und war Teil eines Übungsblatts.

(xvi) Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$, so gilt: T ist genau dann invertierbar, wenn $\dim(V) = \dim(W)$ ist.
Die Aussage ist falsch. $T = 0$ ist ein Gegenbeispiel.

Siehe nächstes Blatt!

(xvii) Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ und $j \in \mathbb{N}$ höchstens p. Dann gilt

$$(A \cdot B)^{(j)} = A \cdot B^{(j)}.$$

Die Aussage ist richtig. Man berechnet $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = (AB^{(j)})_i$.

(xviii) Sei V ein Vektorraum und $v \in V$, so ist die Auswertungsabbildung definiert durch

$$\mathrm{ev}_v : V^* \to \mathbb{K}, f \mapsto f(v)$$

linear.
Die Aussage ist richtig und wurde in der Vorlesung diskutiert.

(xix) Für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ sowie Elementarmatrizen $E \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gilt $EA = AE$.
Die Aussage ist falsch. $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist eine Elementarmatrix. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $AEA^{-1} = E^4 \neq E$.

(xx) Für jede ganze Zahl r zwischen 0 und 6 existiert eine Matrix $A \in M_{3\times 6}(\mathbb{R})$ mit Rang r.
$A \in M_{3\times 6}(\mathbb{R}) \implies \mathrm{Rang}(A) \leq 3$.

(xxi) Sei $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 3$, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 6$$

Die Aussage ist falsch. Multilinearität impliziert $\det(\begin{smallmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{smallmatrix}) = 4 * 3 = 12$.

(xxii) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann gilt $\det(A^{-1}) = -\det(A)$.
Die Aussage ist falsch. Es gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ und somit $\det((2I_n)^{-1}) = \frac{1}{2^n} \neq -2^n = -\det(2I_n)$.

(xxiii) Zwei Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie die gleiche Determinante haben.
Die Aussage ist falsch. I_2 ist nur zu sich selber ähnlich, da $QI_2Q^{-1} = I_2$ für alle $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. Es gilt aber $\det(I_2) = \det(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$.

(xxiv) Sei $(A|b)$ in Zeilenstufenform, so hat das System $AX = b$ eine Lösung.
Die Aussage ist falsch. $(0|1)$ ist in Zeilenstufenform, das zugehörige System hat aber keine Lösung.

(xxv) Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(W, V).$$

Die Aussage ist wahr, denn die Dimensionen sind gleich.

2. a) *(6 Punkte)* Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Beweisen Sie die folgende Aussage: S ist genau dann eine Basis von V, wenn jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Linearkombination der Elemente in S dargestellt werden kann.

Im Folgenden sei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper mit 2 Elementen.

b) *(4 Punkte)* Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3$$

gegeben. Finden Sie alle Vektoren $v_3 \in \mathbb{F}_2^3$, sodass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{F}_2^3$ ist.

c) *(5 Punkte)* Sei $n \geq 2$. Im Vektorraum $\mathbb{F}_2^n$ seien $n-1$ linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$ gegeben. Wie viele Vektoren $v_n \in \mathbb{F}_2^n$ gibt es, sodass $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{F}_2^n$ ist?

Lösung:

a) **"$\Rightarrow$":** Wenn S eine Basis ist, dann ist insbesondere S ein endliches linear unabhängiges Erzeugendensystem, also lässt sich jeder Vektor in v als Linearkombinationen in den Elementen von S schreiben. Es bleibt nur die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von Kardinalität n. Seien $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ verschieden und $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$, dann ist $\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) v_i$ eine nicht-triviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit.

"$\Leftarrow$": Wenn jeder Vektor $v \in V$ sich auf eindeutige Weise als Linearkombination der Elemente in S darstellen lässt, dann ist S insbesondere ein Erzeugendensystem von V. Der Vektor $0 \in V$ lässt sich nach Voraussetzung nur als triviale Linearkombination in den Elementen von S ausdrücken, und folglich ist S linear unabhängig.

b) Die Vektoren sind sicherlich linear unabhängig und erzeugen folglich einen Unterraum W der Dimension 2, also isomorph zu $\mathbb{K}^2$ und somit der Kardinalität 4. Der Vektorraum $\mathbb{K}^3/W$ ist eindimensional und enthält somit genau einen von null verschiedenen Vektor, und jeder Repräsentant dieses Vektors erzeugt zusammen mit $\{v_1, v_2\}$, da das Erzeugnis per definitionem $\{v_1, v_2\}$ echt enthält und maximale Dimension besitzt. Wir brauchen also nur die nicht-triviale Nebenklasse zu bestimmen. Angenommen

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dann folgt aus der ersten Zeile $\alpha_1 = 1$ und aus der dritten Zeile $\alpha_2 = 1$. Dann ergibt aber die zweite Zeile $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, im Widerspruch zur Annahme. Somit

Siehe nächstes Blatt!

ist $v_3 = (1,1,1)$ nicht in W enthalten und die Nebenklasse von v_3 enthält genau die vier Elemente

$$\begin{aligned}
v_3 &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \\
v_3 + v_1 &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \\
v_3 + v_2 &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \\
v_3 + v_1 + v_2 &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Jedes dieser Elemente ergänzt $\{v_1, v_2\}$ zu einer Basis.

Alternativ berechnet man, dass

$$\operatorname{span}(v_1, v_2) = \left\{ 0, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

und folgert aus der Bedingung $v_3 \in \mathbb{K}^3 \setminus \operatorname{span}(v_1, v_2)$, dass für alle

$$v_3 \in \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^3$ ist.

c) Sei W das Erzeugnis von $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, dann ist $\mathbb{K}^n/W$ ein eindimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und enthält genau ein von 0 verschiedenes Element. Jeder Repräsentant v_n dieser Nebenklasse ist nicht in W enthalten und erzeugt somit zusammen mit W den ganzen Vektorraum. Andererseits ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig, da jede Darstellung der 0 als Linearkombination dieser Elemente den Vektor v_n entweder mit Koeffizient 0 oder 1 enthält. In erstem Falle ist die Linearkombination trivial, da jede Darstellung von 0 als Linearkombination in $v_1, \ldots, v_{n-1}$ nach Voraussetzung trivial ist, und im zweiten Falle folgt nach Umordnung $v_n \in W$, im Widerspruch zur Wahl von v_n. Somit ist die Anzahl der Vektoren, die $\{v_1, \ldots, v_n\}$ zu einer Basis von $\mathbb{K}^n$ ergänzen gleich der Kardinalität der nicht-trivialen Nebenklasse von W. Diese hat – da Translation eine Bijektion ist – Kardinalität gleich der Kardinalität von W und W ist isomorph zu $\mathbb{K}^{n-1}$ und hat somit Kardinalität 2^{n-1}. Es gibt also 2^{n-1} Vektoren in $\mathbb{K}^n$, die $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ zu einer Basis ergänzen.

Bitte wenden!

3. **a)** *(4 Punkte)* Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $T : V \to W$ linear mit $\operatorname{Rang}(T) = r$. Zeigen Sie, dass eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ von W existieren, sodass

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})_{ii} = 1 \quad \text{für alle} \quad i \leq r \quad \text{und} \quad ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})_{ij} = 0 \quad \text{sonst.}$$

b) *(3 Punkte)* Geben Sie die Definition des Ranges einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und zeigen Sie, dass dieser mit der Dimension des Spaltenraumes übereinstimmt.

c) *(3 Punkte)* Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

d) *(5 Punkte)* Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, wobei V endlichdimensional ist. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum und sei $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$V = U + \operatorname{Ker}(T) \iff \operatorname{Rang}(T) = \operatorname{Rang}(T|_U).$$

Lösung

a) Falls $r = 0$ ist, dann ist T die Nullabbildung und somit $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = 0$ für alle Basen und somit gilt die Aussage in diesem Fall.

Sei also $r > 0$. Wähle eine Basis $w_1, \ldots, w_r$ von $\operatorname{Im}(T)$. Da $w_i \in \operatorname{Im}(T)$ existieren $v_1, \ldots, v_r \in V$ sodass $T(v_i) = w_i$. Sei $U = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$, dann ist $U \cap \operatorname{Ker}(T) = \{0\}$. Sei nämlich $v \in U \cap \operatorname{Ker}(T)$, dann ist $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$ und nach Voraussetzung

$$0 = T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_r T(v_r) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r$$

und wegen der linearen Unabhängigkeit der w_i folgt also $\lambda_i = 0$ und somit $v = 0$. Aufgrund der Dimensionsformel gilt $V = U \oplus \operatorname{Ker}(T)$ und somit existiert eine Basis $v_{r+1}, \ldots, v_n$ von $\operatorname{Ker}(T)$, sodass $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist. Unter Verwendung von Steinitz erweitern wir die geordnete Menge $(w_1, \ldots, w_r)$ zu einer geordneten Basis $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ von W. Für $j > r$ ist $[T(v_j)]_{\mathcal{C}} = [0]_{\mathcal{C}} = 0$ und sonst $[T(v_j)]_{\mathcal{C}} = [w_j]_{\mathcal{C}} = e_j$ und somit folgt die Behauptung.

b) Der Rang der Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ist definiert durch

$$\operatorname{Rang}(A) = \dim \operatorname{Im}(L_A),$$

wobei $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Linksmultiplikation ist.

Das Bild der Abbildung L_A ist gleich der linearen Hülle der Bilder der Elemente einer Basis von $\mathbb{K}^n$. Die Bilder der Standardbasis sind genau die Spalten von A und somit ist das Bild von A die lineare Hülle der Spalten – der Spaltenraum – von A. Insbesondere stimmt die Dimension des Spaltenraumes mit der Dimension des Bildes überein.

Siehe nächstes Blatt!

c) Man berechnet

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3-Z_1\\Z_4-Z_1}]{Z_2-Z_1} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3-2Z_2\\Z_4-3Z_2}]{Z_1-Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die verbliebenen zwei von 0 verschiedenen Zeilen sind keine Vielfachen voneinander, somit also linear unabhängig. Da elementare Zeilenoperationen – Multiplikation mit invertierbaren Matrizen – den Rang erhalten, und da der Zeilenrang und der Spaltenrang wie in der Vorlesung gezeigt identisch sind, ist der Rang von A gleich 2.

d) **"$\Leftarrow$:"** Falls $\mathrm{Rang}(T|_U) = \mathrm{Rang}(T)$, dann ist das Bild von U unter T ein Unterraum von $\mathrm{Im}(T)$ voller Dimension. Wir haben bereits in Teilaufgabe a) gezeigt, dass eine linear unabhängige Menge $S \subseteq U$, sodass $V = \langle S \rangle \oplus \mathrm{Ker}(T) \subseteq U + \mathrm{Ker}(T) \subseteq V$, und es folgt die Behauptung.

"$\Rightarrow$:" Falls $U + \mathrm{Ker}(T) = V$, dann existieren für alle $w \in \mathrm{Im}(T)$ ein $u \in U$ und ein $v \in \mathrm{Ker}(T)$, sodass $w = T(u+v) = T(u) + T(v) = T(u)$. Insbesondere ist also $\mathrm{Im}(T) \subseteq T(U)$. Sicherlich ist $T(U) \subseteq \mathrm{Im}(T)$ und somit fogt Gleichheit. Es gilt also $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(T|_U)$ und somit folgt die Behauptung.

4. Sei $V = \mathbb{R}_2[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und von Grad höchstens 2. Wir definieren die Linearformen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ auf V durch

$$\varphi_1(p) = \int_0^1 p(t)\mathrm{d}t, \quad \varphi_2(p) = p'(0), \quad \varphi_3(p) = p(0) \quad (p \in V)$$

a) *(5 Punkte)* Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ eine Basis von V^* ist.

b) *(6 Punkte)* Bestimmen Sie die Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $\mathcal{B}^*$ die duale Basis zu $\mathcal{B}$ ist.

c) *(4 Punkte)* Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $p \mapsto p'$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ von V.

Bemerkung: Sollten Sie $\mathcal{B}$ in Teilaufgabe b) nicht gefunden haben, bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = (X^2+1, -X^2-2, 3X^2+X+3).$$

Lösung

a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, sodass $0 = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3$. Sei $p = a_0 + a_1X + a_2X^2$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3)(p) \\ &= \lambda_1(a_0 + \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{3}a_2) + \lambda_2 a_1 + \lambda_3 a_0. \end{aligned}$$

Ausgewertet bei $p = X^2$ folgt $\lambda_1 = 0$, ausgewertet bei $p = X$ und bei $p = 1$ folgt dann $\lambda_2 = 0$ bzw. $\lambda_3 = 0$. Also ist $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ eine linear unabhängige Menge der Kardinalität 3, also die Basis eines eine dreidimensionalen Unterraums von V^*. Da $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ ist $\dim V^* = \dim V = 3$ und somit stimmt der erzeugte Unterraum mit V^* überein und $\mathcal{B}^*$ ist eine Basis von V^*.

b) Die vorangegangene Rechnung zeigt $\varphi_i(3X^2) = \delta_{i1}$. Einsetzen liefert $\varphi_i(X - \frac{3}{2}X^2) = \delta_{i2}$ und $\varphi_i(1 - 3X^2) = \delta_{i3}$. Somit ist $\mathcal{B}^{**} = (\mathrm{ev}_{3X^2}, \mathrm{ev}_{X-\frac{3}{2}X^2}, \mathrm{ev}_{1-3X^2})$ eine duale Basis von V^{**} zu $\mathcal{B}^*$. Da die Abbildung $\mathrm{ev} : V \to V^{**}, p \mapsto \mathrm{ev}_p$, die einem Polynom den zugehörigen Evaluationshomomorphismus zuordnet, ein Isomorphismus ist, ist also $\mathcal{B} = (3X^2, X - \frac{3}{2}X^2, 1 - 3X^2)$ eine geordnete Basis von V und nach Konstruktion ist $\mathcal{B}^*$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis. Im Folgenden schreiben wir $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ für diese Basis.

c) Man berechnet für $T(p) = p'$

$$T(p_1) = 6X = -T(p_3) \text{ und } T(p_2) = 1 - 3X$$

und

$$6X = 3p_1 + 6p_2 \text{ sowie } 1 - 3X = -\frac{1}{2}p_1 - 3p_2 + p_3,$$

also folgt

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 6 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sollte die alternative Basis verwendet worden sein, und sei $\mathcal{B} = (q_1, q_2, q_3)$, dann berechnet man

$$\begin{aligned} q_1' &= 2X = 2q_3 - 6q_1, \\ q_2' &= -2X = -2q_3 + 6q_1, \\ q_3' &= 6X + 1 = 6q_3 - q_2 - 19q_1, \end{aligned}$$

und folglich ist

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -19 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

5. a) *(4 Punkte)* Seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $X, b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie: Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn das Gleichungssystem $AX = b$ genau eine Lösung hat.

b) *(3 Punkte)* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A nicht invertierbar?

Siehe nächstes Blatt!

c) *(8 Punkte)* Bestimmen Sie für λ wie in Teilaufgabe b):

(i) die Zeilenstufenform von A.

(ii) den Kern und das Bild von L_A.

Bemerkung: Sollten Sie λ in Teilaufgabe b) nicht bestimmt haben, lösen Sie diese Teilaufgabe für die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -3 & -8 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung

a) **"$\Rightarrow$":** Falls A invertierbar ist, dann gilt $Av = b \implies v = A^{-1}b$ und somit ist die Lösung v eindeutig bestimmt.

"$\Leftarrow$": Umgekehrt besitze das Gleichungssystem genau eine Lösung v. Da die Lösungsmenge von der Form $\mathcal{L}_{AX=b} = v + \mathrm{Ker}(L_A)$ ist, folgt also $\mathrm{Ker}(L_A) = \{0\}$, da wegen der Kürzungsregel gilt $v + w = v \implies w = 0$. Insbesondere ist $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ injektiv, und da jeder injektive Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums ein Automorphismus ist, ist L_A invertierbar, und somit A invertierbar, wie in der Vorlesung bewiesen.

b) Wir entwickeln nach der ersten Spalte und finden

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= -2(\lambda+2)^2. \end{aligned}$$

Somit ist die Matrix A genau dann nicht invertierbar, wenn $\lambda = -2$.

c) Wir wenden elementare Zeilenumformungen an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_2+2Z_4 \\ Z_3-3Z_4}]{Z_3-Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1+3Z_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Da elementare Zeilenumformungen Linksmultiplikation mit invertierbaren Matrizen entspricht, bleibt der Kern unter den elementaren Zeilenumformungen invariant. Insbesondere reicht es, den Kern der ZSF von A zu berechnen. Da der Rang von A gleich 2 ist, reicht es wegen der Dimensionsformel zwei linear unabhängige Lösungen des homogenen Gleichungssystems zu bestimmen. Man sieht leicht, dass $(2,1,0,0)$ und $(1,0,-2,1)$ linear unabhängige Lösungen sind, und folglich ist der Kern von A gegeben durch

$$\operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s+2t \\ t \\ -2s \\ s \end{pmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Wie oben argumentiert hat das Bild Dimension 2, und es reicht aus, zwei linear unabhängige Vektoren im Spaltenraum von A zu finden um das Bild zu beschreiben. Subtraktion der dritten von der vierten Spalte liefert $(2,2,-1,-1)$ im Spaltenraum und dieser Vektor ist sicher kein Vielfaches der ersten Spalte. Also ist

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s+2t \\ 2t \\ s-t \\ -t \end{pmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Falls die alternative Matrix verwendet wurde, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -3 & -8 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}Z_2]{\substack{Z_3-2Z_1 \\ Z_4+Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4-3Z_2]{\substack{Z_1-2Z_2 \\ Z_3+7Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich derselbe Kern, und man liest erneut ab

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t+2s \\ 2s \\ 2t-3s \\ -t+s \end{pmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. a) *(3 Punkte)* Geben Sie die Definition der Determinante einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

b) *(3 Punkte)* Seien $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ mit $m > n$. Zeigen Sie, dass $\det(AB^T) = 0$.

c) *(4 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie $\det(A_n)$ für

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta & & 0 \\ \alpha & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & & \alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),$$

das heisst, A_n hat Diagonaleinträge alle gleich $\alpha+\beta$, auf der oberen Nebendiagonalen sind die Einträge alle gleich β und auf der unteren Nebendiagonalen sind die Einträge alle gleich α.

Siehe nächstes Blatt!

d) *(5 Punkte)* Sei $A \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ und $M_A : M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ die lineare Abbildung gegeben durch $M_A(B) = AB$. Zeigen Sie, dass

$$\det(M_A) = (\det(A))^n$$

Lösung

a) Eine Determinante $\det : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ist eine Abbildung, die in den Zeilen linear (n-multilinear), alternierend und normiert ($\det(I_n) = 1$) ist.

b) Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass $\operatorname{Rang}(AB^T) = 0 \implies \det(AB^T) = 0$. Es reicht also zu zeigen, dass $\operatorname{Rang}(AB^T) = 0$ ist. Wir wissen, dass

$$\operatorname{Rang}(B^T) \leq \min\{m, n\} = n,$$

folglich

$$\begin{aligned}\operatorname{Rang}(AB^T) &= \dim \operatorname{Im}(AB^T) = \dim \operatorname{Im}(L_A|_{\operatorname{Im} L_{B^T}}) \\ &\leq \dim \operatorname{Im}(L_A) = \operatorname{Rang}(A) \leq n < m.\end{aligned}$$

Wegen $AB^T \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ besitzt AB^T also nicht-vollen Rang und somit ist $\det(AB^T) = 0$.

c) Es gelten $\det(A_1) = \alpha + \beta$ sowie

$$\det(A_2) = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2.$$

Annahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und es gelte für alle $1 \leq m \leq n$ die Formel

$$\det(A_m) = \sum_{k=0}^{m} \alpha^k \beta^{m-k}. \qquad (\star)$$

Wir behaupten, dass $\det(A_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha^k \beta^{n+1-k}$ ist.

Hierfür realisieren wir, dass

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & v \\ 0 & w & A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & s \\ t & A_n \end{pmatrix}$$

gilt für geeignete Vektoren v, w, s, t.

Entwicklung nach der ersten Zeile liefert also unter Verwendung der Formeln für

Bitte wenden!

Blockdreiecksmatrizen und der Induktionsvoraussetzung $(\star)$

$$\begin{aligned}
\det(A_{n+1}) &= (\alpha+\beta)\det(A_n) - \beta\det\begin{pmatrix}\alpha & v \\ 0 & A_{n-1}\end{pmatrix} \\
&= (\alpha+\beta)\det(A_n) - \alpha\beta\det(A_{n-1}) \\
&= (\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\beta^{n-k} - \alpha\beta\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\beta^{n-(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\alpha^{k+1}\beta^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n}\alpha^k\beta^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{k+1}\beta^{n+1-(k+1)} \\
&= \alpha^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\alpha^k\beta^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1}\alpha^k\beta^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Induktionsverankerung für $n=1$ und $n=2$ liefert vollständige Induktion nach n also, dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\det(A_n) = \sum_{k=0}^{n}\alpha^k\beta^{n-k}.$$

d) Sei $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, dann gilt $(M_A B)^{(j)} = L_A(B^{(j)})$. Definiere einen Isomorphismus $\psi : M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{m\times n}$ durch lineare Erweiterung von $E_{ij} \mapsto e_{i+(j-1)m}$, d.h. wir hängen die Spalten untereinander. Da diese Abbildung eine Basis auf eine Basis abbildet, handelt es sich um einen Isomorphismus. Folglich existiert genau ein Endomorphismus $T_A : \mathbb{K}^{mn} \to \mathbb{K}^{mn}$, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
M_{m\times n}(\mathbb{K}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "M_A"'] & \mathbb{K}^{nm} \arrow[d, "T_A"] \\
M_{m\times n}(\mathbb{K}) \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{K}^{nm}
\end{tikzcd}$$

Es gilt $M_A E_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ki}E_{kj}$, und folglich ist $T_A e_{i+(j-1)n} = \sum_{k=1}^{m} A_{kj}e_{k+(j-1)n}$. Die Darstellungsmatrix von T_A ist folglich eine Blockdiagonalmatrix mit n Kopien von A entlang der Diagonalen. Insbesondere ist $\det(T_A) = (\det A)^n$. Da $\det(M_A) = \det(\psi^{-1}\circ T_A\circ\psi) = \det(T_A)$, folgt die Behauptung.