

Name: _____

Legi-Nr.: _____

Prüfung
Analysis I/II D-BAUG
Winter 2018

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

1. (10 Punkte)

a) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Kurve

$$\gamma(t) = 2 \cos(4t) + 2 + i \sin(4t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

in der komplexen Ebene \mathbb{C} .

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^3 - (4 + 4i)z^2 + (2 + 9i)z + (1 - 5i).$$

c) (3 Punkte) Die Kurve γ teilt die komplexe Ebene \mathbb{C} in zwei Teilmengen: eine beschränkte Menge B und eine unbeschränkte Menge U .

Verwenden Sie Ihre Skizze aus Aufgabenteil **a)** um zu bestimmen, welche der in Aufgabenteil **b)** bestimmten Nullstellen in B und welche in U liegen.

2. (10 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale und Grenzwerte.

a) (3 Punkte)

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) dx$$

b) (4 Punkte)

$$\int \frac{x^2 + x + 8}{x^3 - x^2 + 9x - 9} dx$$

c) (3 Punkte)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) - x}{\sin(x^3)}$$

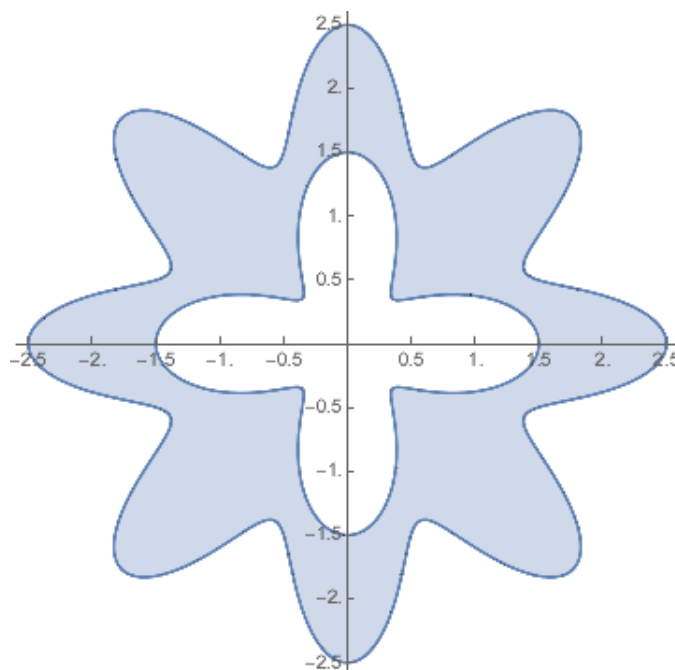
3. (10 Punkte) Wir betrachten die Funktion $f : [0, 9] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 6\sqrt{9-x} + 3\sqrt{x}.$$

- a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(x)$ des Funktionsgraphen von f für $x \in (0, 9)$. Sie müssen den Ausdruck **nicht** vereinfachen!
- b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Stellen $x \in (0, 9)$, an welchen die Krümmung $\kappa(x)$ des Funktionsgraphen mit der zweiten Ableitung $f''(x)$ übereinstimmt. Berechnen Sie die Krümmung an diesen Stellen.
- c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die globalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion f auf dem Intervall $[0, 9]$ und die zugehörigen Funktionswerte.

4. **Multiple-Choice (10 Punkte):** Es gibt zu jeder Frage nur **eine** richtige Antwort. Kreuzen Sie Ihre Antwort bitte **auf dem Aufgabenblatt** an. Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte. Eine falsche Antwort, mehrere Antworten oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

a) Gegeben sei das folgende Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$:



Dann gilt für jede stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iint_G f(x, y) \, dx \, dy = \dots$$

Name:

Legi-Nr.:

(I)

$$\dots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(4\phi)} f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) r \, dr \, d\phi.$$

(II)

$$\dots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4r)}^{2+\frac{1}{2}\cos(4r)} f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) r \, d\phi \, dr.$$

(III)

$$\dots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(8\phi)} f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) r \, dr \, d\phi.$$

(IV)

$$\dots = \int_0^{2\pi} \int_{1+\frac{1}{2}\cos(4\phi)}^{2+\frac{1}{2}\cos(8\phi)} f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \, dr \, d\phi.$$

b) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Oberfläche und sei $K = \partial S$ ihr Rand mit der von S induzierten Orientierung. Dann gilt

$$\int_K \begin{pmatrix} y(z-1) \\ x(z+1) \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = \dots$$

(I)

$$\iint_S \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\vec{S}$$

(II)

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\vec{S}$$

(III)

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\vec{S}$$

(IV)

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{S}$$

- c) Wir betrachten die Funktion $g(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ und das Vektorfeld $\vec{F}(x, y) = \nabla g(x, y)$. Weiter sei K die durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

parametrisierte Kurve in \mathbb{R}^2 . Dann gilt

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \dots$$

- (I) -8
 (II) -7
 (III) 0
 (IV) 6
- d) Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{R}^2 , dessen Rand durch eine einfache geschlossene Kurve K im Gegenuhrzeigersinn parametrisiert wird. Wir interpretieren D als eine dünne Platte mit Dichte $\rho \equiv 1$. Ferner wollen wir annehmen, dass auch die Gesamtmasse von D gleich 1 ist, d.h.

$$\iint_D 1 \, dA = 1.$$

Welches der folgenden Integrale berechnet **NICHT** die x -Koordinate des Schwerpunktes von D ?

- (I) $\frac{1}{2} \oint_K -xy \, dx$
 (II) $\oint_K -xy \, dx$
 (III) $\iint_D x \, dA$
 (IV) $\frac{1}{2} \oint_K x^2 \, dy$

Name: _____

Legi-Nr.: _____

e) Welche Funktion ist die Lösung des folgenden Anfangswertproblems?

$$y' = 2xy + e^{x^2+x}, \quad y(0) = 2$$

(I) $y(x) = 2e^{x^2}$

(II) $y(x) = e^{x^2+x} + e^{x^2}$

(III) $y(x) = 2e^{x^2+x}$

(IV) $y(x) = e^{x^2+x}$

5. (12 Punkte) In dieser Aufgabe kommt es nur auf das Endresultat und nicht auf den Rechenweg an. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in die dafür vorgesehene Box. Jede richtige Antwort gibt 3 Punkte. Jede falsche Antwort oder keine Antwort gibt 0 Punkte.

Es wird nur das Ergebnis in der Box bewertet!

a) Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ c & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig?

 $c =$ b) Wir betrachten die Kurve K mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = (\sin(\pi t), \sinh t + \cosh t), \quad t \in [0, 1]$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xye^{x^2} \\ e^{x^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Arbeit W des Vektorfeldes \vec{F} entlang der Kurve K . $W =$ c) Bestimmen Sie den Parameter $C \in \mathbb{R}$, so dass die Fläche

$$F_C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - 4x + y^2 - 8y + C\}$$

die xy -Ebene (tangential) berührt. $C =$

d) Vervollständigen Sie den folgenden Wechsel in Polarkoordinaten (r, ϕ) .

$$\int_{-1}^0 \int_0^{-x} x^2 y + y^3 \, dy \, dx = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \int_0^{\boxed{}} \boxed{} \, dr \, d\phi.$$

6. (10 Punkte) Finden Sie den Punkt auf der Schnittkurve der Ebene $2y + 4z = 5$ mit dem Kegel $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$, welcher den kleinsten Abstand zum Ursprung $(0, 0, 0)$ hat.

7. (10 Punkte) Zu einem Parameter $a \geq 0$ betrachten wir einen Balken der Form

$$B(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - a \leq x \leq a - y^2, 0 \leq z \leq 7\}$$

in \mathbb{R}^3 mit konstanter Dichte $\rho = 1$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment $I_z(a)$ des Balkens $B(a)$ bezüglich der z -Achse in Abhängigkeit von dem Parameter $a \geq 0$.

8. (10 Punkte) Wir betrachten den Körper

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

und das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^4 e^{z^2} \\ y^2 e^z \\ z^3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss von \vec{F} nach Aussen durch die Oberfläche von V .

9. (10 Punkte) Wir betrachten die folgende inhomogene lineare Differentialgleichung vierten Grades

$$y''''(x) + y''(x) = 40 e^{-2x}. \quad (\text{DGL})$$

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Form einer Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (DGL).

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (DGL), welche auf $[0, +\infty)$ beschränkt ist und die Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = -6, \\ y''(0) = 9, \end{cases}$$

erfüllt.