

## Lösungen SS 12

1. (a) Durch Erweitern findet man

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{4-8i}{3+4i} = \frac{4-8i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} && [1 \text{ Punkt}] \\
 &= \frac{12-16i-24i-32}{9+16} = \frac{-20-40i}{25} \\
 &= -\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i.
 \end{aligned}$$

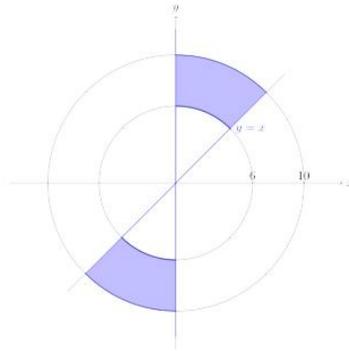
Somit folgt  $\Re(z) = -\frac{4}{5}$  und  $\Im(z) = -\frac{8}{5}$ .

[1 Punkt]

(b)

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \arg((1+i)^2) \leq \arg(z^2) \leq \arg(-7) \\ \left| \frac{1+2\sqrt{2}i}{e^{i\pi}} \right| \leq \left| \frac{z}{(1+i)^2} \right| \leq |3+4i| \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} 2 \cdot \frac{\pi}{4} \leq \arg(z^2) \leq \pi \\ \sqrt{1+8} \leq \frac{|z|}{2} \leq \sqrt{9+16} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} 2 \cdot \frac{\pi}{4} \leq 2 \arg(z) \leq \pi & \text{oder} & \begin{cases} 2 \cdot \frac{\pi}{4} \leq 2 \arg(z) - 2\pi \leq \pi \\ 6 \leq |z| \leq 10 \end{cases} \\ 6 \leq |z| \leq 10 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} & \text{oder} & \begin{cases} \frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2} \\ 6 \leq |z| \leq 10 \end{cases} \\ 6 \leq |z| \leq 10 \end{cases}
 \end{aligned}$$

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]



[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

2. (a) Nach Bernoulli de l'Hôpital gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\pi \cos \pi x} = \frac{1}{\pi \cdot (-1)} = -\frac{1}{\pi} .$$

[1 Punkt]

(b) Variante 1: Nach der Kettenregel und der Produktregel gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(\sin(x)) \cdot \cos(x) , \\ f''(x) &= -\cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)^2 + \sin(\sin(x)) \cdot \sin(x) , \\ f'''(x) &= \sin(\sin(x)) \cdot \cos(x)^3 + \cos(\sin(x)) \cdot 2 \cos(x) \sin(x) \\ &\quad + \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x) \sin(x) + \sin(\sin(x)) \cdot \cos(x) \\ &= \sin(\sin(x)) [\cos(x)^3 + \cos(x)] + 3 \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x) \sin(x) , \\ f''''(x) &= \cos(\sin(x)) \cdot [\cos(x)^4 + \cos(x)^2] - \sin(\sin(x)) [3 \cos(x)^2 \sin(x) + \sin(x)] \\ &\quad - 3 \sin(\sin(x)) \cdot \cos(x)^2 \sin(x) + 3 \cos(\sin(x)) \cdot [-\sin(x)^2 + \cos(x)^2] \\ &= \cos(\sin(x)) \cdot [\cos(x)^4 + 4 \cos(x)^2 - 3 \sin(x)^2] \\ &\quad - \sin(\sin(x)) \cdot [6 \cos(x)^2 \sin(x) + \sin(x)] . \end{aligned}$$

[3 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

Somit folgt

$$f(0) = 1 , f'(0) = 0 , f''(0) = -1 , f'''(0) = 0 , f''''(0) = 1 \cdot [1 + 4] = 5 .$$

Das Taylorpolynom vierter Ordnung der Funktion  $f(x) = \cos(\sin(x))$  um  $x_0 = 0$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_f^4(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{24} \cdot x^4 . \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Variante 2: Die Potenzreihen von Sinus und Cosinus sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots , \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots . \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Daraus folgt

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots\right)^4}{4!} \mp \dots$$

[1 Punkt]

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{x^2}{4} + 2 \cdot \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{24} \cdot x^4 + O(x^6) . \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Somit ist das Taylorpolynom vierter Ordnung der Funktion  $f(x) = \cos(\sin(x))$  um  $x_0 = 0$  gegeben durch

$$T_f^4(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{24} \cdot x^4 .$$

[1 Punkt]

3. Die Bogenlänge  $L$  des Graphen von einer Funktion  $f(x)$  über das Intervall  $[a, b]$  ist gegeben durch

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

[1 Punkt]

Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \int_e^x \underbrace{\sqrt{\ln^2 t - 1}}_{=:g(t)} dt .$$

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt

[1 Punkt, für die Erwähnung vom Satz]

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (G(x) - G(e)) = \frac{d}{dx} G(x) = g(x) ,$$

wobei  $G$  eine Stammfunktion von  $g$  ist.

[1 Punkt, für richtige Anwendung]

Somit ist die Bogenlänge des Graphen von  $f$  über das Intervall  $[e, e^3]$  gegeben durch das Integral

$$\begin{aligned} L &= \int_e^{e^3} \sqrt{1 + (\sqrt{\ln^2 x - 1})^2} dx && [1 \text{ Punkt}] \\ &= \int_e^{e^3} \sqrt{1 + \ln^2 x - 1} dx \\ &= \int_e^{e^3} \ln x dx && [1 \text{ Punkt}] \\ &= x(\ln x - 1) \Big|_e^{e^3} \\ &= e^3(\ln(e^3) - 1) = 2e^3 . \end{aligned}$$

[1 Punkt]

4. (a) Zweimal partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow} dx &= -\frac{e^{-2x}}{2} \sin(6x) + 3 \int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\cos(6x)}_{\downarrow} dx \\ &= -\frac{e^{-2x}}{2} \sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{2} \cos(6x) - 9 \int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow} dx . \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 10 \int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow} dx &= -\frac{e^{-2x}}{2} \sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{2} \cos(6x) + c \\ \int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow} dx &= -\frac{e^{-2x}}{20} \sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{20} \cos(6x) + \tilde{c} . \end{aligned}$$

[1 Punkt]

(b) Mit der Substitution  $\sqrt{x-1} = u$ ,  $\frac{1}{2\sqrt{x-1}} dx = du$  folgt es

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{u^2+1} du && [1 \text{ Punkt}] \\ &= [2 \arctan u] \Big|_1^{\sqrt{3}} \\ &= 2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

[1 Punkt]

(c) Variante 1:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx &= \int \frac{3x^2 - 2x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx - \int \frac{5x}{x^3 - x^2 - 2x} dx \\ &= \ln(|x^3 - x^2 - 2x|) - 5 \int \frac{1}{x^2 - x - 2} dx. \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Die Partialbruchzerlegung  $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{1}{x^2-x-2}$  liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -2A + B = 1. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich  $A = \frac{-1}{3}$  und  $B = \frac{1}{3}$ .

[1 Punkt]

Somit folgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx &= \ln(|x^3 - x^2 - 2x|) - 5 \left[ \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx \right] \\ &= \ln(|x^3 - x^2 - 2x|) - \frac{5}{3} \ln(|x-2|) + \frac{5}{3} \ln(|x+1|) + c. \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Variante 2: Direkt mit Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A + B + C = 3, \\ -A + B - 2C = -7, \\ -2A = -2. \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung folgt sofort, dass  $A = 1$ . Das System reduziert sich auf  $\begin{cases} B + C = 2, \\ B - 2C = -6, \end{cases}$  die  $B = 2 - C$  impliziert. Somit folgt  $2 - C - 2C = -6 \Rightarrow C = \frac{8}{3}, B = \frac{-2}{3}$ .

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx &= \int \frac{1}{x} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{8}{3} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \ln(|x|) - \frac{2}{3} \ln(|x-2|) + \frac{8}{3} \ln(|x+1|) + c. \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Bemerkung: Variante 1 und 2 ergeben das gleiche Resultat, weil es gilt

$$\begin{aligned} &\ln(|x^3 - x^2 - 2x|) - \frac{5}{3} \ln(|x-2|) + \frac{5}{3} \ln(|x+1|) + c = \\ &= \ln(|x| \cdot |x-2| \cdot |x+1|) - \frac{5}{3} \ln(|x-2|) + \frac{5}{3} \ln(|x+1|) + c \\ &= \ln(|x|) + \ln(|x-2|) + \ln(|x+1|) - \frac{5}{3} \ln(|x-2|) + \frac{5}{3} \ln(|x+1|) + c \\ &= \ln(|x|) - \frac{2}{3} \ln(|x-2|) + \frac{8}{3} \ln(|x+1|) + c. \end{aligned}$$

5. Hom. Lös.: Durch Separation erhalten wir

$$\begin{aligned} y'(x)(x+1) + y(x) &= 0 \\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= \frac{-1}{x+1} \\ \int \frac{dy}{y} &= - \int \frac{dx}{x+1} && [1 Punkt] \\ \Rightarrow \ln|y| &= -\ln|x+1| + c \\ \Rightarrow y_{hom}(x) &= \frac{K}{x+1}, \quad \text{mit } K = \pm e^c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Part. Lös.:

Variante 1: Ansatz:  $y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

Einsetzen liefert  $(3ax^2 + 2bx + c)(x + 1) + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3$ . Durch Koeffizientenvergleich folgt es

$$\begin{cases} 3a + a = 1, \\ 3a + 2b + b = 0, \\ 2b + c + c = 0, \\ c + d = 0. \end{cases}$$

Daraus folgt  $a = c = \frac{1}{4}, b = d = \frac{-1}{4} \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{4} [x^3 - x^2 + x - 1]$ .

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

Die Allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = \frac{K}{x+1} + \frac{1}{4} [x^3 - x^2 + x - 1] .$$

Die Anfangsbedingung  $y(0) = \sqrt{5}$  sagt, dass  $K = \sqrt{5} + \frac{1}{4}$  sein muss.

[1 Punkt]

Somit ist die einzige Lösung des Anfangswertproblem

$$y(x) = \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{1}{4} [x^3 - x^2 + x - 1] .$$

[1 Punkt]

Variante 2: Mit Variation der Konstante Methode folgt  $y_p(x) = \frac{K(x)}{x+1}$ . Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} \left[ \frac{K'(x)}{x+1} - \frac{K(x)}{(x+1)^2} \right] (x+1) + \frac{K(x)}{x+1} &= x^3 & [1 \text{ Punkt}] \\ K'(x) &= x^3 \\ K(x) &= \frac{x^4}{4} . \end{aligned}$$

Daraus folgt  $y_p(x) = \frac{x^4}{4(x+1)}$ .

[1 Punkt]

Die Allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = \frac{K}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)} .$$

Die Anfangsbedingung  $y(0) = \sqrt{5}$  sagt, dass  $K = \sqrt{5}$  sein muss.

[1 Punkt]

Somit ist die einzige Lösung des Anfangswertproblem

$$y(x) = \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)} .$$

[1 Punkt]

Bemerkung: Variante 1 und 2 ergeben das gleiche Resultat, weil es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)} &= \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4 - 1 + 1}{4(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{x^4 - 1}{4(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1)}{4(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{1}{4} [x^3 - x^2 + x - 1] . \end{aligned}$$

6. Sei  $S$  die Fläche des Graph von  $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$  und sei  $T(x, y, z) = x^2y + y^2z + 4x + 14y + z$  die Temperatur.

i) Die Gleichung der Tangentialebene  $\Sigma$  zur Oberfläche  $S$  im Punkt  $(0, 0, 10)$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} -f_x(0, 0, 10)x - f_y(0, 0, 10)y + z &= 10 \\ 2x|_{x=y=0, z=10} \cdot x + 2y|_{x=y=0, z=10} \cdot y + z &= 10 \\ z &= 10 \end{aligned}$$

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

Bemerkung: der Graph von  $f(x, y)$  ist ein nach unten geöffnetes Paraboloid, der symmetrisch bzgl. der  $z$ -Achse liegt. Sein Maximum ist der Punkt  $(0, 0, 10)$ , deshalb ist die Tangentialebene an dieser Stelle horizontal.

ii) Der Gradient von der Temperatur im Punkt  $(0, 0, 10)$

$$\nabla T(x, y, z)|_{x=y=0, z=10} = \begin{pmatrix} 2xy + 4 \\ x^2 + 2yz + 14 \\ y^2 + 1 \end{pmatrix} |_{x=y=0, z=10} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

[1 Punkt]

Die maximale Richtungsableitung von  $T(x, y, z)$  auf  $\Sigma$  löst die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \right] &= \frac{d}{dt} [4 \cos t + 14 \sin t] = 0 \\ -4 \sin t + 14 \cos t &= 0 \\ t_1 = \arctan\left(\frac{7}{2}\right) &\quad \text{oder} \quad t_2 = \arctan\left(\frac{7}{2}\right) + \pi . \end{aligned}$$

[1 Punkt, für die Richtungsableitung]

[1 Punkt, für das Ableiten und gleich Null setzen]

Da die zweite Ableitung  $-4 \cos t - 14 \sin t$  ist und  $\cos(t_1), \sin(t_1) > 0$ ,  $\cos(t_2), \sin(t_2) < 0$ , folgt es, dass  $t_1$  ein Maximum (die zweite Ableitung ist negativ) bzw.  $t_2$  ein Minimum (die zweite Ableitung ist positiv) ist.

Die Richtung in  $\Sigma$ , in welcher die Änderung von  $T(x, y, z)$  maximal ist, ist somit  $(2, 7, 0)$ .

[1 Punkt]

7. Zuerst suchen wir die kritischen Punkten im Inneren von  $Q$ .

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \vec{0} \\ \begin{cases} 4(x^2 + y^2 - 1)x &= 0 \\ 4(x^2 + y^2 - 1)y &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Fall 1:  $x = 0, y = 0 \rightsquigarrow P_1 = (0, 0)$ .

Fall 2:  $x = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \rightsquigarrow P_2 = (0, 1)$ .

Fall 3:  $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \rightsquigarrow$  Eckpunkten  $P_3 = (-1, 0)$  und  $P_4 = (1, 0)$ .

Fall 4:  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Obere Halbkreis  $K$  mit Zentrum  $(0, 0)$  und Radius 1.

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

Variante 1: Parametrisierung von  $\partial Q$ .

- $y = 2 - 2x^2 \Rightarrow f(x, 2 - 2x^2) = (x^2 + 4 - 8x^2 + 4x^4 - 1)^2 = (4x^4 - 7x^2 + 3)^2$ .  
Daraus folgt:

$$\partial_x f(x, 2 - 2x^2) = 0 \Rightarrow 2(4x^4 - 7x^2 + 3)(16x^3 - 14x) = 0 .$$

Somit gilt entweder  $4x^4 - 7x^2 + 3 = 0$ , die zu  $x = \pm 1$  (Eckpunkten) oder  $x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$  ( $\rightsquigarrow P_{5,6} = (\pm\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2} \in K)$ ) führt oder  $16x^3 - 14x = 0$ , die zu  $x = 0$  ( $\rightsquigarrow P_7 = (0, 2)$ ) oder  $x = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}$  ( $\rightsquigarrow P_{8,9} = (\pm\sqrt{\frac{7}{8}}, \frac{1}{4})$ ) führt .

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

- $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow f(x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}) = (x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} - 1)^2 = (\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4})^2 = \frac{1}{16}(x^4 + 2x^2 - 3)^2$ . Daraus folgt:

$$\partial_x f(x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 8(x^4 + 2x^2 - 3)(4x^3 + 4x) = 0 .$$

Somit gilt entweder  $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ , die zu  $x = \pm 1$  (Eckpunkten) oder  $x^2 = -3$  ( $\rightsquigarrow$  keine reelle Lösung) führt oder  $4x^3 + 4x = 0$ , die zu  $x = 0$  ( $\rightsquigarrow P_{10} = (0, -\frac{1}{2})$ ) oder  $x^2 = -1$  ( $\rightsquigarrow$  keine reelle Lösung) führt .

[1 Punkt ]

Variante 2: Lagrangian Multiplikatoren:

- Auf  $g_1(x, y) := 2 - 2x^2 - y = 0$  stellen wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g_1(x, y) \\ g_1(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2 + y^2 - 1) = \lambda(-4x) \\ 4y(x^2 + y^2 - 1) = \lambda(-1) \\ 2 - 2x^2 - y = 0 \end{cases}$$

Fall 1:  $x = 0$ . Dann gilt  $y = 2$  ( $\rightsquigarrow P_7 = (0, 2)$ ).

Fall 2:  $x \neq 0$ . Dann entweder  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  ( $\rightsquigarrow$  Eckpunkten  $P_{3,4} = (\pm 1, 0)$  und  $P_{5,6} = (\pm\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2} \in K)$ ) oder  $x^2 + y^2 - 1 \neq 0$ , dann  $y = 1/4$  ( $\rightsquigarrow P_{8,9} = (\pm\sqrt{\frac{7}{8}}, \frac{1}{4})$ ).

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

- Auf  $g_2(x, y) := \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} - y = 0$  stellen wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g_2(x, y) \\ g_2(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2 + y^2 - 1) = \lambda(x) \\ 4y(x^2 + y^2 - 1) = \lambda(-1) \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} - y = 0 \end{cases}$$

Fall 1:  $x = 0$ . Dann gilt  $y = -\frac{1}{2}$  ( $\rightsquigarrow P_{10} = (0, -\frac{1}{2})$ ).

Fall 2:  $x \neq 0$ . Dann entweder  $y = -1$  (ausserhalb vom Gebiet G) oder  $x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow P_{3,4} = (\pm 1, 0)$  Eckpunkten).

[1 Punkt]

Eckpunkte Eckpunkten  $P_3 = (-1, 0)$  und  $P_4 = (1, 0)$  überprüfen.

[1 Punkt]

Funktionswerte:

$$\begin{aligned} f(P_1) &= 1 \\ f(P_2) &= f(P_{3,4}) = f(P_{5,6}) = f(\text{Kreis } K) = 0, \\ f(P_7) &= 9, \\ f(P_{8,9}) &= \frac{1}{256} \\ fP_{10} &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Minima  $\rightsquigarrow$  K.

Maximum  $P_7$

[1 Punkt]

## 8. Variante 1: Parametrisierung von $S$

$$r(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 2 \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{und} \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

[1 Punkt]

Daraus folgt

$$r_\varphi \times r_\theta = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ -2 \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ 2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} .$$

$r_\varphi \times r_\theta$  zeigt tatsächlich nach aussen!

[2 Punkt]

Bemerkung: es ist nicht notwendig  $|r_\varphi \times r_\theta| = 4 \sin^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta$  zu rechnen.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{F}(r(\theta, \varphi)) \cdot \frac{r_\varphi \times r_\theta}{|r_\varphi \times r_\theta|} |r_\varphi \times r_\theta| d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \cos \varphi \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ 2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

[1 Punkt]

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi - 2 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi - \sin \theta \cos \theta) d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (6 \sin^2 \varphi - 2) \left[ -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 2\pi \left[ \frac{\cos^2 \theta}{2} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (6 \sin^2 \varphi - 2) d\varphi - 2\pi \frac{1}{2} \\ &= 4 \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right] \Big|_0^{2\pi} - \frac{8\pi}{3} - \pi \\ &= 4\pi - \frac{8\pi}{3} - \pi \\ &= \frac{\pi}{3} . \end{aligned}$$

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

Variante 2: Sei  $B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$  (den Normalenvektor zeigt nach unten).

[1 Punkt]

Nach dem Satz von Gauss, da  $\operatorname{div} \vec{F} = 2 - 1 + 0 = 1$ , gilt

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_B \vec{F} \cdot d\vec{B} &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV \\ &= \text{Volumen Halbellipsoid} && [2 \text{ Punkt}] \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 && [1 \text{ Punkt}] \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \frac{4}{3}\pi - \iint_B \vec{F} \cdot d\vec{B} \\ &= \frac{4\pi}{3} - \iint_B \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx dy \\ &= \frac{4\pi}{3} - \text{Fäche}(B) \\ &= \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

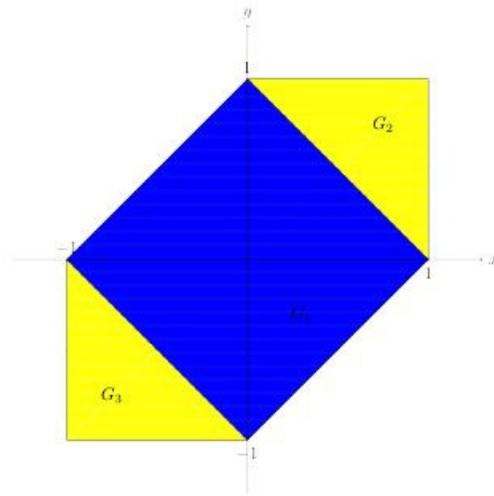
9. Die Gesamtladung des Gebiets  $G$  ist gegeben durch

$$\iint_G \sigma(x, y) dx dy .$$

[1 Punkt]

Da für die Ladungsdichte gelten

$$\begin{aligned} \sigma(-x, y) &= -\sigma(x, y) , \\ \sigma(x, -y) &= -\sigma(x, y) , \\ \sigma(-x, -y) &= \sigma(x, y) , \end{aligned}$$



[1 Punkt]

folgt es

$$\begin{aligned}
 \iint_G \sigma(x, y) \, dx \, dy &= \underbrace{\iint_{G_1} \sigma(x, y) \, dx \, dy}_{=0} + \iint_{G_2} \sigma(x, y) \, dx \, dy + \iint_{G_3} \sigma(x, y) \, dx \, dy \\
 &= 2 \iint_{G_2} \sigma(x, y) \, dx \, dy
 \end{aligned}$$

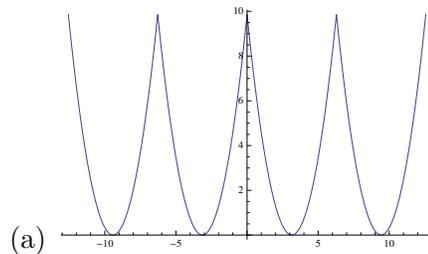
[1 Punkt]

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 \int_{-x+1}^1 xy(x^2 + y^2) dy dx && [1 \text{ Punkt}] \\
&= 2 \int_0^1 \left[ x^3 \frac{y^2}{2} + x \frac{y^4}{4} \right] \Big|_{-x+1}^1 \\
&= 2 \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^4}{4} \right] dx \\
&= 2 \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{2} + x^4 - \frac{x^5}{2} - \frac{x^5}{4} + x^4 - \frac{3x^3}{2} + x^2 - \frac{x}{4} \right] dx \\
&= 2 \int_0^1 \left[ -\frac{3}{4}x^5 + 2x^4 - \frac{3}{2}x^3 + x^2 \right] dx \\
&= 2 \left[ -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right] \\
&= 2 \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{15} .
\end{aligned}$$

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

10. Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x - \pi)^2 & \text{für } x \in [0, 2\pi) \\ f(x + 2\pi) & \text{für alle } x \end{cases} .$$



Da  $f(x)$  gerade ist (d.h.  $f(x) = f(-x) \forall x$ ), hat die Fourierreihe von  $f$  auf das Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$  die Gestalt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) , \quad [1 \text{ Punkt}]$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx.\end{aligned}$$

[1 Punkt]

Rechnen wir die Koeffizienten  $a_k$  explizit aus:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 dx \\ &= \frac{1}{6\pi} (x - \pi)^3 \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi^3 - (-\pi)^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}\end{aligned}$$

[1 Punkt]

und

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{(x - \pi)^2}_{\downarrow} \underbrace{\cos(kx)}_{\uparrow} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \underbrace{\frac{\sin(kx)}{k} (x - \pi)^2 \Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{2}{k} \int_0^{2\pi} \underbrace{(x - \pi)}_{\downarrow} \underbrace{\sin(kx)}_{\uparrow} dx \right] \\ &= -\frac{2}{k\pi} \left[ \underbrace{\frac{-\cos(kx)}{k} (x - \pi) \Big|_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(kx)}_{=0} dx \right] \\ &= -\frac{2}{k\pi} \frac{-\pi - \pi}{k} = \frac{4}{k^2}.\end{aligned}$$

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]

$$\implies f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos(kx) . \quad (1)$$

(b) Setzen wir  $x = 0$  in der Gleichung (??) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \\ \Leftrightarrow \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} &= \frac{2\pi^2}{3} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6} . \end{aligned}$$

[2 Punkt, -1 Punkt pro Fehler]