Lösung

1. [**10 Punkte**] Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) > 0 \right\}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie das Gebiet B in der komplexen Ebene.

Für $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{z+2}{iz} &= \frac{x+iy+2}{i(x+iy)} = \frac{x+iy+2}{ix-y} = \frac{(-ix-y)(x+iy+2)}{(-ix-y)(ix-y)} \\
&= \frac{-ix^2+xy-2ix-xy-iy^2-2y}{x^2+y^2} \\
&= \frac{-2y}{x^2+y^2} + \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} i.
\end{aligned}$$

Das Gebiet B ist damit gegeben durch

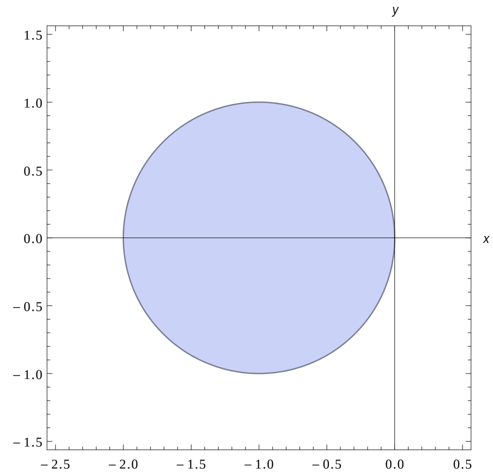
$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) = \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0.$$

Umgeformt ergibt das

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) = \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0 \\
\Leftrightarrow\ & -2x-x^2-y^2 > 0 \\
\Leftrightarrow\ & 0 > x^2+2x+y^2 \\
\Leftrightarrow\ & 0 > (x+1)^2-1+y^2 \\
\Leftrightarrow\ & 1 > (x+1)^2+y^2.
\end{aligned}$$

Das Gebiet B ist also das Innere des Kreises mit Mittelpunkt $(-1, 0)$ und Radius 1. Der Rand gehört nicht zur Menge.

Bitte wenden!



b) Das Polynom $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1. Bestimmen Sie alle Nullstellen dieses Polynoms in Normal- und in Polarform.

Da komplexe Nullstellen immer in komplex konjugierten Paaren auftreten, wenn die Koeffizienten des Polynoms reell sind, hat das Polynom zwei Nullstellen von der Form

$$z_{1,2} = -1 \pm iy.$$

Somit müssen wir vom Polynom einen Faktor der Form

$$(z + 1 + iy)(z + 1 - iy) = z^2 + 2z + 1 + y^2$$

abspalten können. Polynomdivision ergibt

$$\begin{aligned} \left(z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6\right) : (z^2 + 2z + 1 + y^2) &= z + \cdots \\ \left(\frac{3}{2}z^2 + (6 - y^2)z + 6\right) : (z^2 + 2z + 1 + y^2) &= z + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Es bleibt also der Rest

$$(3 - y^2)z + \frac{9}{2} - \frac{3y^2}{2}$$

übrig und dieser muss gleich 0 sein. Es ergibt sich also $y = \pm\sqrt{3}$ und die drei Nullstellen lauten in Normalform

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = -\frac{3}{2}.$$

In Polarform lauten diese somit

$$z_1 = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad z_2 = 2e^{\frac{-2\pi i}{3}}, \quad z_3 = \frac{3}{2}e^{\pi i}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Welche dieser Nullstellen befinden sich in B?

In **1.a)** haben wir gesehen, dass alle Punkte $z = x + iy$ in B die Ungleichung

$$1 > (x+1)^2 + y^2$$

erfüllen müssen. Es folgt $z_1 \notin B$, $z_2 \notin B$, $z_3 \in B$.

Bitte wenden!

2. [**10 Punkte**] Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

Da der Integrand gerade ist und $\sin x \geq 0$, $0 \leq x \leq \pi$, gilt

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Weiter erhalten wir mit der Substitution $t = \cos x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int_{1}^{-1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \arctan(t)\big|_{-1}^{1} = \arctan(1) - \arctan(-1) \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$I = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

b) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x-7}{(x+2)^2-9}\,\mathrm{d}x$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:

Der Nenner hat die Nullstellen

$$(x+2)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x+2 = \pm 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ oder } x = -5,$$

dies führt auf den Ansatz

$$\begin{aligned}&\frac{x-7}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} \\ &\Leftrightarrow x-7 = A(x+5) + B(x-1) \\ &\Leftrightarrow (A+B-1)x + (5A-B+7) = 0 \\ &\Leftrightarrow B = 1-A \text{ und } 5A-1+A+7 = 0 \\ &\Leftrightarrow A = -1 \text{ und } B = 2.\end{aligned}$$

Alternativ kann man in die Gleichung

$$x-7 = A(x+5) + B(x-1)$$

Siehe nächstes Blatt!

auch $x = 1$ und $x = -5$ einsetzen um $A = -1$ und $B = 2$ zu erhalten. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x-7}{(x+2)^2-9}\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 \frac{-1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{2}{x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= -\ln(x-1)\big|_2^3 + 2\ln(x+5)\big|_2^3 \\
&= -\ln(2) + \ln(1) + 2\ln(8) - 2\ln(7) \\
&= -\ln(2) + \ln(64) - \ln(49) \\
&= \ln\left(\frac{32}{49}\right).
\end{aligned}$$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\cos(1-x^2)}{(1-x)^2}$

In den Schritten $(*)$ wenden wir jeweils de L'Hôpital an, weil der Ausdruck die Form "$\frac{0}{0}$" hat:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(1-x^2)}{(1-x)^2} &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-2x\sin(1-x^2)}{-2(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x\sin(1-x^2)}{1-x} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-x^2) - 2x^2\cos(1-x^2)}{-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \left[-\underbrace{\sin(1-x^2)}_{\to 0} + 2x^2 \underbrace{\cos(1-x^2)}_{\to 1} \right] \\
&= 2.
\end{aligned}$$

3. [**10 Punkte**] Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) - y'(x) = 0,$$

wobei $y^{(4)}(x)$ die vierte Ableitung von y nach x bezeichnet und bestimmen Sie daraus alle Lösungen, welche

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

erfüllen.

Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 - \lambda = \lambda(\lambda^3 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \overset{!}{=} 0.$$

Daraus folgt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Die reellen Fundamentallösungen sind also

$$1,\ e^x,\ e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),\ e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = C_1 + C_2e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

Für $x \to \infty$ gilt $e^x \to \infty$ und $e^{-\frac{1}{2}x} \to 0$, die Bedingung $\lim_{x\to\infty} y(x) = 2$ impliziert also $C_1 = 2$ und $C_2 = 0$, also

$$y(x) = 2 + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

Die Bedingung $y(0) = 1$ ergibt

$$1 = y(0) = 2 + C_3 \quad \Leftrightarrow \quad C_3 = -1,$$

also

$$y(x) = 2 + e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und damit ergibt die Bedingung $y'(0) = 0$

$$0 = y'(0) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} C_4 \quad \Leftrightarrow \quad C_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Damit erhalten wir die eindeutige Lösung

$$y(x) = 2 - e^{-\frac{1}{2}x} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right).$$

Bitte wenden!

4. [**10 Punkte**] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn Ihre Antwort richtig ist, -1 falls Ihre Antwort falsch ist und 0 falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

a) Durch

$$\int_1^3 \int_{-y}^0 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \int_{-x}^3 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ist ein korrekter Wechsel der Integrationsreihenfolge gegeben.

WAHR	FALSCH	
☐	☒	(Verschiedene Integrationsgebiete)

---

b) Das Gebiet

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

ist ein Achtel einer Vollkugel.

WAHR	FALSCH	
☐	☒	(z.B. hängt z nicht von y ab)

---

c) Sei $\mathbf{F} = (2x, -y)$ und C die Ellipse mit Halbachsen 2 und 3 und Mittelpunkt $(3,2)$ im Gegenuhrzeigersinn orientiert, so gilt $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$.

WAHR	FALSCH	
☒	☐	$(\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0)$

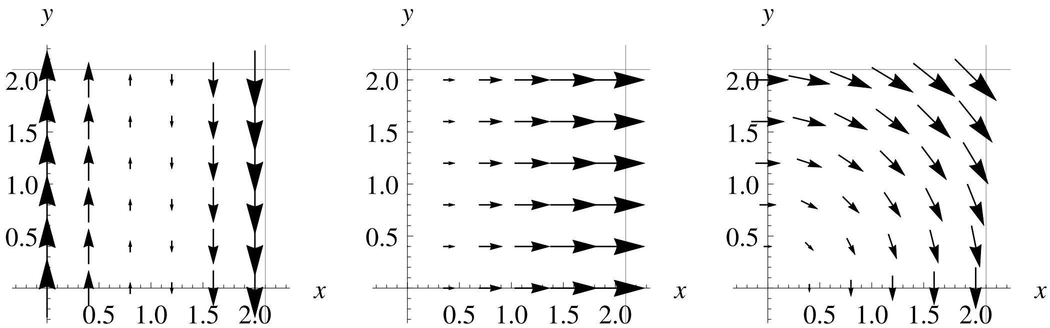
---

d) Das Vektorfeld $\mathbf{F} = (f(x), g(y))$ ist konservativ auf $\mathbb{R}^2$.

WAHR	FALSCH	
☒	☐	$(\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0)$

Die folgenden drei Abbildungen zeigen jeweils ein dreidimensionales Vektorfeld $\mathbf{F}$ in der x-y-Ebene. Das Vektorfeld soll in allen dazu parallelen Ebenen identisch aussehen, d.h. $\mathbf{F}$ ist unabhängig von z und seine z-Komponente ist konstant gleich 0.

Siehe nächstes Blatt!



Die folgenden zwei Fragen beziehen sich auf die drei oben stehenden Bilder.

e) Die Divergenz ist für alle drei Abbildungen gleich Null.

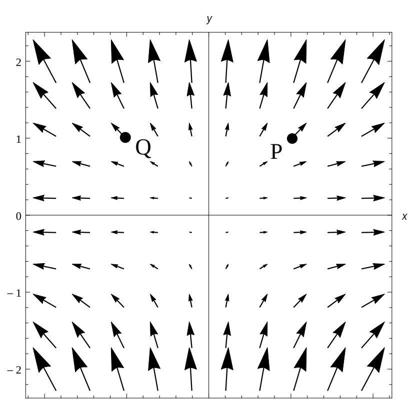
WAHR	FALSCH	
☐	☒	(mittleres Bild: x-Komponente wächst in x; y-Komponente 0)

---

f) Die Rotation ist für alle drei Abbildungen gleich dem Nullvektor.

WAHR	FALSCH	
☐	☒	(linkes Bild: y-Komponente fällt in x; x-Komponente 0)

Die nächste Aufgabe bezieht sich auf die folgende Abbildung eines zweidimensionalen Vektorfeldes $\mathbf{F}$ und die eingezeichneten Punkte P und Q:



g) Es gilt $\operatorname{div} \mathbf{F}|_P > 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{F}|_Q > 0$.

WAHR	FALSCH	
☒	☐	(x-Komponente wächst in x; y-Komponente wächst in y)

Bitte wenden!

h) Wird die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ durch $f(x) = x^2 \sin x \cos x$ definierte Funktion periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt, so gilt für ihre Fourierreihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$a_0 \neq 0$ und $a_n = 0$, $n \geq 1$.

WAHR	FALSCH	
☐	☒	(f ungerade $\Rightarrow a_n = 0$, $n \geq 0$)

---

i) Betrachten Sie die Fourierreihe der Funktion $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq 2\pi$, welche 2π-periodisch fortgesetzt wird. Dann gilt, dass die Fourierreihe im Punkt $x = 2\pi$ gegen π konvergiert.

WAHR	FALSCH	
☒	☐	(In Unstetigkeitsstellen wird der Mittelwert angenommen)

---

j) Seien $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ zwei Lösungen der Gleichung

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0.$$

Dann ist die Funktion $u_1 - u_2$ im Allgemeinen auch eine Lösung dieser Gleichung.

WAHR	FALSCH	
☒	☐	(Die DGL ist linear in allen partiellen Ableitungen)

---

5. [**10 Punkte**] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2-e^y)^2$$

auf Minima, Maxima und Sattelpunkte.

Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x(x^2-1) - 4x(x^2-e^y) \\ 2e^y(x^2-e^y) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir die 2. Komponente, so folgt wegen $e^y > 0$, $y \in \mathbb{R}$ die Bedingung $x^2 = e^y$. Setzen wir dies in die 1. Komponente ein, so erhalten wir

$$-4x(x^2-1) - 4x(x^2-e^y) = -4x(x^2-1) = -4x(x+1)(x-1) \overset{!}{=} 0,$$

also $x \in \{-1,0,1\}$. Aus $y = \ln(x^2)$ erhalten wir die kritischen Punkte $(-1,0)$ und $(1,0)$. Beachte, dass es für $x=0$ keinen kritischen Punkt gibt.

Beide kritischen Punkte sind Maxima. Das kann man auf verschiedene Arten zeigen:

<u>Variante 1:</u>
Es gilt $f(-1,0) = f(1,0) = 0$ und da f von der Form $-A^2 - B^2$ ist, folgt $f(x,y) \leq 0$, $\forall x,y$.

<u>Variante 2:</u>
Wir benutzen das Kriterium für kritische Punkte aus der Vorlesung:

$$f_{xx}(x,y) = -4(2x^2-1-e^y) - 16x^2,$$

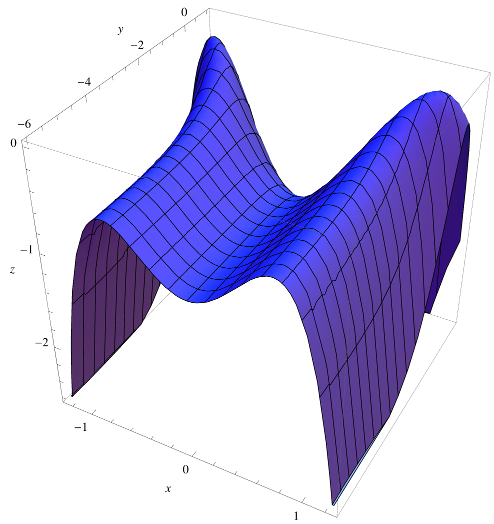
$$f_{yy}(x,y) = 2e^y(x^2-e^y) - 2e^{2y},$$

$$f_{xy}(x,y) = 4xe^y,$$

$$D = f_{xy}^2 - f_{xx} \cdot f_{yy} = 16x^2e^{2y} + (4(2x^2-1-e^y)+16x^2) \cdot (2e^y(x^2-e^y) - 2e^{2y}).$$

Für $P_1 = (-1,0)$ und $P_2 = (1,0)$ folgt somit

$$\begin{aligned} P_1 &: D = -16 < 0, \quad f_{xx}(1,0) = -16 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}, \\ P_2 &: D = -16 < 0, \quad f_{xx}(1,0) = -16 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}. \end{aligned}$$

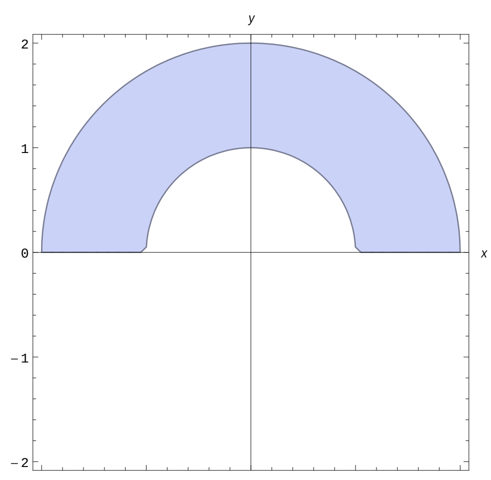


6. [10 Punkte] Gegeben sei das Gebiet

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r_0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2,\ y \geq 0 \right\}$$

mit konstanter Dichte $\varrho \equiv 1$.

a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von G für $r_0 = 1$.



In Polarkoordinaten ist G parametrisiert durch

$$G = \{(r, \varphi) \in [0, \infty) \times (-\pi, \pi] \,|\, r_0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Zunächst berechnen wir die Masse für $r_0 = 1$:

$$M = \int_1^2 \int_0^\pi r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\, r^2\Big|_1^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Aus Symmetriegründen ist weiter klar, dass die x-Koordinate des Schwerpunkts $x_S = 0$ erfüllt. Für die y-Koordinate rechnen wir

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi y \cdot r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{1}{M} \int_1^2 \left(-r^2 \cos\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}^{\pi} \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{M} \int_1^2 2r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{1}{M} \frac{2}{3}\, r^3\Big|_{r=1}^{2} = \frac{1}{M} \frac{2}{3}(8-1) = \frac{1}{M} \frac{14}{3} \\
&= \frac{28}{9\pi}.
\end{aligned}$$

Der Schwerpunkt lautet somit $(x_S, y_S) = (0, \frac{28}{9\pi})$.

b) Sei $r_0 \in (0,2)$ der grösste Wert, so dass der Schwerpunkt von G in G liegt. Finden Sie eine quadratische Gleichung $r_0^2 + pr_0 + q = 0$ zur Bestimmung von r_0.

Zunächst berechnen wir die Masse von G:

$$M = \int_{r_0}^2 \int_0^\pi r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\, r^2\Big|_{r_0}^{2} = \frac{\pi}{2}(4 - r_0^2).$$

Aus Symmetriegründen ist weiter klar, dass die x-Koordinate des Schwerpunkts $x_S = 0$ erfüllt. Für die y-Koordinate rechnen wir

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{M} \int_{r_0}^2 \int_0^\pi y \cdot r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{1}{M} \int_{r_0}^2 \int_0^\pi r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{M} \int_{r_0}^2 \left(-r^2 \cos\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}^{\pi} \,\mathrm{d}r = \frac{1}{M} \int_{r_0}^2 2r^2 \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{M} \frac{2}{3}\, r^3\Big|_{r=r_0}^{2} = \frac{1}{M} \frac{2}{3}(8 - r_0^3) = \frac{4(8 - r_0^3)}{3\pi(4 - r_0^2)}.
\end{aligned}$$

Damit der Schwerpunkt von G in G liegt, muss $y_S \geq r_0$ gelten, also

$$\begin{aligned}
&\frac{4(8 - r_0^3)}{3\pi(4 - r_0^2)} \geq r_0 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{4(2 - r_0)(4 + 2r_0 + r_0^2)}{3\pi(2 - r_0)(2 + r_0)} \geq r_0 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{4(4 + 2r_0 + r_0^2)}{3\pi(2 + r_0)} \geq r_0 \\
\Leftrightarrow\ &4(4 + 2r_0 + r_0^2) \geq r_0(3\pi(2 + r_0)) \\
\Leftrightarrow\ &16 + 8r_0 + 4r_0^2 \geq 3\pi r_0^2 + 6\pi r_0 \\
\Leftrightarrow\ &16 + (8 - 6\pi)r_0 + (4 - 3\pi)r_0^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ &r_0^2 + 2r_0 + \frac{16}{4 - 3\pi} \leq 0.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Das grösste $r_0 \in (0, 2)$, welches diese Ungleichung erfüllt, muss also auch die Gleichung erfüllen:

$$r_0^2 + 2r_0 + \frac{16}{4 - 3\pi} = 0.$$

c) Bestimmen Sie r_0.

Die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$r_0^2 + 2r_0 + \frac{16}{4 - 3\pi} = 0$$

lauten

$$r_0 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + \frac{64}{3\pi - 4}}}{2} = -1 \pm \sqrt{\frac{3\pi + 12}{3\pi - 4}}.$$

Da nur eine der beiden Lösungen positiv ist, können wir die korrekte Lösung

$$r_0 = -1 + \sqrt{\frac{3\pi + 12}{3\pi - 4}} \qquad (\approx 0.987)$$

direkt ablesen.

7. [**10 Punkte**] Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y, z)$ von innen nach aussen durch die Oberfläche des Körpers

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 \leq 1 + x^2 \leq 2\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Zylinderkoordinaten $x = x, y = r\cos\varphi, z = r\sin\varphi$.

Nach dem Satz von Gauss lässt sich der gesuchte Fluss berechnen mit

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V.$$

In den im Hinweis erwähnten Zylinderkoordinaten ist die Menge B parametrisiert durch

$$\begin{aligned} B &= \{(r,\varphi,x) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \,|\, r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \leq 1 + x^2 \leq 2\} \\ &= \{(r,\varphi,x) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \,|\, r^2 \leq 1 + x^2 \leq 2\}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + 1 + 1 = 2x + 2.$$

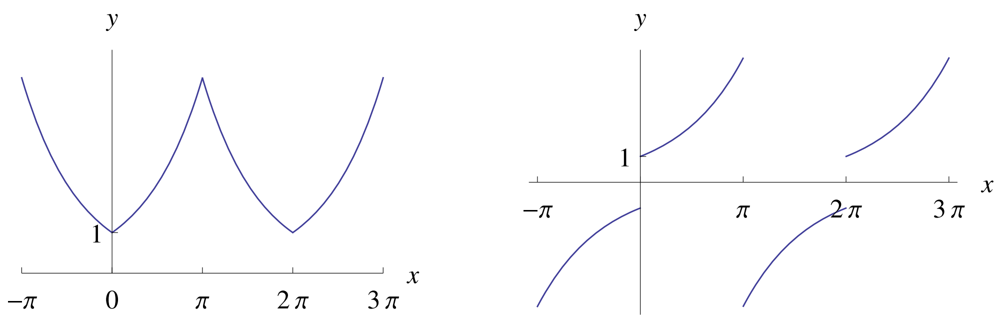
Damit rechnen wir

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S &= \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V \\ &= \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1+x^2}} (2x+2) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} (x+1) r^2 \Big|_{r=0}^{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} (x+1)(1+x^2) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} 2\pi (x^3 + x^2 + x + 1) \, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right) \Big|_{-1}^{1} \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{3} + 2 \right) = 2\pi \left(\frac{2+6}{3} \right) = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

8. [**10 Punkte**] Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x$ auf dem Intervall $[0, \pi]$.

a) Skizzieren Sie die gerade und die ungerade 2π-periodische Fortsetzung von f auf dem Intervall $[-\pi, 3\pi]$.



Links: gerade Fortsetzung; rechts: ungerade Fortsetzung
Skizze nicht massstäblich

b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der ungeraden Fortsetzung.

Gesucht ist die Fourierreihe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x, n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x, n \geq 1.$$

Da wir die ungerade Fortsetzung von $f(x)$ betrachten, gilt $a_n = 0, n \geq 0$.

Siehe nächstes Blatt!

Weiter rechnen wir

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{e^x}_{\downarrow}\underbrace{\sin nx}_{\uparrow}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{n\pi}\, e^x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} e^x\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(e^{\pi}\cos n\pi - 1\right) + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{e^x}_{\downarrow}\underbrace{\cos nx}_{\uparrow}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(e^{\pi}\cos n\pi - 1\right) + \underbrace{\frac{2}{n^2\pi}\, e^x\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} e^x\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(e^{\pi}\cos n\pi - 1\right) - \frac{1}{n^2}b_n.
\end{aligned}$$

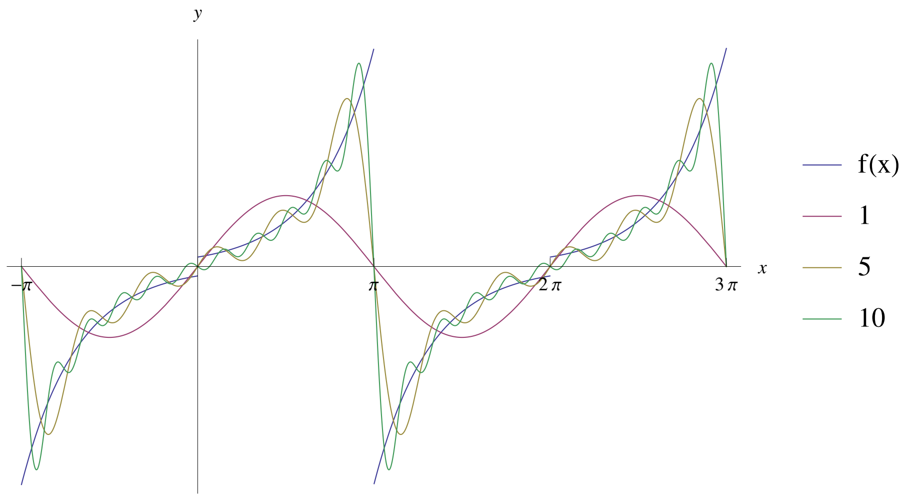
Dies müssen wir nun noch nach b_n auflösen und erhalten

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n^2}\right)b_n = -\frac{2}{n\pi}\left(e^{\pi}\cos n\pi - 1\right) \\
\Leftrightarrow\ &\frac{n^2+1}{n^2}b_n = -\frac{2}{n\pi}\left(e^{\pi}\cos n\pi - 1\right) \\
\Leftrightarrow\ &b_n = -\frac{2n}{(n^2+1)\pi}\left(e^{\pi}\cos n\pi - 1\right) = \begin{cases} \frac{(1-e^{\pi})2n}{(n^2+1)\pi}, & n \text{ gerade} \\ \frac{(1+e^{\pi})2n}{(n^2+1)\pi}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Fourierreihe der ungeraden Fortsetzung von $f(x)$ ist damit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(-1)^{n+1}e^{\pi})2n}{(n^2+1)\pi}\sin nx.$$

Bitte wenden!



Die Partialsummen bis $n = 1, 5, 10$ und $f(x)$

9. **[10 Punkte]** Bestimmen Sie eine Lösung $u(x,t)$ des folgenden Anfangs- und Randwertproblems mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

$$\begin{cases} t^3 u_{xx} - u_t &= 0, & \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ und } t > 0 \\ u(0,t) &= 0, & \text{für } t > 0 \\ u(\pi/2, t) &= 0, & \text{für } t > 0 \\ u(x,0) &= 8\sin(6x), & \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Wir machen den Separationsansatz

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

und setzen dies in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} & t^3 X''(x)T(t) - X(x)T'(t) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & t^3 X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{t^3 T(t)} \overset{!}{=} k \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei wir oben wie üblich wegen der Unabhängigkeit von x und t beide Seiten konstant annehmen. Wir betrachten die Differentialgleichung für X. Aus $u(0,t) = 0$ und $u(\pi/2, t) = 0$ folgt, dass es nur interessante Lösungen für $X(0) = 0$ und $X(\pi/2) = 0$ geben kann.

<u>$k = 0:$</u>
Wir erhalten $X(x) = Ax + B$ und aus den Randbedingungen $X \equiv 0$, dieser Fall ist also uninteressant.

Siehe nächstes Blatt!

$\underline{k = \varrho^2 > 0:}$
Wir erhalten $X(x) = Ae^{\varrho x} + Be^{-\varrho x}$ und aus den Randbedingungen $X \equiv 0$, dieser Fall ist also uninteressant.

$\underline{k = -\lambda^2 < 0:}$
Wir erhalten $X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$.

Aus der Randbedingung $X(0) = 0$ ergibt sich $A = 0$ und mit $X(\pi/2) = 0$ ergibt das interessante Lösungen für

$$0 = X(\pi/2) = B\sin(\lambda \cdot \pi/2) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Das ergibt die Fundamentallösungen

$$X_n(x) = \sin 2nx,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

Für T müssen wir also

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = -4n^2t^3$$

lösen, das ergibt

$$\begin{aligned} & \ln(|T_n(t)|) = -n^2t^4 + \tilde{C}_n \\ \Leftrightarrow\ & T_n(t) = C_n e^{-n^2t^4}. \end{aligned}$$

Für die Eigenfunktionen ergibt sich damit

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-n^2t^4}\sin 2nx$$

und der Ansatz für die Lösung lautet

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2t^4}\sin 2nx.$$

Betrachte nun die noch verbleibende Anfangsbedingung:

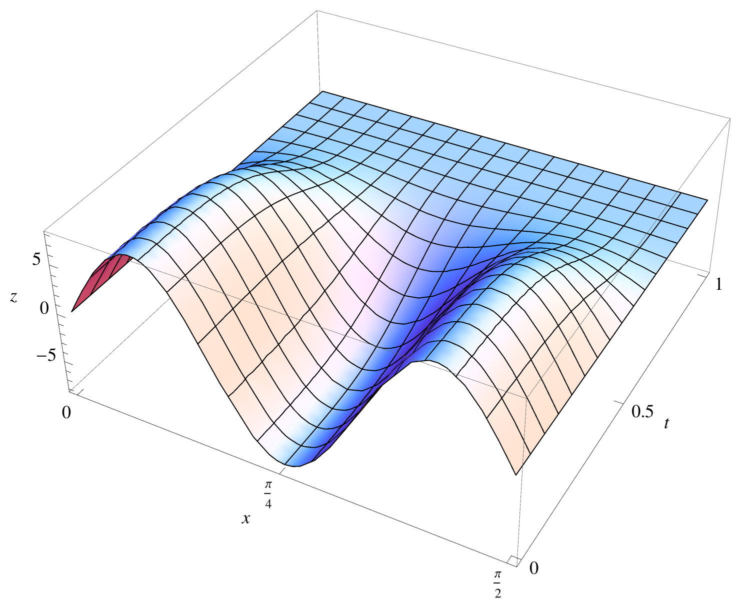
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin 2nx \overset{!}{=} 8\sin(6x).$$

Es folgt mit einem Koeffizientenvergleich

$$C_n = \begin{cases} 8, & n = 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher lautet die Lösung

$$u(x,t) = 8e^{-9t^4}\sin 6x.$$



z
5
0
−5
0
x
π/4
π/2
t
0
0.5
1