C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 1079-1081, 1994

Probabilités/*Probability Theory*

Inégalités de normes avec poids et fermeture d'un espace d'intégrales stochastiques

Freddy DELBAEN, Pascale MONAT, Walter SCHACHERMAYER, Martin SCHWEIZER et Christophe STRICKER

Résumé – Soit X une semimartingale et Θ l'espace de tous les processus prévisibles X-intégrables θ tels que $\int \theta^* dX$ appartient à l'espace $\mathcal{S}^2$ des semimartingales. On cherche à déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace $G_T(\Theta)$ défini par $G_T(\Theta) := \left\{ \int_0^T \theta_s^* \, dX_s \,|\, \theta \in \Theta \right\}$ soit fermé dans $\mathcal{L}^2(P)$. Dans certains cas, on donne une caractérisation de l'adhérence de $G_T(\Theta)$ dans $\mathcal{L}^2$.

Weighted norm inequalities and closedness of a space of stochastic integrals

Abstract – *Let X be a semimartingale and Θ the space of all predictable X-integrable processes θ such that $\int \theta^* dX$ is in the space $\mathcal{S}^2$ of semimartingales. We are looking for some necessary and sufficient conditions such that the space $G_T(\Theta)$ defined by $G_T(\Theta) := \left\{ \int_0^T \theta_s^* \, dX_s \,|\, \theta \in \Theta \right\}$ is closed in $\mathcal{L}^2(P)$. In some cases, we characterize the closure of $G_T(\Theta)$.*

1. INTRODUCTION. – Soient $T \in \mathbb{R}^+$ et X une semimartingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, appartenant à l'espace $\mathcal{S}^2_{\text{loc}}$ des semimartingales et de décomposition canonique $X = X_0 + M + A$. Si θ est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, θ^* désigne la transposée du vecteur colonne θ, et $\theta . X$ ou $\int \theta^* dX$, l'intégrale stochastique vectorielle de θ par rapport à X (*voir* Jacod [4]). Introduisons les espaces suivants : $L^2(M)$ [resp. $L^2(A)$] est l'espace de tous les processus prévisibles θ tels que

$$\|\theta\|_{L^2(M)} := \left\| \int_0^T \theta_s^* \, dM_s \right\|_2 \quad \left(\text{resp. } \|\theta\|_{L^2(A)} := \left\| \int_0^T |\theta_s^* \, dA_s| \right\|_2 \right)$$

est finie. On appelle Θ l'intersection de $L^2(M)$ et $L^2(A)$, $G_T(\Theta)$ [resp. $\tilde{G}_T(\Theta)$] l'espace des variables aléatoires $\int_0^T \theta_s^* \, dX_s$ (resp. des processus $\theta . X$) avec $\theta \in \Theta$ et $\mathcal{R}^2(P)$ l'espace des processus H càdlàg adaptés tels que $\|H\|_{\mathcal{R}^2(P)} := \| \sup_{0 \leqq t \leqq T} |H_t| \|_2$ est finie (*voir* [2]). On dira que l'inégalité (D_c) est vérifiée si :

$$\exists c > 0, \quad \forall \theta \in \Theta, \qquad \|\theta\|_{L^2(A)} \leqq c \|\theta\|_{L^2(M)}.$$

Lorsque, pour tout i, $A^i \ll \langle M^i \rangle$ avec une densité prévisible α^i, on note $\gamma_t^i := \alpha_t^i \sigma_t^{ii}$ et $\sigma_t^{ij} := d\langle M^i, M^j \rangle_t / dB_t$ où B est un processus prévisible croissant càdlàg nul en 0 tel que pour tout i, $\langle M^i \rangle \ll B$. S'il existe un processus prévisible $\widehat{\lambda}$ tel que $\sigma_t \widehat{\lambda}_t = \gamma_t$, le processus $\widehat{K}$ est défini par :

$$\widehat{K}_t := \int_0^t \widehat{\lambda}_s^* \, dA_s = \int_0^t \widehat{\lambda}_s^* \, \sigma_s \, \widehat{\lambda}_s \, dB_s = \left\langle \int \widehat{\lambda}^* \, dM \right\rangle_t.$$

Note présentée par Paul-André MEYER.

0764-4442/94/03191079 $ 2.00

Si $\widehat{K}_T$ est uniformément bornée, $G_T(\Theta)$ est fermée mais cette condition n'est pas nécessaire (Schweizer [7], Monat/Stricker [6]). Lorsque X admet une loi de martingale équivalente dont la densité est de carré intégrable, une condition nécessaire pour que $G_T(\Theta)$ soit fermé est que X vérifie (D_c), si bien que $\widehat{K}_T$ existe, mais la condition (D_c) n'est pas suffisante pour la fermeture de $G_T(\Theta)$ (*voir* [1]).

En revanche, si on s'intéresse à la fermeture de $\tilde{G}_T(\Theta)$ dans $\mathcal{R}^2(P)$, on a équivalence entre $[\tilde{G}_T(\Theta)$ est fermé dans $\mathcal{R}^2(P)]$ et $[X$ vérifie $(D_c)]$. C'est le résultat du théorème 2.

Si on suppose à présent que X admet une loi de martingale équivalente Q dont la densité est de carré intégrable, une condition suffisante pour que $G_T(\Theta)$ soit fermé dans $\mathcal{L}^2(P)$ est que $\mathcal{E}(-\widehat{\lambda}.M)$ satisfasse l'inégalité de Hölder inverse d'indice 2 sous P (théorème 3). On ne sait pas, dans la plupart des cas, si cette condition suffisante est aussi nécessaire. On peut néanmoins le montrer lorsque M admet la propriété de représentation prévisible sous P (théorème 4).

Lorsque X admet une loi de martingale équivalente Q et que M vérifie la propriété de représentation prévisible sous P, on peut même caractériser l'adhérence de $G_T(\Theta)$ dans $\mathcal{L}^2(P)$, notée $\overline{G_T(\Theta)}$: si la densité est de carré intégrable, alors $\overline{G_T(\Theta)}$ est l'ensemble de toutes les variables aléatoires $H \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_T, P)$ d'espérance nulle sous Q (théorème 5). Si la densité n'est pas de carré intégrable, alors $\overline{G_T(\Theta)}$ est égal à $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_T, P)$ (théorème 7).

Les résultats de cette Note dont certains s'étendent au cas discontinu seront développés dans [1]. Pour les inégalités de normes avec poids, on pourra se référer à Doléans-Dade/Meyer [3] ou à la toute récente monographie de Kazamaki [5]. Enfin nous tenons à remercier N. El Karoui de nous avoir indiqué les inégalités de normes avec poids et M. Yor pour des discussions fructueuses sur BMO.

2. Résultats. – L'inégalité de Feffermann (*voir* [9]) ainsi qu'un choix convenable de fonctions test permettent d'obtenir le

Théorème 1. – *L'inégalité (D_c) est vérifiée si et seulement si $\widehat{K}$ existe et $\widehat{\lambda}.M$ est dans* BMO.

Théorème 2. – *L'espace $(\tilde{G}_T(\Theta), \|.\|_{\mathcal{R}^2(P)})$ est fermé si et seulement si l'inégalité (D_c) est vérifiée.*

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème de l'application ouverte et le

Lemme. – *Soient $\theta \in \Theta$ et $\eta > 0$. Alors, il existe un processus prévisible ε prenant les valeurs 1 ou -1, et tel que*

$$\forall t \in [0, T], \quad \left| \int_0^t \varepsilon_s\, \theta_s^*\, dA_s \right| \leqq \eta.$$

On suppose dorénavant que $\widehat{K}$ existe, que la densité $dQ/dP = \mathcal{E}(-\widehat{\lambda}.M)$ est de carré intégrable et qu'elle définit une loi de martingale équivalente. Sous ces conditions, le théorème suivant fournit une condition suffisante pour que $G_T(\Theta)$ soit fermé dans $\mathcal{L}^2$.

Théorème 3. – *Si $\mathcal{E}(-\widehat{\lambda}.M)$ vérifie l'inégalité de Hölder inverse d'exposant 2 [notée $R_2(P)$],* i.e.

$$\exists C > 0, \quad \forall t \geqq 0, \qquad E_P[\mathcal{E}(-\widehat{\lambda}.M)_T^2 \mid \mathcal{F}_t] \leqq C\mathcal{E}(-\widehat{\lambda}.M)_t^2,$$

alors $G_T(\Theta)$ est fermé dans $\mathcal{L}^2(P)$.

Nous ignorons si l'inégalité $R_2(P)$ est une condition nécessaire pour que $G_T(\Theta)$ soit fermé dans $\mathcal{L}^2(P)$. Toutefois, cette condition est nécessaire lorsque M a la propriété de représentation prévisible sous P [notée PRP (P) dans la suite] :

Théorème 4. – *Si M a la* PRP (P) *et si $G_T(\Theta)$ est fermé dans $\mathcal{L}^2(P)$, alors $\mathcal{E}(-\widehat{\lambda}.M)$ vérifie $R_2(P)$.*

Sous les dernières hypothèses sous lesquelles nous nous sommes placés, c'est-à-dire lorsque $dQ/dP = \mathcal{E}(-\widehat{\lambda}\,.\,M)_T$ est une loi de martingale équivalente, que sa densité est de carré intégrable et lorsque M a la PRP (P), $\overline{G_T(\Theta)}$ est caractérisée par le

THÉORÈME 5. – *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\overline{G_T(\Theta)} = \{ H \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_T, P) \,|\, E_Q[H] = 0 \}.$$

Les résultats de [6] nous permettent d'obtenir la décomposition de Föllmer-Schweizer dans le cas continu sous l'hypothèse $R_2(P)$.

THÉORÈME 6. – *Si* $\mathcal{E}(-\widehat{\lambda}\,.\,M)$ *vérifie* $R_2(P)$, *alors toute* v.a. H *de* $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ *admet une décomposition de Föllmer-Schweizer :*

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_s^* \, dX_s + L_T$$

où H_0 *est une variable* $\mathcal{F}_0$*-mesurable,* $\xi \in \Theta$ *et* L *est une martingale de* $\mathcal{M}_0^2$, *fortement orthogonale à* M.

Enfin, on peut se poser le problème de caractériser l'adhérence de $G_T(\Theta)$ lorsqu'il n'existe pas de loi de martingale équivalente dont la densité est de carré intégrable. En général, le problème reste ouvert. Néanmoins, lorsque M a la PRP (P) et que X admet une loi de martingale équivalente dont la densité n'est pas de carré intégrable, on peut à nouveau caractériser l'adhérence de $G_T(\Theta)$.

THÉORÈME 7. – *Si* M *a la* PRP (P) *et si* X *admet une loi de martingale équivalente* Q *dont la densité n'est pas de carré intégrable, alors* $\overline{G_T(\Theta)} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.

Remarque. – Soient $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle. Si on pose $X_t = W_t + t$, on peut montrer aisément que $G_\infty(\Theta) = \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ bien qu'il n'existe pas de loi de martingale équivalente Q pour la semimartingale X.

Note remise le 15 septembre 1994, acceptée le 6 octobre 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] F. DELBAEN, P. MONAT, W. SCHACHERMAYER, M. SCHWEIZER et C. STRICKER, article en préparation.

[2] C. DELLACHERIE et P.-A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, chap. V à VIII, Hermann, 1980.

[3] C. DOLÉANS-DADE et P.-A. MEYER, Inégalités de normes avec poids, in *Séminaire de Probabilités XIII*, Lecture Notes in Math. 721, Springer, 1979, p. 313-331.

[4] J. JACOD, *Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales*, Lecture Notes in Math. 714, Springer, 1979.

[5] N. KAZAMAKI, *Exponential Martingales and* BMO, Lecture Notes in Math. 1579, Springer, 1994.

[6] P. MONAT et C. STRICKER, Föllmer-Schweizer Decomposition and Mean-Variance Hedging for General Claims, *Ann. of Probab.*, 1994 (à paraître).

[7] M. SCHWEIZER, Approximating Random Variables by Stochastic Integrals, *Ann. of Probab.*, 1994 (à paraître).

[8] C. STRICKER, Arbitrage et lois de martingale. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 26, n° 3, 1990, p. 451-460.

[9] M. YOR, Inégalités de martingales continues arrêtées à un temps quelconque, in Lectures Notes in Math. 1118, Springer, 1985, p. 115-118.

F. D. : *Vrije Universiteit Brussel, Pleinlaan 2, B-1050 Brussels, Belgique;*
P. M. et C. S. : *Laboratoire de Mathématiques, URA CNRS n° 741, 16, route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France;*
W. S. : *Universität Wien, Brünnerstrasse 72, A-1210 Wien, Autriche;*
M. S. : *Universität Göttingen, Institut für Mathematische Stochastik, Lotzestrasse 13, D-37083 Göttingen, Allemagne.*