

Bachelorarbeit: Die Hurwitzformel

Lukas Lewark

Betreut von Prof. Pink und Patrik Hubschmid

ETH Zürich

Sommersemester 2007

Zusammenfassung

Es soll die Hurwitzformel bewiesen und an einigen Beispielen angewendet werden. Die Arbeit folgt im Grossen und Ganzen den ersten beiden Kapiteln von *Algebraic Curves and Riemann Surfaces* von Rick Miranda. Vorausgesetzt wird der Inhalt einer Funktionentheorie-, einer Topologie- und einer Differentialgeometrievorlesung; Sätze aus diesen Gebieten werden ohne Beweis aufgeführt.

Inhaltsverzeichnis

1	Vorkenntnisse	1
	§1 Riemannsche Flächen	1
	§2 Differentialgeometrische Werkzeuge	4
2	Triangulierungen kompakter Riemannscher Flächen	5
	§1 Existenz einer Triangulierung	5
	§2 Die Eulercharakteristik	12
3	Holomorphe Abbildungen	13
	§1 Definition und Beispiele	13
	§2 Multiplizität und Grad	15
	§3 Hochheben einer Triangulierung	18
4	Die Hurwitzformel	20
	§1 Beweis der Hurwitzformel	20
	§2 Geschlecht der Fermatkurven	21
	§3 Der Satz von Hurwitz	21
	Literaturverzeichnis	24

1 Vorkenntnisse

§1 Riemannsche Flächen

(1.1) Definition: Sei M ein topologischer Raum. Eine Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ heisst *bei p zentrierte Karte mit Kartengebiet $U \subset M$* falls $U \subset M$ eine offene Umgebung von p und φ ein Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge V von \mathbb{C} ist, der p auf 0 abbildet. Zwei Karten $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$, $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ heissen *verträglich* (oder *kompatibel*) falls $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ gilt oder $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}|_{\varphi_2(U_1 \cap U_2)} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ holomorph ist. Die Abbildung $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}|_{\varphi_2(U_1 \cap U_2)}$ nennt man *Kartenwechsel*.

Ein *Atlas* eines topologischen Raums M ist eine Menge von paarweise verträglichen Karten, deren Gebiete M überdecken. Zwei Atlanten heissen *verträglich*, falls jede Karte des einen zu jeder Karte des anderen verträglich ist.

(1.2) Lemma: Jeder Atlas ist in einem eindeutigen *maximalen Atlas* enthalten, also einem, dem keine weitere Karte hinzugefügt werden kann, die zu allen in ihm bereits enthaltenen verträglich ist. Zwei Atlanten sind genau dann verträglich, wenn ihre maximalen Atlanten identisch sind.

(1.3) Definition: Eine *Riemannsche Fläche* ist ein zweitabzählbarer zusammenhängender Hausdorffraum, der mit einem maximalen Atlas versehen ist.

(1.4) Bemerkung: Wegen (1.2) genügt zur Definition einer konkreten Riemannschen Fläche ein beliebiger, nicht notwendigerweise maximaler Atlas.

(1.5) Lemma: Vergisst man die komplexe Struktur einer kompakten Riemannschen Flächen so erhält man eine *orientierbare* kompakte reelle 2-Mannigfaltigkeit.

(1.6) Bemerkung: Kompakte reelle 2-Mannigfaltigkeiten werden bis auf Homöomorphie durch ihr *Geschlecht* $g \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ klassifiziert, also gilt dies auch für Riemannsche Flächen.

Nun werden vier Beispiele Riemannscher Flächen gegeben:

(1.7) Beispiel: Sei $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Alexandroffkompaktifizierung von \mathbb{C} . Die Abbildung $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ ist eine Karte mit Gebiet $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}_\infty$. Sei $1/\infty := 0$, dann ist die Abbildung $\varphi_2 : \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$ ebenfalls eine Karte. Der Kartenwechsel $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto 1/z$ zwischen diesen beiden Karten ist eine holomorphe Funktion. Also ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Atlas. Ferner ist \mathbb{C}_∞ zusammenhängend, hausdorffsch und zweitabzählbar und somit eine Riemannsche Fläche.

(1.8) Beispiel: Sei G eine Gruppe, die stetig und *eigentlich diskontinuierlich* auf einer Riemannschen Fläche M operiert, d.h. es gebe einen Homomorphismus von G in die Gruppe der Homöomorphismen auf M , der folgende Eigenschaft erfüllt: Jedes $p \in M$ hat eine offene Umgebung U , sodass $g(U) \cap U$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$ leer ist. Falls $g \in G$, so bezeichnet g missbräuchlich auch den zugehörigen Homöomorphismus von M .

Behauptung: Der Quotientenraum M/G kann auf natürliche Weise mit der Struktur einer Riemannschen Fläche versehen werden, d.h. es gibt einen eindeutig bestimmten maximalen Atlas auf M/G , sodass die Projektion $\pi : M \rightarrow M/G$ holomorph ist (siehe (3.1)).

Beweis: Sei $p \in M$ gegeben. Wähle U so, dass $\forall g \in G \setminus \{e\} : g(U) \cap U = \emptyset$ und so klein, dass es eine Karte $\varphi : U \rightarrow V$ im Atlas gibt. Dann ist $\pi(U) \cong U$ und $\varphi \circ (\pi|_U)^{-1} : \pi(U) \rightarrow V$ eine Karte auf M/G . Die Vereinigung dieser Karten für alle p bildet einen Atlas, denn für zwei Karten $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ gilt auf $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$

$$\varphi_1 \circ (\pi|_{U_1})^{-1} \circ (\varphi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1})^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}.$$

Da M zusammenhängend und $\pi : M \rightarrow M/G$ surjektiv ist, ist M/G zusammenhängend.

Da M zweitabzählbar ist, existiert eine abzählbare Basis $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ auf M . Die Projektion π ist offen, also ist $\{\pi(U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Menge offener Mengen in M/G . Eine Menge $U \subset M/G$ ist genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset M$ offen ist. Folglich bildet $\{\pi(U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von M/G .

Seien zwei unterschiedliche Äquivalenzklassen $[p_1], [p_2] \in M/G$ gegeben. Die Bahnen $G(p_1)$ und $G(p_2)$ sind abgeschlossene Teilmengen von M , da sie keine Häufungspunkte haben: Denn ein $q \in M$ hat eine offene Umgebung U , sodass $g(U) \cap U$ nur für $g = e$ nichtleer ist. Folglich sind $G(p_1) \cap U$ und $G(p_2) \cap U$ endlich.

Weil M T4 ist, gibt es offene, zueinander disjunkte Umgebungen U und V von $G(p_1)$ bzw. $G(p_2)$. Die Bilder $\pi(U)$ und $\pi(V)$ sind offene, zueinander disjunkte Umgebungen von $[p_1]$ und $[p_2]$. Also ist M/G hausdorffsch.

Folglich ist M/G mit dem oben gegebenen Atlas eine Riemannsche Fläche. Die Holomorphie von π und die Eindeutigkeit des Atlas prüft man leicht. \square

(1.9) Beispiel: Seien z.B. $\tau, \omega \in \mathbb{C}$ reell linear unabhängig und Γ die durch die Verschiebungen mit τ und ω erzeugte Gruppe von Automorphismen von \mathbb{C} .

Der Quotientenraum \mathbb{C}/Γ heisst *komplexer Torus* und ist eine Riemannsche Fläche von Geschlecht 1.

Das nächste Beispiel benötigt den

(1.10) Satz über implizite Funktionen: Sei die Funktion $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $N = f^{-1}(0)$ ihre Nullstellenmenge. Ist $p = (x_p, y_p) \in \mathbb{C}^2$ und $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p f \neq 0$, so gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von y_p , eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ von x_p , und eine holomorphe Funktion $g : U \rightarrow V$, sodass $N \cap (V \times U) = \{(g(y), y) \mid y \in U\}$.

(1.11) Beispiel: Sei \mathbb{P}^2 der komplexe zweidimensionale *projektive Raum*, d.h.

$$\mathbb{P}^2 = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) / \sim, \text{ wobei}$$

$$(X, Y, Z) \sim (X', Y', Z') : \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : X' = \lambda X, Y' = \lambda Y, Z' = \lambda Z$$

Die Äquivalenzklasse von (X, Y, Z) bezeichnet man mit $[X : Y : Z]$.

Ein Polynom heiße *homogen*, falls alle seine Monome den gleichen Grad haben. Sei $F(X, Y, Z)$ ein homogenes irreduzibles Polynom. Auf \mathbb{P}^2 lässt sich F nicht wie auf \mathbb{C}^3 auswerten; aber die Frage, ob F in einem Punkt von \mathbb{P}^2 Null ist, ist sinnvoll, da F homogen ist. Sei N die Nullstellenmenge von F in \mathbb{P}^2 . Eine *Singularität* von N ist ein Punkt in N , an dem alle partiellen Ableitungen von F verschwinden. Die Nullstellenmenge N heißt *nicht-singulär*, falls sie keine Singularität hat.

Behauptung: Sei N nicht-singulär. Dann ist N eine Riemannsche Fläche.

Beweis: In diesem Beispiel werden Grossbuchstaben für die Koordinaten von \mathbb{P}^2 und Kleinbuchstaben für die Koordinaten von \mathbb{C} verwendet.

Sei $U_X = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2 \mid X \neq 0\}$ und seien U_Y und U_Z analog definiert. Dann gilt $\mathbb{P}^2 = U_X \cup U_Y \cup U_Z$, und U_X ist homöomorph zu \mathbb{C}^2 via $[X : Y : Z] \mapsto (Y/X, Z/X)$. Nun wird folgende Aussage der algebraischen Geometrie verwendet: Die Schnittmenge $N \cap U_X$ ist homöomorph zur Nullstellenmenge N_X von $F_X(y, z)$ in \mathbb{C}^2 , wobei F_X das Bild von F unter der Projektion $\mathbb{C}[X, Y, Z] \rightarrow \mathbb{C}[y, z], 1 \mapsto 1, X \mapsto 1, Y \mapsto y, Z \mapsto z$ ist, und die Nicht-Singularität von N überträgt sich auf N_X .

Im Folgenden findet man mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen einen Atlas für N_X ; dieser und die analog definierten Atlanten für N_Y und N_Z sind kompatibel und ihre Vereinigung ein Atlas für N . An jedem Punkt $p \in N_X$ gilt $\frac{\partial}{\partial y} \Big|_p F_X \neq 0$ oder $\frac{\partial}{\partial z} \Big|_p F_X \neq 0$, da N_X nicht singulär ist. Sei o.B.d.A. ersteres der Fall und $g : U \rightarrow V$ wie im Satz über implizite Funktionen eine holomorphe Funktion von einer offenen Umgebung U von z_p nach einer offenen Umgebung V von y_p , sodass $N_X \cap (V \times U) = \{(g(z), z) \mid z \in U\}$. Die Abbildung $N_X \cap (V \times U) \rightarrow U, (g(z), z) \mapsto z$ ist eine Karte mit Kartengebiet $N_X \cap (V \times U)$. So lässt sich N_X mit Kartengebieten überdecken. Prüfe durch Fallunterscheidung dass die Kartenwechsel holomorph sind:

- Seien wie oben zwei Karten durch $N_X \cap (V \times U) = \{(g(z), z) \mid z \in U\}$ und $N_X \cap (V' \times U') = \{(h(z), z) \mid z \in U'\}$ gegeben. Es folgt, dass $\forall z \in (U \cap U') : (g(z), z) = (h(z), z) \Rightarrow g(z) = h(z)$. Also sind die Karten auf dem Schnitt ihrer Kartengebiete identisch. Der Kartenwechsel ist die Identität.
- Seien wie oben zwei Karten φ und ψ durch $N_X \cap (V \times U) = \{(g(z), z) \mid z \in U\}$ und $N_X \cap (V' \times U') = \{(y, h(y)) \mid y \in V'\}$ gegeben. Schränke beide Karten auf $N_X \cap (V \times U) \cap (V' \times U')$ ein. Die Verträglichkeit der ursprünglichen Karten ist quivalent zur Verträglichkeit der Eingeschränkten, sei also o.B.d.A. $U = U'$ und $V = V'$. Der Kartenwechsel ist eine Abbildung $U \rightarrow V$. Es gilt $\varphi^{-1}(z) = (g(z), z) = (g(z), h(g(z))) \Rightarrow \psi \circ \varphi^{-1}(z) = g(z)$, und dies ist eine holomorphe Funktion.
- Sei durch $N_X \cap (V \times U) = \{(y, g(y)) \mid y \in V\}$ eine Karte auf N_X gegeben und durch $N_Y \cap (W \times U') = \{(h(z), z) \mid z \in U'\}$ eine Karte auf N_Y gegeben. Seien φ und ψ die entsprechenden Karten auf N . Die X - und Y -Koordinate eines Punkts im Schnitt der Kartengebiete verschwinden nicht.

$$\varphi^{-1} : y \mapsto [1 : y : g(y)] = \left[\frac{1}{y} : 1 : \frac{g(y)}{y} \right] = \left[h\left(\frac{g(y)}{y}\right) : 1 : \frac{g(y)}{y} \right]$$

$$\begin{aligned}\psi : \left[h\left(\frac{g(y)}{y}\right) : 1 : \frac{g(y)}{y} \right] &\mapsto \frac{g(y)}{y} \\ \Rightarrow \psi \circ \varphi^{-1} : y &\mapsto \frac{g(y)}{y}\end{aligned}$$

Dies ist holomorph, weil g holomorph ist und 0 nicht im Definitionsbereich liegt.

- Die weiteren drei Fälle, bei denen die Karten auf N_X und N_Y jeweils andersherum gegeben sind, verlaufen ähnlich.

Die Fälle, in denen eine Karte in N_Z und die andere in N_X oder N_Y liegt, verlaufen analog.

Aus der Irreduzibilität von F folgt mit algebraischer Geometrie, dass N zusammenhängend ist. Als Teilmenge des zweitabzählbaren Hausdorffraums \mathbb{P}^2 ist N selbst zweitabzählbar und hausdorffsch. Folglich ist N eine Riemannsche Fläche. \square

§2 Differentialgeometrische Werkzeuge

(1.12) Satz: Auf jeder kompakten Riemannschen Fläche M existiert eine Riemannsche Metrik (siehe Gallot, Theorem 2.2, S. 53). Diese induziert eine Metrik d , die die Topologie zurückgibt (siehe Gallot, Definition-Proposition 2.91, S. 89).

Jeder Punkt p hat eine abgeschlossene Umgebung A , sodass für $p_1, p_2 \in A$ genau ein kürzester Weg von p_1 nach p_2 existiert. Dieser hat die Länge $d(p_1, p_2)$ und liegt in A (Gallot, Theorem 2.92, S. 90). Einen solchen Weg nennt man *Geodäte*. Missbräuchlich bezeichne *Geodäten* auch das Bild dieses Wegs. Geodäten lassen sich eindeutig verlängern, d.h. für beliebige $p_1, p_2 \in A$ gibt es eindeutige Punkte $q_1, q_2 \in \partial A$, sodass die Geodäte von p_1 nach p_2 Teilmenge der Geodäte von q_1 nach q_2 ist (siehe Gallot, Corollary 2.85, S.85).

Nachdem man A falls nötig verkleinert hat, gibt es eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ um 0 und einen Homöomorphismus $\exp_p : V \rightarrow A^\circ$, der $v \in V$ auf $\gamma_v(1)$ abbildet, wobei $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodäte mit $\gamma_v(0) = p$ und $\gamma'_v(0) = v$ ist (siehe Gallot, Corollary 2.89, S. 86). Strecken durch den Ursprung werden auf Geodäten durch p abgebildet. Dieser Homöomorphismus heisst die *Exponentialabbildung bei p* .

(1.13) Lemma: Zwei Geodäten e_1 und e_2 , die in einer Umgebung A wie in (1.12) liegen und sich in mehr als einem Punkt schneiden, haben die gleiche Verlängerung.

Beweis: Sei $p_1 \neq p_2$ und $\{p_1, p_2\} \subset e_1 \cap e_2$. Die Geodäten e_1 und e_2 sind Abbildungen von $[0, 1]$ nach M . Man kann $s_1 < t_1$ und $s_2 < t_2$ wählen, sodass $e_1|_{[s_1, t_1]}$ und $e_2|_{[s_2, t_2]}$ Geodäten von p_1 nach p_2 oder von p_2 nach p_1 sind. Aus der Eindeutigkeit folgt $\text{Bild } e_1|_{[s_1, t_1]} = \text{Bild } e_2|_{[s_2, t_2]}$. Also haben diese Geodätenabschnitte die gleiche Verlängerung. Aber die Verlängerung eines Teils einer Geodäte ist gleich der Verlängerung der Geodäte selbst, also haben e_1 und e_2 die gleiche Verlängerung. \square

(1.14) Lemma: Sei A wie in (1.12). Seien $p_1, p_2, p_3 \in A$ drei Punkte, die die Dreiecksungleichung strikt erfüllen, d.h. $d(p_i, p_j) + d(p_i, p_k) > d(p_j, p_k)$ falls $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Sei e_1 die Geodäte von p_2 nach p_3 , sei e_2 diejenige von p_3 nach p_1 und sei e_3 diejenige von p_1 nach p_2 . Dann geht keine innerhalb von A liegende Geodäte durch p_1, p_2 und p_3 .

Beweis: Sei e eine Geodäte, die durch p_1, p_2 und p_3 geht, o.B.d.A in dieser Reihenfolge. Da e der kürzeste Weg ist, gilt $d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3) = d(p_1, p_3)$, im Widerspruch zur strikten Dreiecksungleichung. \square

2 Triangulierungen kompakter Riemannscher Flächen

§1 Existenz einer Triangulierung

(2.1) Definition: Ein Dreieck $D \subset \mathbb{C}$ ist die konvexe Hülle dreier nicht-kollinearere Punkte. Sei M eine Riemannsche Fläche. Ein abgeschlossene Menge $t \subset M$ zusammen mit einem Homöomorphismus $\varphi : t \rightarrow D \subset \mathbb{C}$ auf ein Dreieck $D \subset \mathbb{C}$ heisst *Dreieck auf M* . Die Urbilder der Kanten von D unter φ heissen *Kanten* von t , und die Urbilder der Ecken von D *Ecken* von t .

Das *Innere einer Kante e* , geschrieben e° , ist e ohne ihre Ecken. Das *Innere eines Dreiecks t* , geschrieben t° , ist t ohne seine Kanten. Der *Rand eines Dreiecks t* , geschrieben ∂t , ist die Vereinigung der Kanten von t .

Sind die Kanten eines Dreiecks Geodäten, so heisst das Dreieck *Geodätendreieck*. Ein Geodätendreieck, welches in einer Umgebung A wie in (1.12) liegt, heisst *kleines Geodätendreieck*.

Sei \mathcal{T} eine endliche Menge von Dreiecken. Dann bezeichnet $V(\mathcal{T})$ die Menge der Ecken von Dreiecken in \mathcal{T} , und $E(\mathcal{T})$ die Menge der Kanten von Dreiecken in \mathcal{T} .

Eine *Verfeinerung* von \mathcal{T} ist eine endliche Menge von Dreiecken \mathcal{U} , für die gilt: $\bigcup \mathcal{T} = \bigcup \mathcal{U}$, $V(\mathcal{T}) \subset V(\mathcal{U})$, und jede Kante von \mathcal{T} ist Vereinigung von Kanten von \mathcal{U} .

(2.2) Definition: Sei \mathcal{T} eine endliche Menge von Dreiecken, die M überdecken (d.h. $\bigcup \mathcal{T} = M$). Falls der Schnitt je zweier verschiedener Dreiecke in \mathcal{T} entweder leer, eine gemeinsame Ecke beider Dreiecke oder eine gemeinsame Kante der Dreiecke ist so heisst \mathcal{T} eine *Triangulierung* von M . Gibt es ein solches \mathcal{T} , so heisst M *triangulierbar*.

(2.3) Satz: Eine kompakte Riemannsche Fläche M ist triangulierbar.

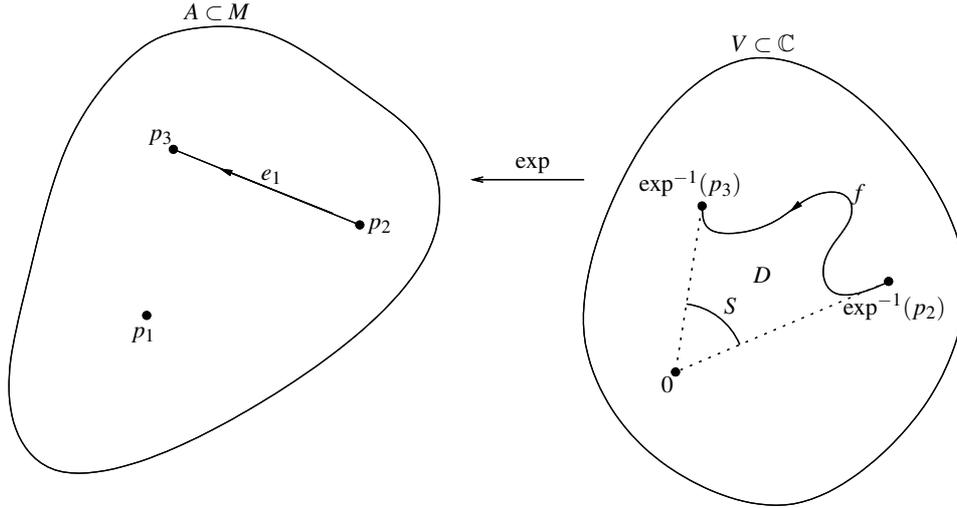
Der Beweis dieses Satzes verteilt sich auf die folgenden Lemmata:

(2.4) Lemma: Sei M eine Riemannsche Fläche mit einer Metrik wie in (1.12). Seien $p_1, p_2, p_3 \in M$ drei Punkte, die die Dreiecksungleichungen strikt erfüllen und in einer abgeschlossenen Umgebung A von p_1 wie in (1.12) liegen. Dann existiert ein kleines Geodätendreieck $t \subset A$ auf M , das p_1, p_2, p_3 als Eckpunkte hat.

Beweis: Sei $\exp = \exp_{p_1} : V \rightarrow A^\circ$ die Exponentialabbildung bei p_1 (siehe (1.12)) Sei $e_1 : [0, 1] \rightarrow M$ die Geodäte von p_2 nach p_3 , derart parametrisiert, dass $\forall t \in [0, 1] : d(p_2, e_1(t)) = td(p_2, p_3)$ gilt. Dann ist e_1 injektiv und bildet offene Mengen auf offene in der Unterraumtopologie des Bildes ab; es reicht letzteres auf Intervallen $(a, b) \subset [0, 1]$ zu prüfen:

$$e_1((a, b)) = \text{Bild}(e_1) \cap \{p \in M \mid a \cdot d(p_2, p_3) < d(p_2, p) < b \cdot d(p_2, p_3)\}$$

Also ist e_1 ein Homöomorphismus auf sein Bild. Sei $f := \exp^{-1} \circ e_1 : [0, 1] \rightarrow V$. f ist ebenfalls ein Homöomorphismus auf sein Bild.



Sei $T = [0, 1]^2 / \sim$, wobei $(x, y) \sim (x', y') : \Leftrightarrow (x = x' = 0) \vee ((x, y) = (x', y'))$. Dann ist T homöomorph zu einem Dreieck. Sei $g : T \rightarrow V$ durch $(s, t) \mapsto s \cdot f(t)$ definiert. Diese Abbildung ist wohldefiniert, d.h. sie respektiert \sim , denn $\forall t, t' \in [0, 1] : g(0, t) = 0 = g(0, t')$. Die Abbildung g ist als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig. Betrachte von nun an g als Funktion von T nach $D = \text{Bild } g$. Um zu zeigen, dass g ein Homöomorphismus ist, muss noch bewiesen werden, dass g injektiv und das Inverse von g stetig ist. Sei $g(s, t) = g(s', t') \Leftrightarrow s \cdot f(t) = s' \cdot f(t')$. Die Punkte p_1, p_2 und p_3 erfüllen die Dreiecksungleichungen strikt, also folgt mit (1.14) aus $p_2, p_3 \in e_1 \Rightarrow p_1 \notin e_1 \Rightarrow 0 \notin \text{Bild } f$. Folglich $s = 0 \Leftrightarrow s' = 0$. Seien also $s, s' \neq 0$. Dann folgt aus $s \cdot f(t) = s' \cdot f(t')$, dass $f(t)$ und $f(t')$ reell linear abhängig sind. Sei o.B.d.A. $|f(t)| \geq |f(t')|$, dann geht der Weg $[0, 1] \rightarrow V, u \mapsto u \cdot f(t)$ durch $f(t)$ und $f(t')$. Das Bild $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$ dieses Wegs unter \exp ist eine Geodäte in M , welche e_1 in $e_1(t)$ und in $e_1(t')$ schneidet. Weil aber $\alpha(0) = p_1$ gilt, haben e_1 und α keine gemeinsame Verlängerung; denn diese wäre eine Geodäte durch p_1, p_2 und p_3 . Also können α und e_1 höchstens einen Schnittpunkt haben, woraus $e_1(t) = e_1(t') \Rightarrow t = t'$ folgt, da e_1 injektiv ist. Es gilt $sf(t) = s'f(t) \Rightarrow s = s'$, da $0 \notin \text{Bild } f$. Damit ist die Injektivität von g bewiesen.

Sei $0 < \varepsilon < \min_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Dieses Minimum existiert, weil $\text{Bild } f$ abgeschlossen ist und 0 nicht enthält. Sei $S = \{v \in V \mid |v| = \varepsilon\} \cap D$. Dann ist die Projektion $\pi : D \setminus \{0\} \rightarrow S, v \mapsto \varepsilon \frac{v}{|v|}$ eine offene, stetige Abbildung. Da aus der linearen Abhängigkeit von $f(t)$ und $f(t')$ folgt, dass $t = t'$ gilt, ist $\pi \circ f : [0, 1] \rightarrow S$ injektiv. Ferner gibt es für jeden Punkt $v \in S$ ein $t \in [0, 1]$, sodass $f(t)$ und v linear abhängig sind. Daraus folgt $\pi \circ f(t) = v$. Also ist $\pi \circ f$ surjektiv und damit ein Homöomorphismus.

Somit ist $h_2 := (\pi \circ f)^{-1} \circ \pi : D \setminus \{0\} \rightarrow [0, 1]$ stetig. Für $p \in D$ sind p und $f(h_2(p))$ reell linear abhängig. Sei $h_1(p)$ die eindeutig bestimmte Zahl in $[0, 1]$, sodass $h_1(p)f(h_2(p)) = p$ gilt. h_1 ist eine stetige Abbildung von $D \setminus \{0\} \rightarrow [0, 1]$. Also ist $h := (h_1, h_2) : D \setminus \{0\} \rightarrow [0, 1]^2$ stetig. Erweitere h zu einer Abbildung $D \rightarrow T$ durch $h(0) := (0, 0)$. Dann ist $g \circ h = \text{id}_D$:

$$g(h_1(p), h_2(p)) = h_1(p) \cdot f(h_2(p)) = p$$

Es bleibt die Stetigkeit von h in 0 zu prüfen: Sei $(q_i)_i \subset D$ eine Folge mit $\lim_{i \rightarrow \infty} q_i = 0$. Es gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} h_1(q_i) = 0$. Weil $\forall t, t' \in [0, 1] : (0, t) \sim (0, t')$ folgt daraus bereits $\lim_{i \rightarrow \infty} h_2(q_i) = 0$. Also sind h_1 und h_2 in 0 stetig, und damit ist es auch h .

Folglich ist g ein Homöomorphismus, und damit ist auch $\exp \circ g$ ein Homöomorphismus von T auf eine abgeschlossene Menge in M . Schließlich bildet $\exp \circ g$ die Ecken von T auf p_1, p_2 und p_3 ab. \square

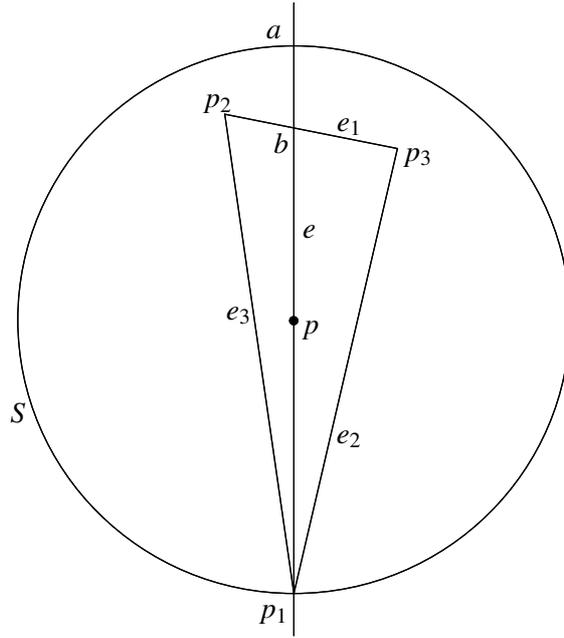
(2.5) Lemma: Sei A wie in (1.12). Seien $p_1, p_2, p_3 \in A$ drei Punkte, die die Dreiecksungleichung strikt erfüllen. Sei e_1 die Geodäte von p_2 nach p_3 , sei e_2 diejenige von p_3 nach p_1 und sei e_3 diejenige von p_1 nach p_2 . Dann gibt es keine Geodäte innerhalb von A , die e_1, e_2 und e_3 im Innern schneidet.

Beweis: Sei e eine Geodäte, die e_1, e_2 und e_3 schneidet, aber durch keinen der Punkte p_1, p_2, p_3 geht. Aus dem vorhergehenden Lemma folgt, dass e jede Kante e_i höchstens einmal schneidet, also nach Annahme genau einmal. Sei o.B.d.A. e gleich seiner eigenen Verlängerung. Nach (2.4) existiert ein kleines Geodätendreieck $t \subset A$, dessen Eckpunkte p_1, p_2 und p_3 sind. Sowohl $e \cap t^\circ$ als auch $e \setminus t$ sind offene Teilmengen von e . Das Komplement ihrer Vereinigung, $e \setminus ((e \cap t^\circ) \cup (e \setminus t)) = e \cap \partial t$ ist gleich der Menge der Schnittpunkte von e mit dem Rand von t . Es gibt genau drei solche Punkte. Sei $S = \{s \in [0, 1] \mid \text{Für jede Umgebung } U \ni s : e(U) \cap t^\circ \neq \emptyset \wedge e(U) \cap (e \setminus t) \neq \emptyset\}$, d.h. S enthält alle Schnittpunkte von e mit ∂t ausser den Berührungspunkten. Dann ist $S \subset e \cap \partial t$, aber da weder $e(0)$ noch $e(1)$ in t° liegt, enthält S eine gerade Anzahl an Elementen. Also gibt es einen Schnittpunkt $q \in e \cap \partial t$ und eine offene Menge $U \subset [0, 1]$, sodass $q \in e(U)$ und $e(U) \cap t^\circ = \emptyset$ oder $e(U) \cap (e \setminus t) = \emptyset$, d.h. q ist ein Berührungspunkt von e mit einer Kante e_i von t . Wie aber im Folgenden gezeigt wird, können sich die Geodäten e und e_i nicht berühren: Betrachte $\exp_q : V \rightarrow U$. Die Urbilder $\exp_q^{-1}(e)$ und $\exp_q^{-1}(e_i)$ sind Strecken durch 0. Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass diese Strecken $\partial(B_\varepsilon(0))$ je zweimal schneiden. Dann hat $B_\varepsilon(0) \setminus \exp_q^{-1}(e_i)$ zwei Zusammenhangskomponenten; das Bild der einen unter \exp_q liegt in t° , das Bild der anderen in $A \setminus t$. Die Strecke $\exp_q^{-1}(e)$ schneidet beide Zusammenhangskomponenten. Also schneidet jede Umgebung von q in e sowohl t als auch sein Komplement. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $e(U) \cap t^\circ = \emptyset$ oder $e(U) \cap (e \setminus t) = \emptyset$ gilt. \square

(2.6) Lemma: Sei M eine kompakte Riemannsche Fläche, die mit einer Metrik wie in (1.12) versehen ist. Dann ist jeder Punkt $p \in M$ im Inneren eines kleinen Geodätendreiecks enthalten.

Beweis: Sei $p \in M$ und A eine Umgebung von p wie in (1.12). Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $\overline{B_\varepsilon(p)} \subset A$. Sei $S = \partial B_\varepsilon(p)$. Sei $p_1 \in S$ beliebig und e die Verlängerung der Geodäte von p_1 nach p . Eine Geodäte, die in p beginnt oder endet, schneidet S höchstens einmal, weil der Abstand von p einen Punkt auf einer solchen Geodäte eindeutig festlegt. Teile $e = f_1 \cup f_2$ in eine Geodäte f_1 auf, die in p endet, und eine Geodäte f_2 , die in p beginnt. Es gilt $f_1 \cap S = \{p_1\}$, und $f_2 \cap S$ besteht aus höchstens einem Punkt. Sei $\exp : V \rightarrow A^\circ$ die Exponentialabbildung bei p , wobei $V \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung der 0 ist. Sei $D_p : V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $D_p(v) = d(\exp(v), p)$. Diese Abbildung ist stetig. Das Urbild $\exp^{-1}(f_2)$ ist eine Strecke, die 0 mit einem Punkt v mit $D_p(v) \geq \varepsilon$ verbindet. Also gibt es einen Punkt v' mit $D_p(v') = \varepsilon$. Folglich besteht $f_2 \cap S$ aus genau einem Punkt a .

Die Abbildung $\varphi : \exp^{-1}(\overline{B_\varepsilon(p)}) \rightarrow \overline{B_\varepsilon(0)} \subset \mathbb{C}$, die durch $0 \neq v \mapsto D_p(v) \frac{v}{|v|}$ und $0 \mapsto 0$ gege-



ben ist, ist ein Homöomorphismus. Die Menge $\varphi(\exp^{-1}(\overline{B_\varepsilon(p)} \setminus e))$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten. Also zerfällt auch $\overline{B_\varepsilon(p)} \setminus e$ in zwei Zusammenhangskomponenten B_1 und B_2 , deren Rand e ist. Betrachte den offenen Ball mit Radius $\varepsilon/3$ um a . Dies ist eine offene Umgebung eines Randpunkts von B_1 und B_2 und schneidet folglich B_1 und B_2 . Sei p_2 im Schnitt mit B_1 und p_3 im Schnitt mit B_2 . Es gilt $d(p_2, a) < \varepsilon/3$ und $d(p_3, a) < \varepsilon/3$. Sei e_1 die Geodäte von p_2 nach p_3 . Die Schnittmengen $(e_1 \cap B_1)$ und $(e_1 \cap B_2)$ sind offene Teilmengen von e_1 . Da e_1 zusammenhängend ist, gibt es also einen Punkt $b \in e_1 \setminus (B_1 \cup B_2) = e_1 \cap e$. Die Punkte b und p_1 liegen auf e , p_2 und p_3 jedoch nicht. Also erfüllen die beiden Punkttripel (p_1, p_2, b) und (p_1, p_3, b) die Dreiecksungleichungen strikt: $d(p_1, p_2) + d(p_2, b) > d(p_1, b)$ und $d(p_1, b) + d(b, p_3) > d(p_1, p_3)$. Daraus folgt

$$d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3) = d(p_1, p_2) + d(p_2, b) + d(b, p_3) > d(p_1, p_3).$$

Analog zeigt man $d(p_1, p_3) + d(p_3, p_2) > d(p_1, p_2)$. Ausserdem gilt $d(p_1, p_2) \geq 2\varepsilon - (\varepsilon/3) = (5/3)\varepsilon$, wie die Dreiecksungleichung auf das Punkttripel (p_1, p_2, a) angewandt ergibt; das gleiche gilt für $d(p_1, p_3)$, folglich $d(p_1, p_2) + d(p_1, p_3) \geq (10/3)\varepsilon$. Die Dreiecksungleichung von (p_2, p_3, a) ergibt $d(p_2, p_3) \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3$, also folgt $d(p_1, p_2) + d(p_1, p_3) > d(p_2, p_3)$. Das Punkttripel (p_1, p_2, p_3) erfüllt also die Dreiecksungleichungen strikt, folglich gibt es mit (2.4) ein Dreieck t mit diesen Eckpunkten.

Das Dreieck t enthält nach Konstruktion die Geodäte von p_1 nach b . Diese liegt bis auf ihre Endpunkte im Innern von t ; kann man also zeigen, dass sie durch p geht, ist der Beweis abgeschlossen. Klarerweise liegt p auf der Verlängerung der Geodäte durch p_1 und b . Es ist also

hinreichend zu zeigen, dass $d(p_1, p) < d(p_1, b)$ gilt. Nun ist $d(p_1, p) = \varepsilon$, aber

$$\begin{aligned} d(p_1, b) &> d(p_1, p_2) - d(b, p_2) \\ &\geq (5/3)\varepsilon - (2/3)\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

(2.7) Lemma: Sei M eine kompakte Riemannsche Fläche. Sei \mathcal{T} eine endliche Menge kleiner Geodätendreiecke. Dann gibt es eine endliche Menge \mathcal{S} von Geodätendreiecken, die eine Triangulierung und eine Verfeinerung von \mathcal{T} ist.

Beweis: Sei $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$. Sei $E_1 = E(\mathcal{T})$. E_1 ist endlich. Wende auf (t_1, E_1) folgenden Algorithmus an:

Beschreibung des Algorithmus Eingabe: Ein Paar (t, E) , wobei t ein kleines Geodätendreieck ist und E eine endliche Menge von Geodäten.

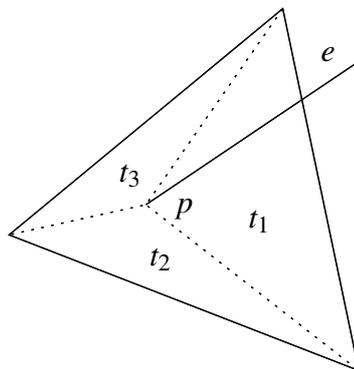
Ausgabe: Eine endliche Menge N von kleinen Geodätendreiecken mit folgenden Eigenschaften:

1. $\bigcup N = t$, und die drei Kanten von t sind Vereinigung von Kanten von Dreiecken aus N .
2. Für jede Geodäte $e \in E$ ist $e \cap t$ Vereinigung von Kanten von Dreiecken aus N .
3. Das Innere zweier Dreiecke aus N hat keine Schnittmenge.
4. Kein Dreieck aus N hat eine Ecke, die auf dem Innern einer Kante eines Dreiecks von N liegt.

Vorgehen: Folge dem ersten der folgenden Fälle (i) – (iii), dessen Bedingung eine Geodäte $e \in E$ erfüllt. Falls für keine der Geodäten einer der Fälle (i) – (iii) eintritt, sei die Ausgabe $N = \{t\}$.

- (i) Falls eines der Enden p von e in t° liegt.

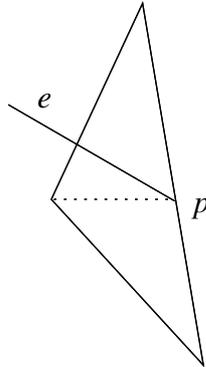
Man kann t wie in der Skizze in drei Dreiecke t_1 , t_2 und t_3 teilen; sei E' die Vereinigung von E mit den drei gestrichelten Geodäten. Sei N die Vereinigung der Ausgaben des Algorithmus, angewendet auf (t_1, E') , (t_2, E') und (t_3, E') .



Für $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt $t_i^\circ \subset t^\circ$, und ausserdem $p \notin t_i^\circ$. Also ist die Anzahl von Kantenenden in t_i geringer als die in t , folglich bricht die Rekursion ab, d.h. (i) tritt nur endlich oft ein.

- (ii) Falls eines der Enden p von e im Innern einer Kante von t liegt.

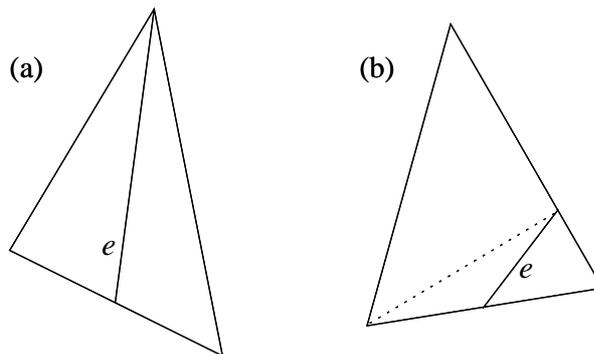
Man kann t folgendermassen in zwei kleinere Dreiecke zerlegen:



Sei E' die Vereinigung von E mit der gestrichelten Geodäte. Sei N die Vereinigung der Ausgaben des Algorithmus, angewendet auf die beiden kleineren Dreiecke mit E' . Wie bei (i) kann man zeigen, dass die Rekursion abbricht.

- (iii) Falls e und t° nicht disjunkt sind.

Da (i) nicht eingetreten ist, liegen die Ecken von e ausserhalb von t° , und folglich schneidet e den Rand von t . Weil e keine Kante von t zweimal schneidet (nach (1.13)), gibt es zwei verschiedene Schnittpunkte. Und da e nicht das Innere aller drei Kanten von t schneidet (nach (2.5)), und auch nicht mehrere Ecken von t schneidet, gibt es genau zwei Schnittpunkte. t und e können auf zwei Weisen zueinander liegen: Entweder e schneidet zwei verschiedene Kanten von t (Fall (a)), oder e schneidet eine Ecke von t und die gegenüberliegende Kante (b).



Im Fall von (a) kann man t in zwei, im Fall von (b) in drei kleinere Dreiecke aufteilen, wie in den Skizzen angedeutet. Sei E' im Fall von (b) gleich der Vereinigung von E mit

der gestrichelten Geodäte und im Fall von (a) gleich E . Sei N die Vereinigung der Ausgaben des Algorithmus, angewendet auf die zwei oder drei kleineren Dreiecke mit der Geodätenmenge E' . Wie oben kann man zeigen, dass die Rekursion abbricht.

Beweis der Korrektheit des Algorithmus Es ist klar, dass die 1. Bedingung erfüllt ist. Die 3. und 4. Bedingung gelten zu Anfang, und jeder der Schritte (i) – (iv) lässt sie intakt. Durch Induktion folgt also, dass 3. und 4. gelten.

Zur 2. Bedingung: Sei $e \in E$. Wegen Schritt (iii) gilt für jedes $s \in N : e \cap s^\circ = \emptyset$. Daraus folgt $e \cap t \subset \bigcup_{s \in N} \partial s$. Sei f eine Kante eines Dreiecks $s \in N$ mit $f^\circ \cap e^\circ \neq \emptyset$. Aus (iii) folgt, dass f und e gemeinsame Verlängerung haben. Wegen Schritt (ii) liegen die Enden von e auf Ecken von Dreiecken aus N , also nicht im Inneren von f ; also gilt $f \subset e$.

Also enthält e die Vereinigung aller Kanten f eines Dreiecks aus N , für die $e^\circ \cap f^\circ \neq \emptyset$ gilt, und diese Vereinigung enthält $(e \cap t)^\circ$. Da sie abgeschlossen ist, enthält sie auch $e \cap t$.

Damit ist $e \cap t$ Vereinigung von Kanten von Dreiecken aus N . □

Anwendung des Algorithmus Sei nun N_1 das Ergebnis des Algorithmus, angewendet auf (t_1, E_1) . Definiere für alle $i = 2, \dots, n$ E_i als $E_{i-1} \cup E(N_{i-1})$ und N_i als das Ergebnis des Algorithmus, angewendet auf (E_i, t_i) . Sei $N = \bigcup_{i=1}^n N_i$. Im Allgemeinen ist N zwar keine Triangulierung; sei jedoch $E = \bigcup_{s \in N} \partial s$. Seien U_1, \dots, U_m die Zusammenhangskomponenten von $(\bigcup N) \setminus E$. Es gibt nur endlich viele U_i , weil die Ränder der Zusammenhangskomponenten aus Abschnitten von Kanten aus einem E_i bestehen; es gibt nur endlich viele solcher Abschnitte, und jeder Abschnitt ist Rand höchstens zweier Zusammenhangskomponenten. Im Folgenden wird gezeigt, dass $\mathcal{S} := \{\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_m\}$ eine Verfeinerung von \mathcal{T} und eine Triangulierung ist.

Es ist zu zeigen, dass \overline{U}_i ein Dreieck ist: Sei k die grösste Zahl in $\{1, \dots, n\}$, für die $\overline{U}_i \subset t_k$. Eine solche Zahl existiert, weil ein Dreieck $t \in \mathcal{T}$ entweder disjunkt zu U_i ist, oder U_i als Teilmenge enthält.

Der Abschluss \overline{U}_i von U_i ist eine Zusammenhangskomponente von $t_k \setminus \bigcup E(N_k)$, da alle später hinzugefügten Kanten aus einem E_j mit $j > k$ U_i nicht schneiden. Also ist \overline{U}_i ein Dreieck.

Weiterhin ist zu zeigen, dass die Bedingung aus (2.2) erfüllt ist: Nach Definition ist $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j = \partial U_i \cap \partial U_j$. Sei e eine Kante von \overline{U}_i . e° schneidet nach Konstruktion keine anderen Kanten. Also gilt entweder $e \subset \partial U_i \cap \partial U_j$, oder $e^\circ \cap (\partial U_i \cap \partial U_j) = \emptyset$.

Unter Verwendung der Tatsache, dass zwei Geodäten, die sich in zwei Punkten schneiden, identische Verlängerung haben, kann man nun vier Fälle unterscheiden, danach, wie viele Ecken \overline{U}_i und \overline{U}_j gemeinsam haben:

0 : Der Schnitt ist leer.

1 : Der Schnitt ist eine gemeinsame Ecke.

2 : Der Schnitt ist die Kante, die zwischen den beiden Ecken verläuft.

3 : Dieser Fall ist ausgeschlossen, da folgte, dass alle drei Kanten im Schnitt lägen, und damit die Dreiecke identisch wären.

Also ist \mathcal{S} eine Triangulierung. □

Beweis von (2.3): Wegen (2.6) gibt es für jedes $p \in M$ ein kleines Geodätendreieck t_p mit $p \in t_p^\circ$. Das Innere aller dieser Dreiecke überdeckt M offen. Da M kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, also endlich viele kleine Geodätendreiecke t_1, \dots, t_n , die ganz M überdecken. Aus (2.7) folgt nun die Existenz einer Triangulierung. \square

(2.8) Zusatz Man kann zu einer gegebenen Triangulierung \mathcal{T} von M und einer endlichen Menge $V \subset M$ eine feinere Triangulierung \mathcal{T}' finden, deren Eckenmenge V enthält, sodass jedes Dreieck in \mathcal{T}' höchstens eine Ecke aus V hat.

Beweis: Verfahre ähnlich wie im Beweis von (2.7). \square

§2 Die Eulercharakteristik

(2.9) Definition: Sei M eine kompakte Riemannsche Fläche und \mathcal{T} eine Triangulierung von M . Seien $v(\mathcal{T})$, $e(\mathcal{T})$ und $t(\mathcal{T})$ die Anzahl der Ecken, Kanten und Dreiecke in \mathcal{T} , dann ist *Euler-Charakteristik* $\chi(M)$ als

$$\chi(M) = v(\mathcal{T}) - e(\mathcal{T}) + t(\mathcal{T})$$

definiert.

(2.10) Lemma: $\chi(M)$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig davon, welche Triangulierung \mathcal{T} betrachtet wird. Ferner gilt $\chi(M) = 2 - 2g$, wobei g das Geschlecht von M ist.

Beweis: Ein *konvexes Polygon* in \mathbb{C} ist die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Im weiteren Verlauf des Beweises bedeutet „Polygon“ stets „konvexes Polygon“. Zwei beliebige Kanten zweier nicht notwendigerweise verschiedener Polygone sind homöomorph und lassen sich also via eines Homöomorphismus verkleben. Seien P_1, \dots, P_n Polygone und \sim eine Äquivalenzrelation auf $\bigsqcup_{i=1}^n P_i$, die durch das Verkleben von Kanten entsteht. Falls $\bigsqcup_{i=1}^n P_i / \sim = M$ gilt, so bilden die Polygone P_1, \dots, P_n zusammen mit \sim eine *verallgemeinerte Triangulierung*. Jede Triangulierung liefert eine solche allgemeine Triangulierung.

Sei \mathcal{A} eine verallgemeinerte Triangulierung. Seien $v(\mathcal{A})$ und $e(\mathcal{A})$ die Anzahl der Ecken und Kanten in \mathcal{A} , wobei verklebte Ecken und Kanten nicht mehrfach gezählt werden; sei ferner $t(\mathcal{A})$ die Anzahl der Polygone in \mathcal{A} . Dann ist die Eulercharakteristik $\chi(\mathcal{A})$ als $v(\mathcal{A}) - e(\mathcal{A}) + t(\mathcal{A})$ definiert.

Behauptung: Es gibt eine verallgemeinerte Triangulierung \mathcal{A} von M , die aus einem einzigen Polygon P_0 besteht und deren Eulercharakteristik gleich der Eulercharakteristik von \mathcal{T} ist.

Beweis: Sei \mathcal{A}' eine verallgemeinerte Triangulierung mit minimaler Anzahl an Polygonen, die $\chi(\mathcal{A}') = \chi(\mathcal{T})$ erfüllt. Falls \mathcal{A}' nur aus einem Polygon besteht, ist der Beweis abgeschlossen. Andernfalls gibt es, weil M zusammenhängend ist, zwei Polygone $P, P' \in \mathcal{A}'$, die eine gemeinsame Kante e haben. Sei $P'' = P \sqcup P' / e$ die Verklebung von P und P' entlang e . Dies ist ein Polygon und $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}' \cup \{P''\} \setminus \{P, P'\}$ ist eine verallgemeinerte Triangulierung von M , die eine Kante und ein Polygon weniger als \mathcal{A}' und damit die gleiche Eulercharakteristik hat. Dies

steht im Widerspruch dazu, dass \mathcal{A}' eine verallgemeinerte Triangulierung mit $\chi(\mathcal{A}') = \chi(\mathcal{T})$ ist, die die minimale Anzahl an Polynomen enthält. \square

Sei g das Geschlecht von M . Man kann nun, ohne die Eulercharakteristik zu ändern, \mathcal{A} zu einer verallgemeinerten Triangulierung \mathcal{A}' von M modifizieren, die nur aus einem Polygon besteht, welches folgende Eigenschaften erfüllt: Alle seine Eckpunkte sind verklebt und es hat $4g$ Kanten, von denen je zwei miteinander verklebt sind. Siehe dazu *tom Dieck*, Kapitel III.6, S. 225 – 230. Also gilt $e(\mathcal{A}') = 2g$; ferner gilt $t(\mathcal{A}') = 1$ und $v(\mathcal{A}') = 1$. Folglich ist $\chi(\mathcal{T}) = \chi(\mathcal{A}') = 2 - 2g$. \square

3 Holomorphe Abbildungen

§1 Definition und Beispiele

(3.1) Definition: Seien M und N Riemannsche Flächen. Eine Funktion $f : M \rightarrow N$ heisst *holomorphe Abbildung* falls für jede Karte $\varphi : U \rightarrow V$ von M und jede Karte $\psi : R \rightarrow W$ von N die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap f^{-1}(R))} : \varphi(U \cap f^{-1}(R)) \rightarrow W$$

holomorph ist.

(3.2) Bemerkung: Zugunsten der Lesbarkeit wird im Rest des Kapitels darauf verzichtet anzugeben, wie die Verknüpfung von Abbildungen eingeschränkt werden müssen. Zum Beispiel wird $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ anstelle von $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap f^{-1}(R))}$ geschrieben usw.

(3.3) Lemma: Seien M und N Riemannsche Flächen und $f : M \rightarrow N$. Es gebe für jedes $p \in M$ eine Karte $\varphi_p : U_p \rightarrow V_p$ auf M mit $p \in U_p$ und eine Karte $\psi_p : R_p \rightarrow W_p$ auf N mit $f(p) \in R_p$, sodass gilt: $\psi_p \circ f \circ \varphi_p$ ist holomorph. Dann ist f eine holomorphe Abbildung.

Beweis: Sei $\varphi : U \rightarrow V$ eine Karte von M und $\psi : R \rightarrow W$ eine Karte von N . Sei $p \in U$. Da die zwei Karten φ und φ_p auf M und die zwei Karten ψ und ψ_p auf N jeweils verträglich sind, sind $\varphi_p \circ \varphi^{-1}$ und $\psi \circ \psi_p^{-1}$ holomorph. Also ist auch $(\psi \circ \psi_p^{-1}) \circ (\psi_p \circ f \circ \varphi_p^{-1}) \circ (\varphi_p \circ \varphi^{-1}) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ holomorph. \square

(3.4) Definition: Eine *holomorphe Funktion* ist eine holomorphe Abbildung nach \mathbb{C} .

(3.5) Definition: Zwei Riemannsche Flächen M und N heissen *biholomorph*, geschrieben $M \cong N$, falls es eine *biholomorphe Abbildung* $f : M \rightarrow N$ gibt: Das ist eine holomorphe bijektive Abbildung, deren Inverses auch holomorph ist.

(3.6) Lemma: Eine holomorphe Abbildung $f : M \rightarrow N$, die invertierbar ist, hat auch ein holomorphes Inverses.

Beweis: Sei $\psi : R \rightarrow W$ eine Karte auf N und $\varphi : U \rightarrow V$ eine Karte auf M . Dann ist $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}$. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge

von \mathbb{C} , und da ihr Inverses existiert, ist es holomorph (siehe *Lang*, Theorem 6.4, S. 82). Mit (3.3) folgt, dass f^{-1} holomorph ist. \square

(3.7) Beispiel: Sei G wie in (1.8) eine Gruppe, die holomorph und eigentlich diskontinuierlich auf einer Riemannschen Fläche M operiert. Die holomorphen Abbildungen $f : M/G \rightarrow N$ auf eine weitere Riemannsche Fläche N entsprechen bijektiv denjenigen holomorphen Abbildungen $\hat{f} : M \rightarrow N$, die G -periodisch sind, d.h. für die $\forall p \in M \forall g \in G : \hat{f}(g \cdot p) = \hat{f}(p)$ gilt.

Beweis: Jedem f ordne man $f \circ \pi$ zu. Für gegebenes f ist $f \circ \pi : M \rightarrow N$ holomorph und G -periodisch. Wegen $f \neq g \Rightarrow f \circ \pi \neq g \circ \pi$ ist die Zuordnung injektiv.

Für den Beweis der Surjektivität sei ein $\hat{f} : M \rightarrow N$ gegeben. Sei $f(q) := \hat{f}(p)$ wobei $p \in \pi^{-1}(q)$. Welches p man wählt spielt wegen der G -Periodizität keine Rolle. Es bleibt zu prüfen, dass $\hat{f} = f \circ \pi$ gilt und f holomorph ist:

Für $q \in M/G$ kann man ein $p \in \pi^{-1}(q)$ und eine Karte $\varphi : U \rightarrow V$ wählen, sodass $p \in U$ und $\forall g \in G \setminus \{e\} : g(U) \cap U = \emptyset$. Dann ist $\pi(U)$ eine offene Umgebung von q und $\pi(U)$ ist homöomorph zu U . $\varphi \circ (\pi|_U)^{-1} : \pi(U) \rightarrow V$ ist eine Karte, deren Gebiet q enthält. Es gilt $f \circ (\varphi \circ (\pi|_U)^{-1})^{-1} = \hat{f} \circ \varphi^{-1}$. Also ist f holomorph. \square

Sätze der Funktionentheorie wie den folgenden kann man leicht auf Riemannsche Flächen übertragen:

(3.8) Identitätssatz: Seien $f, g : M \rightarrow N$ zwei holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen. Sei $A \subset M$ die Menge, auf der f und g übereinstimmen. Hat A einen Häufungspunkt, so gilt $f = g$.

Beweis: Sei $p \in M$ ein Häufungspunkt von A . Da f und g stetig sind, gilt $f(p) = g(p) \Rightarrow p \in A$. A enthält also alle seine Häufungspunkte und ist damit abgeschlossen.

Sei $\varphi : U \rightarrow V$ eine Karte mit $p \in U$ und $\psi : R \rightarrow W$ eine Karte mit $f(p) \in R$. Dann sind $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ und $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ holomorphe Funktionen auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{C} .

Sie stimmen auf $\varphi(A \cap U)$ überein, und diese Menge hat in V einen Häufungspunkt, nämlich $\varphi(p)$. Nach dem Identitätssatz der Funktionentheorie (siehe *Lang*, Theorem 1.2(ii), S. 90) sind die zwei Funktionen auf V identisch, also gilt auch $f|_U = g|_U$. Jeder Punkt $p \in A$ hat also eine offene Umgebung $U \subset A$, folglich ist A offen; A ist aber auch abgeschlossen, und da M zusammenhängend ist, folgt $A = M \Rightarrow f = g$. \square

(3.9) Beispiel: Verklebung Seien M und N Riemannsche Flächen. Seien $U \subset M$ und $V \subset N$ offene, nicht-leere Teilmengen und $f : U \rightarrow V$ eine biholomorphe Abbildung.

Dann lassen sich M und N via f zu einem topologischen Raum $O = (M \sqcup N) / \sim$ verkleben, wobei $\forall p \in U : p \sim f(p)$. Als Atlas auf O wähle man die Vereinigung der Atlanten von M und N ; formal formuliert seien $i : M \rightarrow O$ und $j : N \rightarrow O$ die kanonischen Inklusionen, und der Atlas auf O sei die Vereinigung aller $\varphi \circ i^{-1}|_{i(R)}$ und $\psi \circ j^{-1}|_{j(S)}$ für Karten $\varphi : R \rightarrow W$ auf M und $\psi : S \rightarrow T$ auf N .

Es ist zu prüfen, dass diese Karten wirklich einen Atlas bilden. Sind φ, φ' Karten auf M , so sind die zwei Karten $\varphi \circ i^{-1}$ und $\varphi' \circ i^{-1}$ verträglich: $(\varphi \circ i^{-1}) \circ (\varphi' \circ i^{-1})^{-1} = \varphi \circ \varphi'^{-1}$. Zwei Karten $\varphi \circ i^{-1}$ und $\psi \circ j^{-1}$, wobei φ eine Karte auf M ist und ψ eine Karte auf N ist, sind

ebenfalls verträglich: Der Schnitt der Kartengebiete der beiden Karten liegt in U , folglich $(\psi \circ j^{-1}) \circ (\varphi \circ i^{-1})^{-1} = \psi \circ (j^{-1} \circ i) \circ \varphi^{-1} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Diese Funktion ist holomorph, weil f nach Voraussetzung holomorph ist.

Ähnlich wie im Beispiel (1.8) prüft man, dass O zusammenhängend und zweitabzählbar ist. Falls also O hausdorffsch ist, ist O eine Riemannsche Fläche.

§2 Multiplizität und Grad

(3.10) Satz: Seien M und N Riemannsche Flächen und $f : M \rightarrow N$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Ist $p \in M$, so gibt es eine bei p zentrierte Karte $\varphi : U \rightarrow V$ und eine bei $f(p)$ zentrierte Karte $\psi : R \rightarrow W$ und ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = z^n.$$

Ferner ist n eindeutig bestimmt, d.h. nicht von der Wahl der Karten abhängig. Man nennt n die *Multiplizität von f bei p* , geschrieben $\text{mult}_p(f)$.

Beweis:

Existenz von n : Sei $\varphi : U \rightarrow V$ irgendeine Karte auf M mit $p \in U$ und $\psi : R \rightarrow W$ irgendeine Karte auf N mit $f(p) \in R$. Man kann φ bzw. ψ mit einer Verschiebung verketten und deshalb annehmen, dass φ und ψ bei p bzw. $f(p)$ zentriert seien. Ausserdem kann man φ auf die Zusammenhangskomponente von $U \cap f^{-1}(R)$ einschränken, die p enthält. Sei also U zusammenhängend und $U \subset f^{-1}(R)$.

Sei $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow W$. Dies ist eine holomorphe Funktion auf der zusammenhängenden Menge $V \subset \mathbb{C}$, also gibt es komplexe Koeffizienten a_j , sodass für alle $z \in V$

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$$

gilt. Aus $g(0) = \psi(f(\varphi^{-1}(0))) = \psi(f(p)) = 0$ folgt $a_0 = 0$. Sei $n \geq 1$ der Index des ersten nicht verschwindenden Koeffizienten. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $h : V \rightarrow W$ mit $h(0) \neq 0$ und $g(z) = z^n \cdot h(z)$. Die Ableitung der holomorphen Funktion $z \mapsto z^n$ verschwindet bei $h(0)$ nicht. Mit dem Umkehrsatz (siehe *Lang*, Theorem II.6.1(c), S. 76) existiert also eine offene Umgebung von $h(0)$, auf der $z \mapsto z^n$ invertierbar ist. Sei S das Urbild dieser Umgebung unter h . Wie oben kann man annehmen, dass S eine zusammenhängende Umgebung um 0 ist. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $k : S \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\forall z \in S : h(z) = k(z)^n \quad \Rightarrow \quad g(z) = (z \cdot k(z))^n = (\ell(z))^n$$

wobei $\ell(z) = z \cdot k(z)$ eine holomorphe Funktion auf S ist. Also gibt es komplexe Koeffizienten b_j sodass

$$\forall z \in S : \ell(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j.$$

Daraus folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j = g(z) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j \right)^n$$

Aus $a_n \neq 0$ folgt durch Koeffizientenvergleich $b_1 \neq 0$; Da $\ell'(0) = b_1 \neq 0$ existiert mit dem Umkehrsatz eine Umgebung $S' \subset S$ um 0, auf der ℓ invertierbar ist. Die Abbildung $\ell \circ \varphi : \varphi^{-1}(S') \rightarrow \ell(S')$ ist ein Homöomorphismus und somit eine Karte auf M . Diese ist verträglich mit dem gegebenen Atlas, denn für eine weitere Karte $\varphi' : U' \rightarrow V'$ ist $\ell \circ \varphi \circ \varphi'^{-1} = \ell \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1})$ als Verknüpfung holomorpher Funktionen holomorph. Ausserdem gilt

$$\psi \circ f \circ (\ell \circ \varphi)^{-1} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \ell^{-1} = g \circ \ell^{-1} = z^n.$$

Also erfüllen die gefundenen Karten $\ell \circ \varphi$ und ψ die gewünschten Eigenschaften.

Eindeutigkeit von n : Seien $\varphi : U \rightarrow V$ und $\psi : R \rightarrow W$ mit $g(z) := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^n$ Karten, die die Erfordernisse des Satzes erfüllen. Sei $\varphi' : U' \rightarrow V'$ und $\psi' : R' \rightarrow W'$ mit $g'(z) := \psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}(z) = z^m$ ein weiteres Paar solcher Karten.

Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(0) \subset \varphi(U \cap U') \cap \varphi'(U \cap U')$. Es ist $g(B_\varepsilon(0)) = B_{\varepsilon^n}(0)$ und $g'(B_\varepsilon(0)) = B_{\varepsilon^m}(0)$. Wähle

$$q \in \psi^{-1}(B_{\varepsilon^n}(0) \setminus \{0\}) \cap \psi'^{-1}(B_{\varepsilon^m}(0) \setminus \{0\})$$

Dann hat $\psi(q)$ unter g genau n Urbilder in $\varphi(U \cap U')$; also hat q unter f genau n Urbilder in $U \cap U'$. Analog hat q unter f genau m Urbilder in $U \cap U'$. Also ist $n = m$. \square

(3.11) Korollar: Sei $f : M \rightarrow N$ eine holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Sei $p \in M$, und seien $\varphi : U \rightarrow V$ und $\psi : W \rightarrow R$ bei p bzw. $f(p)$ zentrierte Karten. Sei $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, dann gilt

$$\text{mult}_p(f) = \text{ord}_0 g.$$

Dabei bezeichnet $\text{ord}_{\varphi(p)} g'$ die *Verschwindungsordnung* der Ableitung von g bei $\varphi(p)$. Falls die Karten nicht bei p bzw. $f(p)$ zentriert sind, sondern p bzw. $f(p)$ nur enthalten, so ist

$$\text{mult}_p(f) = 1 + \text{ord}_{\varphi(p)} g'.$$

Beweis: Seien bei p bzw. $f(p)$ zentrierte Karten φ und ψ gegeben. Im Beweis von (3.10) hat man gesehen, dass dann $\text{mult}_p(f)$ gleich dem Index des ersten nicht verschwindenden Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist. Dies ist gleich der Verschwindungsordnung $\text{ord}_0 g$ von g bei 0. Beachte, dass $\text{ord}_0 g = 1 + \text{ord}_0 g'$ gilt.

Seien nun nicht notwendigerweise zentrierte Karten φ und ψ gegeben. Verschiebe die Karten φ und ψ so, dass sie bei p bzw. $f(p)$ zentriert sind. Diese neuen Karten seien mit φ' und ψ' bezeichnet, und es sei $h := \psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$. Es gilt $h(z) = g(z + \varphi(p)) - g(\varphi(p)) \Rightarrow g'(z + \varphi(p)) = h'(z)$. Also ist $1 + \text{ord}_{\varphi(p)} h' = 1 + \text{ord}_0 g' = \text{mult}_p(f)$. \square

(3.12) Lemma: Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow O$ holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen. Dann gilt für alle $p \in M$:

$$\text{mult}_p(g \circ f) = \text{mult}_{f(p)}(g) \cdot \text{mult}_p(f)$$

Beweis: Wähle eine um p zentrierte Karte $\varphi : U \rightarrow V$, eine um $f(p)$ zentrierte Karte $\psi : R \rightarrow W$, und eine um $g(f(p))$ zentrierte Karte $\omega : S \rightarrow T$.

Dann ist $\text{mult}_p(f) = \text{ord}_{\varphi(p)} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ und $\text{mult}_{f(p)}(g) = \text{ord}_{\psi(f(p))} \omega \circ g \circ \psi^{-1}$.

Ferner

$$\begin{aligned} \text{mult}_p(g \circ f) &= \text{ord}_{\varphi(p)} \omega \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} \\ &= \text{ord}_{\varphi(p)} (\omega \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \\ &= (\text{ord}_{\psi(f(p))} \omega \circ g \circ \psi^{-1}) \cdot (\text{ord}_{\varphi(p)} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \\ &= \text{mult}_{f(p)}(g) \cdot \text{mult}_p(f) \end{aligned}$$

□

(3.13) Definition: Seien M und N Riemannsche Flächen. Ein *Verzweigungspunkt* einer holomorphen Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist ein Punkt $p \in M$ mit $\text{mult}_p(f) > 1$.

Im Englischen heissen die Verzweigungspunkte *ramification points* und die Bilder der Verzweigungspunkte *branch points*. Ein eigenes deutsches Wort für die Bilder der Verzweigungspunkte scheint es nicht zu geben.

(3.14) Lemma: Die Verzweigungspunkte einer nicht-konstanten holomorphen Abbildung $f : M \rightarrow N$ liegen diskret in M .

Beweis: Sei $p \in M$ ein Verzweigungspunkt. Seien $\varphi : U \rightarrow V$ und $\psi : R \rightarrow W$ Karten auf M und N , mit $p \in U$ und $f(p) \in W$. Dann hat nach (3.11) $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'$ eine Nullstelle bei p . Ausserdem ist diese Funktion holomorph und nicht konstant, hat also in einer offenen Umgebung V' von $\varphi(p)$ keine weiteren Nullstellen. Folglich enthält $\varphi^{-1}(V')$ keine weiteren Verzweigungspunkte.

□

(3.15) Korollar: Ist $f : M \rightarrow N$ eine holomorphe Abbildung von einer kompakten Riemannschen Fläche M , so hat f nur endlich viele Verzweigungspunkte.

(3.16) Lemma: Eine nicht-konstante holomorphe Abbildung $f : M \rightarrow N$ von einer kompakten Riemannschen Fläche M ist surjektiv. Falls es eine solche Abbildung gibt, ist N kompakt.

Beweis: Sei $p \in M$. Sei $\varphi : U \rightarrow V$ eine Karte auf M mit $p \in U$ und $\psi : R \rightarrow W$ eine Karte auf N mit $f(p) \in R$. Dann ist $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ holomorph und nicht-konstant und somit offen (Offenheitssatz, siehe Lang, Theorem 6.2, S. 81) Also ist $f|_{U \cap f^{-1}(R)}$ offen. $U \cap f^{-1}(R)$ ist eine offene Umgebung von p . Somit hat M eine offene Überdeckung $\{U_i\}_i$, sodass $f(U_i)$ für alle i offen ist. Also ist $f(M)$ offen. Da M kompakt und f stetig ist, ist $f(M)$ auch kompakt. Weil N hausdorffsch ist, ist $f(M)$ abgeschlossen, und weil N zusammenhängend ist, folgt $f(M) = N$. Daraus folgt, dass f surjektiv und N kompakt ist.

□

(3.17) Satz: Sei $f : M \rightarrow N$ eine nicht-konstante und holomorphe Abbildung auf einer kompakten Riemannschen Fläche M . Dann ist

$$\delta : N \rightarrow \mathbb{N}, \quad \delta(q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{mult}_p(f)$$

konstant. Diese Zahl heisst der *Grad* von f , geschrieben $\text{deg } f$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass δ lokalkonstant ist, d.h. dass jeder Punkt $q \in N$ eine Umgebung hat, auf der δ konstant ist. Weil N zusammenhängend ist, folgt daraus, dass δ auf ganz N konstant ist.

Seien $\{p_1, \dots, p_n\}$ die Urbilder von q . Die Abbildung f habe bei p_i die Multiplizität d_i . Wegen (3.16) ist $n \geq 1$. Es gilt $\delta(q) = d_1 + \dots + d_n$. Wähle für jedes i ein Paar von Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ und $\psi_i : R_i \rightarrow W_i$ wie in (3.10), sodass $\varphi_i \circ f \circ \psi_i^{-1} = z^{d_i}$. Wähle für jedes i eine offene Umgebung U'_i von p_i , die disjunkt zu $\bigcup_{j=1, j \neq i}^d U_j$ ist; dies ist möglich, weil M hausdorffsch ist. Durch Einschränken

der Karte φ_i auf $U_i \cap U'_i$ kann man annehmen, dass die U_i paarweise disjunkt sind. Sei $R = \bigcap_{i=1}^d R_i$. Man kann U_i durch $U_i \cap f^{-1}(R)$ ersetzen und so o.B.d.A annehmen, dass für $\forall i : f(U_i) = R$ gilt. U_i ist immer noch eine offene Umgebung von p_i . Sei $q' \in R$. In U_i hat q' d_i Urbilder, d.h. $\#(f^{-1}(q') \cap U_i) = d_i$; an allen Urbildern hat f Multiplizität 1, d.h. $\delta(q') \geq d_1 + \dots + d_n = \delta(q)$.

Es bleibt $\delta(q') \leq \delta(q)$ zu prüfen, d.h. dass es keine weiteren Urbilder gibt. Falls es eine Umgebung von q gibt, in der kein Punkt Urbilder ausserhalb von $U_1 \cup \dots \cup U_n$ hat, ist der Beweis abgeschlossen. Da N erstabzählbar ist, existiert andernfalls eine Folge $(b_1, b_2, \dots) \subset N$, die gegen q konvergiert, sodass jedes b_i ein Urbild a_i hat, dass nicht in $U_1 \cup \dots \cup U_n$ liegt.

Da M kompakt ist, hat $(a_i)_{i=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge $(a_{i_j})_{j=1}^\infty \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a$. Da f stetig ist gilt $f(a) = q \Rightarrow a \in \{p_1, \dots, p_n\} \Rightarrow a \in U_1 \cup \dots \cup U_n$. Daraus folgt, dass für ein genügend grosses i gilt: $a_i \in U_1 \cup \dots \cup U_n$. Widerspruch. \square

(3.18) Korollar: Seien M und N Riemannsche Flächen und M kompakt. Eine nicht-konstante holomorphe Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist genau dann biholomorph wenn sie Grad 1 hat.

Beweis: Aus $\text{deg } f = 1$ folgt, dass jeder Punkt in N hat genau ein Urbild hat; f ist also bijektiv. Also ist f nach (3.6) biholomorph. Ist umgekehrt f biholomorph, so hat jeder Punkt in N genau ein Urbild, woraus $\text{deg } f = 1$ folgt. \square

§3 Hochheben einer Triangulierung

(3.19) Definition: Seien X und Y topologische Räume. Sei $f : Y \rightarrow X$ stetig und surjektiv und $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die Abbildung f heisst *Überlagerung vom Grad d* , falls jeder Punkt $q \in X$ eine offene Umgebung U mit folgender Eigenschaft hat: Es gibt eine Überdeckung von $f^{-1}(U)$ durch paarweise disjunkte Mengen V_1, \dots, V_d , sodass $\forall i \in \{1, \dots, d\} : f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist.

Folgende Aussage wird aus der Topologie als bekannt vorausgesetzt:

(3.20) Lemma: Sei $f : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung vom Grad d . Sei $A \subset X$ eine einfach zusammenhängende Teilmenge. Dann zerfällt $f^{-1}(A) = V_1 \cup \dots \cup V_d$ in d Wegzusammenhangskomponenten, und $f|_{V_i} : V_i \rightarrow A$ ist ein Homöomorphismus für $i \in \{1, \dots, d\}$.

(3.21) Lemma: Seien M und N Riemannsche Flächen und M kompakt. Sei $f : M \rightarrow N$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung vom Grad d . Seien $\{p_1, \dots, p_n\}$ die Verzweigungspunkte von f . Sei $\widehat{N} := N \setminus \{f(p_1), \dots, f(p_n)\}$ und $\widehat{M} = M \setminus (f^{-1}(f(p_1)) \cup \dots \cup f^{-1}(f(p_n)))$. Dann ist $f|_{\widehat{M}} : \widehat{M} \rightarrow \widehat{N}$ eine Überlagerung vom Grad d .

Beweis: f ist holomorph, also insbesondere stetig. Da f nicht-konstant ist, ist f surjektiv (siehe (3.16)). Sei $q \in \widehat{N} \Rightarrow \#f^{-1}(q) = d$. Wähle für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Paar von Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ und $\psi_i : R_i \rightarrow W_i$ wie in (3.10). Wie im Beweis von (3.17) kann man annehmen, dass die U_i paarweise disjunkt sind, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : R_i = R_j =: R$ gilt und $\forall i : f(U_i) = R$. Dann ist $f^{-1}(R)$ die disjunkte Vereinigung der U_i und $f|_{U_i} : U_i \rightarrow R$ ein Homöomorphismus. Folglich ist f eine Überlagerung. \square

(3.22) Lemma: Sei $f : M \rightarrow N$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung vom Grad d mit endlich vielen Verzweigungspunkten $\{p_1, \dots, p_n\}$. Sei \mathcal{U} eine Triangulierung von N , sodass jedes $f(p_i)$ ein Eckpunkt eines Dreiecks in \mathcal{U} ist und jedes Dreieck höchstens eine solche Ecke hat. Dann lässt sich \mathcal{U} via f hochheben, d.h. es gibt eine Triangulierung \mathcal{T} von M mit folgenden Eigenschaften: \mathcal{T} enthält d mal so viele Dreiecke wie \mathcal{U} und f bildet je d Dreiecke von \mathcal{T} auf eines von \mathcal{U} ab.

Beweis: Sei $\widehat{M} := M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ und $\widehat{N} := N \setminus \{f(p_1), \dots, f(p_n)\}$. Sei $\widehat{f} := f|_{\widehat{M}}$. Sei $t \in \mathcal{U}$ ein Dreieck. Falls t kein $f(p_i)$ als Eckpunkt hat, zerfällt sein Urbild unter f in d paarweise disjunkte Dreiecke (siehe (3.20)). Sonst sei q Bild eines Verzweigungspunkts und eine Ecke von t . Es sei $\widehat{t} := t \setminus \{f(p)\}$, dann gilt

$$\widehat{f}^{-1}(\widehat{t}) = \bigcup_{i=1}^d \widehat{s}_i \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(t) = f^{-1}(q) \cup \bigcup_{i=1}^d \widehat{s}_i.$$

Sei $p \in f^{-1}(q)$. Es gibt offene Umgebungen U von p und W von q , sodass $\forall q' \in W \setminus \{q\} : \#(f^{-1}(q') \cap U) = \text{mult}_p(f)$. Sei $m = \text{mult}_p(f)$, dann gibt es m viele \widehat{s}_i , die U schneiden. Sei \widehat{s} eines dieser \widehat{s}_i und $s := \widehat{s} \cup \{p\}$. Die Abbildung $f|_s : s \rightarrow t$ ist bijektiv und stetig.

Es gilt $s = \widehat{s} \cup (U \cap s)$. Sowohl auf \widehat{s} also auch auf $U \cap s$ eingeschränkt ist f ein Homöomorphismus, insbesondere offen. Also ist $f|_s$ auch offen und damit ein Homöomorphismus. Folglich zerfällt $f^{-1}(t)$ in d Dreiecke, die paarweise disjunkt sind oder sich in einem Urbild von q schneiden. Für ein $t \in \mathcal{U}$ seien $D_{t,1}, \dots, D_{t,d}$ die gerade konstruierten d Dreiecke, deren Vereinigung $f^{-1}(t)$ ergibt. Es sei

$$\mathcal{T} = \bigcup_{t \in \mathcal{U}} \{D_{t,1}, \dots, D_{t,d}\}.$$

Es bleibt zu prüfen, dass die Menge \mathcal{T} die Bedingung aus (2.2) erfüllt:

Seien $s_1, s_2 \in \mathcal{T}$. Im Fall von $f(s_1) = f(s_2)$ ist $f(s_1) \cap f(s_2)$ leer oder eine gemeinsame Ecke (siehe oben). Sei $f(s_1) \neq f(s_2)$. Falls $f(s_1) \cap f(s_2) = \emptyset \Rightarrow s_1 \cap s_2 = \emptyset$. Falls $f(s_1) \cap f(s_2)$ ein gemeinsamer Eckpunkt q ist, so ist $f^{-1}(q) \cap s_1 = \{p_1\}$ und $f^{-1}(q) \cap s_2 = \{p_2\}$ für gewisse

$p_1, p_2 \in M$. Damit ist $s_1 \cap s_2 = \emptyset$, falls $p_1 \neq p_2$, oder $s_1 \cap s_2 = \{p_1\}$, falls $p_1 = p_2$. Falls $f(s_1) \cap f(s_2)$ eine gemeinsame Kante e ist, so sind $f^{-1}(e) \cap s_1$ und $f^{-1}(e) \cap s_2$ jeweils eine Kante, und $s_1 \cap s_2$ ist somit leer, eine Ecke oder eine Kante. \square

4 Die Hurwitzformel

§1 Beweis der Hurwitzformel

(4.1) Hurwitzformel: Seien M und N kompakte Riemannsche Flächen und $f : M \rightarrow N$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung vom Grad $\deg f = d$. Dann gilt

$$2g(M) - 2 = d \cdot (2g(N) - 2) + \sum_{p \in M} (\text{mult}_p(f) - 1).$$

(4.2) Beweis: Die Summe ist wohldefiniert, weil f nach (3.15) nur endlich viele Verzweigungspunkte $p_1, \dots, p_n \in M$ hat und der Summand für einen Punkt, der kein Verzweigungspunkt ist, verschwindet.

Sei $\{q_1, \dots, q_m\} = \{f(p_1), \dots, f(p_n)\}$ die Menge der Bilder der Verzweigungspunkte. Wähle eine Triangulierung \mathcal{T} auf N , deren Eckpunktmenge $\{q_1, \dots, q_m\}$ als Teilmenge enthält und die die Bedingung aus (2.8) erfüllt. Via f lässt sich \mathcal{T} zu einer Triangulierung \mathcal{T}' von M hochheben, siehe (3.22). Ein Punkt im Inneren eines Dreiecks oder einer Kante ist nicht Bild eines Verzweigungspunkts und hat deshalb genau d Urbilder. Folglich gilt $t(\mathcal{T}') = dt(\mathcal{T})$ und $e(\mathcal{T}') = de(\mathcal{T})$.

Sei $k = v(\mathcal{T})$ und $\{v_1, \dots, v_k\}$ die Eckenmenge von \mathcal{T} . Für einen Punkt $q \in N$ gilt nach (3.17):

$$\begin{aligned} d &= \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{mult}_p(f) \Leftrightarrow \\ d - \#f^{-1}(p) &= \sum_{p \in f^{-1}(q)} (\text{mult}_p(f) - 1) \Leftrightarrow \\ \#f^{-1}(p) &= d - \sum_{p \in f^{-1}(q)} (\text{mult}_p(f) - 1) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^k \#f^{-1}(v_i) = d \cdot k - \sum_{p \in f^{-1}(\{v_1, \dots, v_k\})} (\text{mult}_p(f) - 1)$$

Es gilt $\sum_{i=1}^k \#f^{-1}(v_i) = v(\mathcal{T}')$, und auf der rechten Seite der Gleichung kann genauso gut über alle Punkte $p \in M$ summiert werden, weil alle Verzweigungspunkte in $f^{-1}(\{v_1, \dots, v_n\})$ liegen. Also

$$\begin{aligned} v(\mathcal{T}') &= d \cdot v(\mathcal{T}) - \sum_{p \in M} (\text{mult}_p(f) - 1) \Rightarrow \\ \chi(M) &= t(\mathcal{T}') - e(\mathcal{T}') + v(\mathcal{T}') \\ &= dt(\mathcal{T}) - de(\mathcal{T}) + dv(\mathcal{T}) - \sum_{p \in M} (\text{mult}_p(f) - 1) \\ &= d\chi(N) - \sum_{p \in M} (\text{mult}_p(f) - 1) \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $\chi(M) = 2 - 2g(M)$ (siehe (2.10))

$$2g(M) - 2 = d \cdot (2g(N) - 2) + \sum_{p \in M} (\text{mult}_p(f) - 1).$$

□

§2 Geschlecht der Fermatkurven

Sei $d \geq 2$ und N die Nullstellenmenge von $F(X, Y, Z) = X^d + Y^d + Z^d$ in \mathbb{P}^2 . Es gilt $\frac{\partial F}{\partial X} = dX^{d-1}$, $\frac{\partial F}{\partial Y} = dY^{d-1}$ und $\frac{\partial F}{\partial Z} = dZ^{d-1}$. Also verschwinden nur für $X = Y = Z = 0$ alle partiellen Ableitungen von F . Folglich ist F nicht-singulär. Da F auch homogen und irreduzibel ist, ist N nach (1.11) eine Riemannsche Fläche und heisst *Fermatkurve*. Mit Hilfe der Hurwitzformel wird im Folgenden ihr Geschlecht bestimmt.

Betrachte die Abbildung $\pi : N \rightarrow \mathbb{P}^1, [X : Y : Z] \mapsto [X : Y]$. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\pi([\lambda X : \lambda Y : \lambda Z]) = [\lambda X : \lambda Y] = [X : Y] = \pi([X : Y : Z])$, also ist π wohldefiniert. Ähnlich wie in (1.11) kann man beweisen, dass π holomorph ist.

Nun werden die Verzweigungspunkte von π bestimmt. Sei $[1 : y] \in \mathbb{P}^1$. Falls $y^d \neq -1$ hat $[1 : y]$ genau d Urbilder unter π , nämlich die Punkte $[1 : y : z]$, wobei z eine der d verschiedenen Lösungen von $z^d = -(1 + y^d)$ ist. Also hat π Grad d . Falls $y^d = -1 \Leftrightarrow y = e^{\frac{\pi i}{d} \cdot (2k+1)}$ für ein $k \in \{0, \dots, d-1\}$, so hat $[1 : y]$ nur ein Urbild, nämlich $[1 : y : 0]$. Diese $[1 : y : 0]$ sind also Verzweigungspunkte; aus (3.17) folgt, dass ihre Multiplizität d ist. Wegen $\#\pi^{-1}([0 : 1]) = d$ sind dies alle Verzweigungspunkte. Es gilt $g(\mathbb{P}^1) = 0$, also besagt die Hurwitzformel nun

$$2g(N) - 2 = -2d + d(d-1) \Rightarrow g(N) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

(4.3) Bemerkung: In der Tat hat jede Riemannsche Fläche, die Nullstellenmenge eines homogenen irreduziblen nicht-singulären Polynoms vom Grad d in \mathbb{P}^2 ist das Geschlecht $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Dies ist die Aussage der *Plückerformel*, siehe *Miranda Proposition V.2.15*, S. 144, für einen Beweis.

§3 Der Satz von Hurwitz

Sei G eine endliche Gruppe mit d Elementen, die holomorph und treu auf einer kompakten Riemannschen Fläche M mit Geschlecht $g \geq 2$ operiert. Dann ist M/G ist eine Riemannsche Fläche und $\pi : M \rightarrow M/G$ hat Grad d (siehe *Miranda*, Theorem 3.4, S.78).

Sei $q \in M/G$ und seien $p, p' \in \pi^{-1}(q) \Rightarrow \exists f \in G : f \cdot p = p'$. Beachte $\pi \circ f = \pi$ und $\forall p \in M : \text{mult}_p(f) = 1$, weil f biholomorph ist. Mit (3.12) gilt also

$$\text{mult}_p(\pi) = \text{mult}_p(\pi \circ f) = \text{mult}_p(f) \cdot \text{mult}_{f(p)}(\pi) = \text{mult}_{p'}(\pi).$$

Sei $\{q_1, \dots, q_n\}$ die Menge der Bilder der Verzweigungspunkte von π . Sei $p \in \pi^{-1}(q_i)$ und $r_i := \text{mult}_p(f) \geq 2$. Dann ist $\#\pi^{-1}(q_i) = d/r_i$. Nun wendet man die Hurwitzformel an:

$$\begin{aligned} 2g(M) - 2 &= d(2g(M/G) - 2) + \sum_{i=1}^n \frac{d}{r_i} (r_i - 1) \\ &= d \left(2g(M/G) - 2 + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) \right) \end{aligned}$$

(4.4) Lemma: Für diese Summe $R = \sum_{i=1}^n (1 - \frac{1}{r_i})$ gilt:

$$R > 0 \Rightarrow R \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad R > 2 \Rightarrow R \geq 2 + \frac{1}{42}$$

Beweis: Der Beweis ist rein elementar.

$R > 0 \Rightarrow n \geq 1$. Alle Summanden sind positiv und der erste Summand ist bereits mindestens $1 - 1/2 = 1/2$.

$R > 2 \Rightarrow n \geq 3$, denn jeder Summand ist strikt kleiner als 1. Fallunterscheidung:

- Für $n \geq 5$ ist $R \geq 2 + 1/2$.
- Für $n = 4$ gibt es zwei Fälle: Falls $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 2 \Rightarrow R = 2$ und damit ist R nicht größer als 2. Sonst ist $R \geq 1/2 + 1/2 + 1/2 + 2/3 = 2 + 1/6$.
- Sei $n = 3$. Sei o.B.d.A. $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Fallunterscheidung:
 - Falls $r_1 \geq 3$, treten zwei Fälle auf: $r_1 = r_2 = r_3 = 3 \Rightarrow R = 2$. Andernfalls ist $R \geq 2/3 + 2/3 + 3/4 = 2 + 1/12$.
 - Falls $r_1 = 2$, so treten vier Fälle auf:
 - * $r_2 = 2 \Rightarrow R < 2$.
 - * $r_2 = 3$. Der kleinste Wert, den r_3 annehmen kann, sodass noch $R > 2$ gilt ist 7, also $R \geq 1/2 + 2/3 + 6/7 = 2 + 1/42$.
 - * $r_2 = 4 \Rightarrow R \geq 1/2 + 3/4 + 4/5 = 2 + 1/20$.
 - * $r_2 \geq 5 \Rightarrow R \geq 1/2 + 4/5 + 4/5 = 2 + 1/10$.

□

(4.5) Satz von Hurwitz:

$$d \leq 84(g - 1)$$

Beweis: Es gilt

$$2g - 2 = d(2g(M/G) - 2 + R)$$

$g \geq 2 \Rightarrow 2g - 2 > 0 \Rightarrow (2g(M/G) - 2 + R) \neq 0$.

Falls $g(M/G) = 1$, so ist also $(2g(M/G) - 2 + R) = R > 0 \Rightarrow (2g(M/G) - 2 + R) \geq 1/2$ mit (4.4).

Falls $g(M/G) \geq 2$, gilt sogar $(2g(M/G) - 2 + R) \geq 2$.

In diesen beiden Fällen ist also $d \leq (2g - 2) \cdot 2 = 4(g - 1) \leq 84(g - 1)$.

Im Fall $g(M/G) = 0$ ist $(2g(M/G) - 2 + R) = R - 2 > 0 \Rightarrow R \geq 2 + 1/42 \Rightarrow (2g(M/G) - 2 + R) \geq 1/42$ mit (4.4).

In diesem Fall gilt also $d \leq (2g - 2) \cdot 42 = 84(g - 1)$. □

(4.6) Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Gruppe aller Automorphismen einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ endlich ist, siehe *Miranda*, Theorem VII.4.18, S. 243.

Also hat eine solche Fläche höchstens $84(g - 1)$ Automorphismen. Diese Grenze ist scharf in dem Sinne, dass sie für unendlich viele Werte von g angenommen wird; allerdings wird sie auch für unendlich viele Werte nicht angenommen. (siehe z.B. *Accola*)

Literaturverzeichnis

- R. Miranda: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. 1. Auflage, AMS, Providence, RI 1995.
- S. Lang: *Complex Analysis*. 4. Auflage, Springer, New York u.a. 1999.
- S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: *Riemannian Geometry*. 3. Auflage, Springer, Berlin u.a. 2004.
- T. tom Dieck: *Topologie*. 1. Auflage, de Gruyter, Berlin u.a. 1991.
- R.D.M. Accola: *Topics in the Theory of Riemann surfaces*. In *Lecture Notes in Mathematics* 1595, Springer 1994.