Analysis II (FS 2017): ZUSAMMENHÄNGENDE METRISCHE RÄUME

Dietmar A. Salamon
ETH-Zürich

13. März 2017

1 Topologische Grundbegriffe

Sei (X, d) ein **metrischer Raum**, d.h. X ist eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion mit folgenden Eigenschaften

(d1) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(d2) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

(d3) Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Die Ungleichung in (d3) heisst **Dreiecksungleichung**. Die Funktion d heisst **Abstandsfunktion**. Eine Teilmenge $U \subset X$ heisst **offen** wenn es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt so dass

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset U.$$

Insbesondere ist die Menge $B_r(x)$ für jedes $x \in X$ und jedes $r > 0$ offen, denn für jedes $y \in B_r(x)$ gilt $\varepsilon := r - d(x, y) > 0$ und $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$ nach der Dreiecksungleichung. Offene Mengen haben folgende Eigenschaften.

(O1) X und $\emptyset$ sind offene Teilmengen von X.

(O2) Sind $U_1, \dots, U_n$ offene Teilmengen von X so ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen.

(O3) Ist I eine Menge und $U_i \subset X$ eine offene Teilmenge für jedes $i \in I$ so ist auch $\bigcup_{i\in I} U_i$ offen.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X **konvergiert** gegen $x \in X$ wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Eine Teilmenge $A \subset X$ heisst **abgeschlossen** wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die gegen ein Element $x \in X$ konvergiert, ihr Grenzwert x ebenfalls ein Element von A ist.

In der Analysis I Vorlesung wurde bewiesen, dass eine Teilmenge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Komplement $U := X \setminus A$ offen ist. Abgeschlossene Mengen haben folgende Eigenschaften.

(A1) Die leere Menge und der ganze Raum X sind abgeschlossene Teilmengen von X.

(A2) Sind $A_1, \dots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen von X so ist auch $\bigcup_{i=1}^n A_i$ abgeschlossen.

(A3) Ist I eine Menge und $A_i \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge für jedes $i \in I$ so ist auch $\bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst **stetig** wenn für jedes $x_0 \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ folgendes gilt

$$d_X(x, x_0) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

In der Analysis I Vorlesung wurde gezeigt, dass folgende Aussagen für jede Abbildung $f : X \to Y$ äquivalent sind.

(S1) f ist stetig.

(S2) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X die gegen $x \in X$ konvergiert, so konvergiert auch $f(x_n)$ gegen gegen $f(x) \in Y$.

(S3) Ist V eine offene Teilmenge von Y so ist $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ eine offene Teilmenge von X.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst **Homöomorphismus** wenn sie bijektiv ist und f und f^{-1} stetig sind.

2 Die Relativtopologie

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist die Restriktion der Abstandsfunktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ auf $Y \times Y$ wieder eine Abstandsfunktion, und wir bezeichnen sie mit

$$d_Y := d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}.$$

Die durch d_Y induzierte Topologie auf Y wird auch die **Relativtopologie** auf Y genannt. Eine Teilmenge $V \subset Y$ heisst **Y-offen** wenn sie bezüglich der Relativopologie offen ist. Eine Teilmenge $B \subset Y$ heisst **Y-abgeschlossen** wenn sie bezüglich der Relativtopologie abgeschlossen ist. Das folgende Lemma charakterisiert die Y-offenen und Y-abgeschlossenen Teilmengen von Y mit Hilfe der offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X.

Lemma 2.1. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge.*
(i) *Eine Teilmenge $V \subset Y$ ist genau dann Y-offen wenn es eine offenen Teilmenge $U \subset X$ gibt so dass $V = U \cap Y$ ist.*
(ii) *Eine Teilmenge $B \subset Y$ ist genau dann Y-abgeschlossen wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ gibt so dass $B = A \cap Y$ ist.*

Proof. Wir beweisen (i). Ist $V \subset Y$ offen bezüglich d_Y so gibt es für jedes $y \in V$ ein $\varepsilon > 0$ su dass

$$B_\varepsilon(y;Y) := \{x \in Y \,|\, d(x,y) < \varepsilon\} \subset V.$$

Für $y \in V$ sei $\varepsilon(y) := \sup\{\varepsilon \in (0,1] \,|\, B_\varepsilon(y;Y) \subset V\}$ Dann ist $B_{\varepsilon(y)}(y;Y) \subset V$ für jedes $y \in V$. Damit ist die Menge

$$U := \bigcup_{y\in V} B_{\varepsilon(y)}(y;X)$$

offen in X und es gilt

$$U \cap Y = \bigcup_{y\in V} \big(B_{\varepsilon(y)}(y;X) \cap Y\big) = \bigcup_{y\in V} B_{\varepsilon(y)}(y;Y) = V.$$

Gibt es andererseits eine offene Teilmenge $U \subset X$ mit $U \cap Y = V$ und ist $y \in V$, so ist auch $y \in U$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y;X) \subset U$, und daher gilt $B_\varepsilon(y;Y) = B_\varepsilon(y;X) \cap Y \subset U \cap Y = V$. Also ist V offen bezüglich d_Y. Damit ist Teil (i) bewiesen.

Um (ii) zu zeigen, nehmen wir zunächst an, dass $B \subset Y$ abgeschlossen ist bezüglich d_Y. Dann ist

$$V := Y \setminus B$$

offen bezüglich d_Y. Nach (i) gibt es also eine offene Menge $U \subset X$ so dass $U \cap Y = V$. Damit ist

$$A := X \setminus U$$

eine abgeschlossen Teilmenge von X und es gilt

$$A \cap Y = (X \setminus U) \cap Y = Y \setminus (U \cap Y) = Y \setminus V = B.$$

Ist andererseits $A \subset X$ abgeschlossen und $B = A \cap Y$, so ist

$$U := X \setminus A$$

eine offene Teilmenge von X und es gilt

$$U \cap Y = (X \setminus A) \cap Y = Y \setminus (A \cap Y) = Y \setminus B.$$

Nach (i) is daher die Menge $Y \setminus B$ offen bezüglich d_Y, und folglich ist B abgeschlossen bezüglich d_Y. Damit ist Lemma 2.1 bewiesen. $\square$

Beispiel 2.2. Sei $X = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik

$$d(x, y) := |x - y|$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Ist

$$Y := [0, 1]$$

so ist $[0, b)$ für $0 < b \leq 1$ eine Y-offene Teilmenge von Y. Hingegen ist eine Teilmenge $B \subset Y$ genau dann Y-abgeschlossen wenn sie abgeschlossen ist (da Y selbst eine abgeschlossene Teilmenge von X ist).

(ii) Ist

$$Y := (0, 1)$$

so ist $(0, b]$ für $0 < b < 1$ eine Y-abgeschlossene Teilmenge von Y. Hingegen ist eine Teilmenge $V \subset Y$ genau dann Y-offen wenn sie offen ist (da Y selbst eine offene Teilmenge von X ist).

3 Der Zusammenhangsbegriff

Ein metrischer Raum (X, d) heisst **zusammenhängend** wenn er sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen darstellen lässt, d.h. wenn für je zwei offene Teilmengen $U, V \subset X$ folgendes gilt:

$$U \cup V = X, \quad U \cap V = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad U = \emptyset \quad \text{oder} \quad V = \emptyset;$$

das heisst, dass die leere Menge und der ganze Raum die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Eine Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heisst **zusammenhängend**, wenn sie bezüglich der induzierten Metrik d_Y zusammenhängend ist. Nach Lemma 2.1 heisst das, dass für je zwei offene Teilmengen $U, V \subset X$ folgendes gilt:

$$Y \subset U \cup V, \quad Y \cap U \cap V = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad Y \cap U = \emptyset \quad \text{oder} \quad Y \cap V = \emptyset.$$

Satz 3.1. *Sei $X = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(x, y) := |x - y|$. Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. Ist $I \subset \mathbb{R}$ kein Intervall, so gibt es drei reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a, b \in I, \qquad c \notin I, \qquad a < c < b.$$

Definieren wir $U := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < c\}$ und $V := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > c\}$ so sind dies offene Mengen mit $I \subset U \cup V$, $I \cap U \neq \emptyset$, $I \cap V \neq \emptyset$. Also ist I nicht zusammenhängend.

Nehmen wir andererseits an, I sei ein Intervall und $A \subset I$ sei eine Teilmenge die sowohl offen als auch abgeschlossen ist (bezüglich der Metrik d_I) und die weder leer noch gleich dem gesamten Intervall I ist. Dann ist auch $B := I \setminus A$ nicht leer und wir wählen $a \in A$ und $b \in B$. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $a < b$ ist. Sei

$$c := \sup(A \cap [a, b]).$$

Dann gilt $c \in [a, b] \subset I$ und es gibt eine Folge $a_k \in A$ mit $a_k \leq c$ die gegen c konvergiert. Da A abgeschlossen bezüglich d_I ist, folgt hieraus dass $c \in A$ und damit $c < b$ ist. Damit ist das halboffene Intervall $(c, b]$ in B enthalten. Also gilt $c + 1/n \in B$ für jede hinreichend grosse natürliche Zahl n und damit $c = \lim_{n \to \infty}(c + 1/n) \in B$, da auch B abgeschlossen bezüglich d_I ist. Wir haben daher gezeigt, dass c sowohl ein Element von A als auch ein Element von B ist, im Widerspruch zu $A \cap B = \emptyset$. Damit ist Satz 3.1 bewiesen. $\square$

Satz 3.2. *Seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *zwei metrische Räume und* $f : X \to Y$ *eine stetige Abbildung; ist* $A \subset X$ *zusammenhängend so ist auch* $f(A) \subset Y$ *zusammenhängend.*

Beweis. Seien $U, V \subset Y$ zwei offene Mengen so dass

$$f(A) \subset U \cup V, \qquad f(A) \cap U \cap V = \emptyset.$$

Zu zeigen ist, dass eine der Mengen $f(A) \cap U$ oder $f(A) \cap V$ leer ist.

Da f stetig ist, sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offenen Teilmengen von X. Wir zeigen nun, dass diese Teilmengen folgende Eigenschaften haben:

$$A \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V), \qquad A \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset. \tag{1}$$

Ist nämlich $a \in A$ so is $f(a) \in f(A) \subset U \cup V$, und daher $f(a) \in U$ oder $f(a) \in V$; im ersten Fall gilt $a \in f^{-1}(U)$ und im zweiten Fall gilt $a \in f^{-1}(V)$. Dies beweist die erste Aussage in (1). Die zweite Aussage in (1) zeigt man am besten indirekt. Gibt es ein Element $a \in A \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ so gilt $f(a) \in f(A) \cap U \cap V$, im Widerspruch zu unserer Annahme über U und V. Damit sind beide Aussagen in (1) bewiesen.

Da A zusammenhängend ist, folgt aus (1), dass mindestens eine der Mengen $A \cap f^{-1}(U)$ oder $A \cap f^{-1}(V)$ leer ist. Wenn aber $A \cap f^{-1}(U) = \emptyset$ ist, so heisst das, dass kein Element von A unter f auf U abgebildet wird, und damit gilt auch $f(A) \cap U = \emptyset$; ebenso mit V statt U. Also ist mindestens eine der Mengen $f(A) \cap U$ oder $f(A) \cap V$ die leere Menge, wie behauptet. Damit ist Satz 3.2 bewiesen. □

Satz 3.3. (Zwischenwertsatz) *Sei* (X, d) *ein zusammenhängender metrischer Raum und* $f : X \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Seien* $x, y \in X$ *und* $c \in \mathbb{R}$ *gegeben mit*

$$f(x) < c < f(y).$$

Dann gibt es ein Element $z \in X$ *mit* $f(z) = c$.

Beweis. Da X zusammenhängend ist, folgt aus Satz 3.2 dass auch $f(X)$ zusammenhängend ist. Nach Satz 3.1 ist also $f(X)$ ein Intervall. Da $f(x)$ und $f(y)$ Elemente vom $f(X)$ sind, folgt aus der Definition eines Intervalls dass $c \in f(X)$ ist. Damit ist Satz 3.3 bewiesen. □

4 Weg-zusammenhängende Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heisst **weg-zusammenhängend** wenn für je zwei Elemente $x_0, x_1 \in A$ eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0, 1] \to A$$

existiert, welche die Punkte

$$\gamma(0) = x_0, \qquad \gamma(1) = x_1$$

miteinander verbindet.

Satz 4.1. (i) *Jede weg-zusmmanhängende Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) ist zusammenhängend.*

(ii) *Jede offene zusammenhängende Teilmenge eines normierten Vektorraumes $(X, \|\cdot\|)$ ist weg-zusmmanhängend.*

Beweis. Wir beweisen (i). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine weg-zusammenhängende Teilmenge. Es ist zu zeigen, dass A zusammenhängend ist. Wir nehmen an, dies sei nicht der Fall. Dann existieren offene Mengen $U_0, U_1 \subset X$ so dass

$$A \subset U_0 \cup U_1, \qquad A \cap U_0 \cap U_1 = \emptyset, \qquad A \cap U_0 \neq \emptyset, \qquad A \cap U_1 \neq \emptyset.$$

Sei $x_0 \in A \cap U_0$ und $x_1 \in A \cap U_1$. Da A weg-zusammenhängend existiert eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to A$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Das Intervall $I := [0, 1]$ ist die disjunkte Vereinigung der beiden I-offenen Teilmengen

$$I_0 := \gamma^{-1}(U_0) = \{t \in I \mid \gamma(t) \in U_0\}$$

und

$$I_1 := \gamma^{-1}(U_1) = \{t \in I \mid \gamma(t) \in U_1\}.$$

Diese sind beide nichtleer da $0 \in I_0$ und $1 \in I_1$ ist. Dies steht aber im Widerspruch zu der Tatsache, dass das Intervall $I = [0, 1]$ nach Satz 3.1 zusammenhängend ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Menga A entgegen unserer ursprünglichen Annahme zusammenhängend sein muss, und damit ist Teil (i) bewiesen.

Wir beweisen (ii). Sei also $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter reeller Vektorraum und sei $U \subset X$ eine zusammenhängende offene Teilmenge. Sei $x_0 \in U$ und sei $U_0 \subset U$ die Menge aller Punkte $x \in U$, die sich mit x_0 durch einen stetigen Weg in U verbinden lassen, das heisst

$$U_0 := \left\{ x \in U \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es existiert eine stetige Abbildung} \\ \gamma : [0,1] \to U \text{ mit } \gamma(0) = x_0 \text{ und } \gamma(1) = x \end{array} \right\}.$$

Diese Menge ist nichtleer, da $x_0 \in U_0$ ist.

Wir zeigen, dass U_0 eine offene Teilmenge von X ist. Sei $x \in U_0$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \|x - y\| < \varepsilon\} \subset U$ ist. Da $x \in U_0$ ist, existiert eine stetige Abbildung $\beta : [0,1] \to U$ mit

$$\beta(0) = x_0, \qquad \beta(1) = x.$$

Sei $y \in B_\varepsilon(x)$ und definiere die Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} \beta(2t), & \text{für } 0 \le t \le 1/2, \\ (2 - 2t)x + (2t - 1)y, & \text{für } 1/2 < t \le 1. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig, da $\beta(1) = x$ ist; sie nimmt Werte in U an, da $B_\varepsilon(x) \subset U$ ist; und sie erfüllt $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = y$. Damit ist $y \in U_0$ für jedes $y \in B_\varepsilon(x)$. Also haben wir gezeigt, dass für jedes $x \in U_0$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_0$ existiert. Also ist U_0 eine offene Teilmenge von X.

Wir zeigen, dass U_0 eine abgeschlossene Teilmenge von U bezüglich der Relativtopologie ist. Sei also $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in U_0 die gegen ein Element $x \in U$ konvergiert. Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(x) \subset U$ ist. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|x_k - x\| < \varepsilon$. Da $x_k \in U_0$ ist, existiert eine stetige Abbildung $\beta : [0,1] \to U$ mit

$$\beta(0) = x_0, \qquad \beta(1) = x_k.$$

Definiere $\gamma : [0,1] \to X$ durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} \beta(2t), & \text{für } 0 \le t \le 1/2, \\ (2 - 2t)x_k + (2t - 1)x, & \text{für } 1/2 < t \le 1. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig, da $\beta(1) = x_k$ ist; sie nimmt Werte in U an, da $B_\varepsilon(x) \subset U$ ist; und sie erfüllt $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x$. Daher ist $x \in U_0$. Damit ist gezeigt, dass U_0 eine nichtleere, U-offene, und U-abgeschlossene Teilmenge von U ist. Da U eine zusammenhängende Teilmenge von X ist folgt daraus, dass $U_0 = U$ ist. Da $x_0 \in U$ beliebig gewählt war, heisst das, dass U weg-zusammenhängend ist. Damit ist Satz 4.1 bewiesen. $\square$

5 Zusammenhangskomponenten

Lemma 5.1. *Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei I eine Menge, und sei $A_i \subset X$ eine zusammenhängende Teilmenge für jedes $i \in I$. Ist*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$$

so ist die Menge $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ zusammenhängend.

Beweis. Seien $U, V \subset X$ zwei offene Teilmengen so dass

$$A \subset U \cup V, \qquad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Sei $x_0 \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Dann gilt entweder $x_0 \in U$ oder $x_0 \in V$. Nehmen wir an $x_0 \in U$ und sei $i \in I$. Da $A_i \subset U \cup V$ und $A_i \cap U \cap V = \emptyset$ und A_i zusammenhängend ist, gilt entweder $A_i \cap U = \emptyset$ oder $A_i \cap V = \emptyset$. Da $x_0 \in A_i \cap U$ folgt hieraus $A_i \cap V = \emptyset$ und damit $A_i \subset U$. Also gilt $A_i \subset U$ für jedes $i \in I$ und damit $A \subset U$ und $A \cap V = \emptyset$. Daher ist A zusammenhängend. $\square$

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir definieren auf X folgende Äquivalenzrelation: zwei Elemente $x, y \in X$ heissen **äquivalent** (Notation $x \sim y$) wenn es eine zusammenhängende Teilmenge $A \subset X$ gibt mit $x, y \in A$. Nach Lemma 5.1 ist dies in der Tat eine Äquivalenzrelation. Darüber hinaus folgt aus Lemma 5.1, dass die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation zusammenhängend sind; sie heissen **Zusammenhangskomponenten** von X. Ist $x_0 \in X$ so heisst die Teilmenge

$$A_0 := \{x \in X \,|\, x \sim x_0\}$$

die **Zusammenhangskomponente** von x_0; dies ist die grösste zusammenhängende Teilmenge von X die x_0 enthält.

6 Beispiele

Beispiel 6.1. Sei $X := \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik und sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge. Diese Teilmenge ist weg-zusammenhängend, denn für $x_0, x_1 \in K$ definiert die Formel $\gamma(t) := (1-t)x_0 + tx_1$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to K$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Also ist K nach Satz 4.1 zusammenhängend.

Beispiel 6.2. Sei $X := \mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen mit der Standardmetrik $d(x, y) := |x - y|$. Dann besteht jede Zusammenhangskomponente nur aus einem einzigen Element. Einen solchen Raum nennt man auch **total unzusammenhängend**.

Beispiel 6.3. Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik. Dieser Raum ist zuammenhängend. Das Komplement $Y := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ des Nullvektors is zusammenhängend für $n \geq 2$ aber nicht für $n = 1$. **Übung:** Beweisen Sie diese Behauptungen. Schliessen Sie daraus, dass für $n > 1$ kein Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$ existieren kann.

Beispiel 6.4. Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik wie in Beispiel 2. Die Einheitssphäre $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ ist zusammenhängend. Ihr Komplement $Y := \mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ hat zwei Zusammenhangskomponenten für $n > 1$, und drei für $n = 1$. **Übung:** Beweisen Sie diese Behauptungen. **Hinweis:** Verwenden Sie den Begriff "weg-zusammenhängend".

Beispiel 6.5. Die Menge

$$A := \{(x, y) \mid x > 0,\ y = \sin(1/x)\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

ist eine abgeschlossene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, ist aber nicht weg-zusammenhängend. **Übung:** Beweisen Sie diese Behauptungen.

Beispiel 6.6. Die Gruppe

$$\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) := \left\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) > 0\right\}$$

für jede natürliche Zahl n zusammenhängend. (Ein eleganter Beweis dieser Aussage findet sich in [1, Seite 36/37]; siehe auch [2, Satz 4.1])) Hieraus folgt, dass die Menge der $n \times n$-Matrizen mit negativer Determinante ebenfalls zusammenhängend ist. Daher hat die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Literatur

[1] K. Königsberger, *Analysis 2*, 5. Auflage, Springer Verlag, 2003.

[2] D.A. Salamon, *Die Determinante*, ETHZ, Frühjahrssemester 2017. `http://www.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/ana2-det.pdf`