

MÉTHODES DE MIN-MAX ET LA CONJECTURE DE WILLMORE
[d'après F.C.Marques et A.A.Neves]

par **Tristan RIVIÈRE**

INTRODUCTION

L'étude des variations de Lagrangiens, c'est à dire la recherche de leurs points critiques, de leur indice, de la topologie de leurs ensembles de niveau...etc sont des problématiques anciennes des mathématiques qui vont bien au-delà du stricte champ du calcul des variations et de l'analyse en général. Elles ont eu des impacts importants dans bien d'autres domaines comme la topologie différentielle, la géométrie différentielle et riemannienne ou encore la géométrie algébrique complexe...etc (théorie de Morse, théorie de Jauges, espaces de modules..etc).

Une problématique délicate du calcul des variations consiste à identifier des points critiques autrement que par simple procédure de minimisation, en d'autre termes, la recherche de points selles. Au début du XXeme sicle G.D. Birkhoff, dans son étude de l'existence de géodésiques fermées dans l'espace des courbes homotopiques à un point sur une variété compacte sans bord, a développé avec succès une technique dite de "min-max". Cette approche telle qu'il l'a connue s'est avérée trs performante aussi longtemps que l'on travaille avec des objets 1-dimensionnels.

La théorie de la mesure géométrique, telle qu'elle a émergé au début des annes 50, fusionnant la théorie des courants de de Rham avec la notion d'ensemble rectifiable étudiée en particulier par A.Besicovitch les décénies prcdentes, était motivée par des problèmes généraux de minimisation de volume pour des sous variétés (ou plus exactement de leur version affaiblie : des courants entiers rectifiables) sous différentes contraintes de bord ou plus généralement d'homologie. Ce genre de questions avaient elle même leur origine dans le fameux problème de Plateau consistant à chercher un disque "optimal" bordant une courbe de Jordan dans un espace euclidien donné. La théorie de la mesure géométrique, au delà des questions de minimisation, s'est progressivement emparée de la question de trouver des points selles et c'est autour des annes 70 que F.Almgren et J.Pitts donnèrent le cadre d'une méthode de min-max, inspirée de Birkhoff, pour des objets très généraux comme les courants rectifiables.

Il y a bientôt 2 ans F.C.Marques et A. Neves ont mis en oeuvre cette méthode de min-max dans le cadre des courants rectifiables fermés de dimension 2 dans la sphère 3-dimensionnelle pour des déformations correspondants, entre autres, à l'action du groupe

des transformations conformes. Ils sont ainsi parvenus à mettre en évidence une surface minimale, de courbure moyenne nulle, qui minimise l'aire parmi toutes les autres surfaces minimales fermées de genre non nul. Le calcul précis de l'indice de cette surface leur a permis d'identifier cette surface comme étant le fameux tore de Clifford. Une des conséquences spectaculaire de ce résultat est la démonstration de la conjecture dite "de Willmore" qui prédisait la forme optimale des surfaces de genre non nul minimisant le lagrangien du même nom, introduit dans le cadre de la géométrie conforme par W.Blaschke au début du XXeme siècle dans son effort de fusionner l'invariance conforme et la théorie des surfaces minimales.

I. L'ORIGINE DES MÉTHODES DE MIN-MAX ET LA RECHERCHE DE GÉODÉSQUES FÉRMÉES.

Trouver une courbe dans une variété riemannienne (M, g) connexe fermée minimisant la longueur sous une contrainte homologique ou homotopique simple comme par exemple celle de prescrire ses extrémités lorsqu'elle n'est pas fermée ou comme celle d'appartenir à une classe d'homotopie donnée du $\pi_1(M)$ lorsque la courbe est un cercle est peut être l'exercice le plus élémentaire du calcul des variations. Cet exercice consiste essentiellement à s'assurer que l'espace des courbes dans lequel on pose le problème est bien fermé pour cette opération de minimisation et à faire un petit travail de preuve de régularité sur le minimum obtenu .

La question devient plus délicate lorsque l'on se pose la question de trouver une géodésique fermée sur un espace simplement connexe comme la sphère S^2 équipée d'une métrique quelconque. Cette question fut probablement considérée pour la première fois dans les travaux d'Hadamard [Ha] et de Poincaré [Po] vers le début du XXeme siècle.

G.D.Birkhoff a développé une méthode dite de "min-max" afin de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME I.1 ([Bi]). — *Toute variété riemannienne homéomorphe à la sphère possède une géodésique fermée non triviale.*

L'idée principale de la preuve est la suivante. On considère l'espace \mathcal{C} des applications continues de S^1 dans S^2 régulières par morceaux que l'on quotiente par l'action des homéomorphismes positifs et réguliers par morceaux de S^1 , espace que l'on "compactifie" en rajoutant les points de S^2 vus comme des courbes dégénérées. Dans cet espace on considère le 1-cycle non trivial de $H_1(\mathcal{C}, S^2, \mathbb{Z})$ donné par

$$t \in [0, 1] \longrightarrow \gamma(t) := S^2 \cap \{z = 1 - 2t\}$$

Tout chemin homotope à $\gamma(t)$, pour des déformations maintenant les extrémités dans les "courbes dégénérées" données par les points de S^2 , constitue ce que l'on appelle un

"balayage" de S^2 dans le sens qu'il réalise un générateur de $H_2(S^2)$. La géodésique recherchée sera alors un point critique du lagrangien de longueur L donné par la procédure de *min-max* suivante

$$c = \inf_{\sigma \simeq \gamma} \max_{t \in [0,1]} L(\sigma(t))$$

où \simeq est l'équivalence d'homotopie mentionnée plus haut. La valeur c est appelée la largeur du *min max*. On démontre que l'infimum c est atteint grâce à un argument de comparaison développé par Birkhoff et connu sous le nom de "*déformation polynomiale*" ou "*racourcissement de longueur*" de Birkhoff qui déforme tout élément σ en un élément homotope et réalisant pour tout t des géodésiques par morceau tout en décroissant le maximum des longueurs (voir [Cr] et [CM] par exemple).

En 1929 L.Lyusternik et L.Schnirel'man annoncèrent dans une note publiée au *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, voir [LS], un résultat qui démontrait un problème laissé ouvert par H.Poincaré.

THÉORÈME I.2. — *Toute variété riemannienne homéomorphe à la sphère possède au moins trois géodésiques fermées non triviales, distinctes les unes des autres, et ne possédant aucun point d'auto-intersection.*

Le résultat est optimal au sens où sur certains ellipsoïdes il existe exactement trois géodésiques fermés distinctes sans point d'auto-intersection (voir [Kl]). L'article contenant la preuve de ce résultat et publié un an plus tard que la note a ouvert la voie à un domaine entier de l'analyse portant sur les méthodes topologiques pour le calcul des variations. La version anglaise de cet article est paru dans [LS1]. Néanmoins la preuve du théorème précédent n'y était pas complète et les contributions pour établir rigoureusement ce résultat ont été nombreuses et se sont étalées sur plus d'un demi-siècle. Nous renvoyons le lecteur qui désire en savoir plus sur l'histoire riche en rebondissements de la preuve de ce théorème à l'excellent exposé de I.Taimanov ([Ta]).

L'apport principal de l'article de Lyusternik et Schnirel'man a été d'étendre la stratégie de *min-max* de Birkhoff à des cycles de dimensions supérieures à $H_1(\mathcal{C}, S^2)$ et d'introduire des classes d'homotopie non triviales - qu'ils ont nommé catégories - allant de $[0, 1]^n$ pour $n = 1, 2, 3$ dans l'espace \mathcal{C} des courbes non-orientées de Jordan rectifiables (c'est à dire des images continues et injectives de S^1 de mesure 1-dimensionnelle finie dans S^2) auxquelles on adjoint les courbes dégénérées données par les points de S^2 . Introduire des cycles de dimension supérieure correspond plus ou moins à chercher des géodésiques d'indice de plus en plus élevé.

$$c_n = \inf_{\sigma \simeq \gamma_n} \max_{x \in [0,1]^n} L(\sigma(x))$$

le chemin $\gamma_1(x_1)$ est le chemin de Birkhoff défini plus haut tandis que $\gamma_2(x_1, x_2)$ et $\gamma_3(x_1, x_2, x_3)$ sont des chemins construits à partir de γ_1 en rajoutant comme variable

supplémentaire l'action des rotations d'axe x et d'angle allant de 0 à π pour γ_2

$$\gamma_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi x_2) & \sin(\pi x_2) \\ 0 & -\sin(\pi x_2) & \cos(\pi x_2) \end{pmatrix} \gamma_1(x_1)$$

et l'action des rotations respectivement d'axe x et d'axe y toutes deux d'angles allant de 0 à π pour γ_3

$$\gamma_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \cos(\pi x_3) & 0 & \sin(\pi x_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\pi x_3) & 0 & \cos(\pi x_3) \end{pmatrix} \gamma_2(x_1, x_2)$$

Par ailleurs la classe des applications σ considérées, ainsi que les 3 classes de déformations sur lesquelles les équivalence d'homotopies \simeq sont définies, sont les 3 espaces d'applications continues de $[0, 1]^n$ dans \mathfrak{C} ayant les mêmes symétries que γ_n respectivement pour $n = 1, 2, 3$ au bord : pour $x_1, x_2 \in [0, 1/2]$ et $x_3 \in [0, 1]$

$$(I.1) \quad \begin{cases} \sigma(x_1, 0) = \sigma(1 - x_1, 1) & \text{pour } n = 2 \\ \sigma(x_1, 0, x_3) = \sigma(1 - x_1, 1, x_3) \\ \sigma(x_1, x_2, 1) = \sigma(1 - x_1, 1 - x_2, 0) \end{cases}$$

et par ailleurs on impose aussi $\sigma(0) = \gamma_1(0)$ et $\sigma(1) = \gamma_1(1)$ pour $n = 1$, $\sigma(0, x_2) = \gamma_2(0, x_2)$ et $\sigma(1, x_2) = \gamma_2(1, x_2)$ pour $n = 2$ ainsi que $\sigma(0, x_2, x_3) = \gamma_3(0, x_2, x_3)$ et $\sigma(1, x_2, x_3) = \gamma_3(1, x_2, x_3)$ pour $n = 3$. Il convient d'observer que l'espace \mathfrak{C} choisi ne prend pas en compte l'orientation des courbes ce qui justifie les identités (I.1) en particulier pour $\sigma = \gamma_n$. Ces trois problèmes de *min-max* étant posés, une grande partie de la difficulté de la preuve demeure en cela qu'il s'agit de démontrer que chacun des trois est bien atteint par des géodésiques sans auto-intersections. La technique de "*racourcissement de longueur*" de Birkhoff malheureusement est inutilisable telle qu'elle, celle-ci ne respectant pas la propriété de non auto-intersection. De nombreux travaux, incluant celui de Lyusternik et Schnirel'man, se sont heurtés à la difficulté de trouver un substitut ad-hoc à la technique de "*racourcissement de longueur*" de Birkhoff sans parvenir à la résoudre complètement dans le cadre général. L'article [Ta1] a mis fin à cette érrance proposant une preuve complète de l'atteignabilité de chacun des trois *min-max* par des géodésiques plongées. Finalement, il n'est pas difficile de démontrer l'inégalité

$$c_1 \leq c_2 \leq c_3$$

Si jamais deux niveaux c_n et c_{n+1} sont égaux on démontre alors qu'il existe en fait une infinité de solutions.

On vient de voir que pour passer du premier théorème de Birkhoff à celui, plus fort sur l'existence de 3 géodésiques plongées, afin d'appliquer de procédures de *min-max*

plus élaborées, il a fallu affaiblir la notion de courbes orientées régulières par morceaux à celle beaucoup plus générale de cercles rectifiables non orientés.

L'affaiblissement la notion de courbe pour les problèmes de *min-max* peut s'avérer être très efficace comme le montre la démonstration du théorème suivant du à E.Calabi.

THÉORÈME I.3. — *Sur une variété homéomorphe à la sphère toute géodésique fermée de longueur minimale a au plus un point d'auto-intersection.*

La démonstration de ce théorème, telle qu'elle a été originellement écrite dans [CC], fait usage d'un espace encore plus grand que l'espace \mathcal{C} des immersions de S^1 régulières par morceau ou encore que l'espace \mathfrak{C} des courbes de jordan rectifiables considérés plus haut, il s'agit de l'espace \mathcal{Z} des *1-cycles rectifiables*. Cette notion est un des objets fondamentaux constituant la charpente de la théorie de mesure géométrique. Cette théorie s'est avérée essentielle pour donner un cadre variationnel bien posé aux problèmes de *min-max* d'objets géométriques de dimension plus grande que 1. Il est donc nécessaire que nous nous y arrétions un moment afin de pouvoir rendre compte du travail de F.Marques et A.Neves sur la conjecture de Willmore.

II. LES MÉTHODES DE MIN-MAX EN THÉORIE DE MESURE GÉOMÉTRIQUE D'APRÈS F.ALMGREN ET J.PITTS.

Le problème dit *de Plateau* tel qu'il a été posé vers la fin du XIXème siècle par le physicien belge qui lui a donné son nom consiste à trouver un disque immergé d'aire minimale bordant une courbe de Jordan donnée dans un espace euclidien quelconque. Il fut résolu au début des années 30 pour la première fois indépendamment par J.Douglas et T.Radò, le premier ayant reçu la médaille Fields en 1936 - la première attribuée conjointement avec le mathématicien L.Ahlfors. L'approche de l'époque était alors une approche dite *paramétrique* qui consiste à minimiser l'aire sur des applications du disque dans l'espace euclidien envoyant continuellement et homeomorphiquement le bord du disque sur la courbe rectifiable. Très vite cette approche à montré ses limites : existerait-il des surfaces de topologie plus compliquée et d'aire plus basse encore bordant cette même courbe ? comment étendre le problème en dimension plus grande et trouver une sous-variété de volume minimal bordant une sous variété orientée fermée donnée dans un espace euclidien ?...le cadre paramétrique était trop restreint pour apporter des réponses satisfaisantes.

Cet ensemble de questions mélangeant la géométrie et le calcul des variations a donné naissance à la *théorie de la mesure géométrique* au début des années 50 sous l'impulsion de différents mathématiciens parmi lesquels H.Federer, W.Fleming, E.De Giorgi, E.R.Reifenberg. L'objet de départ de cette théorie sont les *courants de de Rham* de dimension k d'une variété riemannienne (M^m, g) donnée qui sont les distributions vectorielles agissant sur les k - formes C^∞ à support compacte. Cet espace est noté $\mathcal{D}_k(M^m)$.

Le bord ∂C d'un tel courant C est défini par

$$\forall \alpha \in C_0^\infty(\wedge^{k-1} M^m) \quad \langle \partial C, \alpha \rangle = \langle C, d\alpha \rangle$$

Les courants sont équipés d'une topologie *faible séquentielle* qui dit qu'une suite C_n converge faiblement vers C_∞ si

$$(II.2) \quad \forall \omega \in C_0^\infty(\wedge^k M^m) \quad \langle C_n, \omega \rangle \longrightarrow \langle C_\infty, \omega \rangle \quad .$$

Parmi ces courants, les *courants rectifiables entiers* de dimension $k \in \mathbb{N}$, dont l'ensemble est noté habituellement $\mathcal{R}_k(M^m)$, sont les courants d'intégration sur des ensembles rectifiables orientés de dimension k - ensembles de mesure \mathcal{H}^k finie et possédant \mathcal{H}^k presque partout⁽¹⁾ un *plan tangent approximé* et le choix mesurable d'une orientation de ce plan⁽²⁾ - équipé d'une fonction multiplicité \mathcal{H}^k intégrable sur le *porteur rectifiable* et à valeur entière. Un tel courant pourra être noté $C = (S, \tau, \theta)$ où S est l'ensemble k -dimensionnel rectifiable dit le *porteur* du courant, τ est l'*orientation* du courant, c'est une application \mathcal{H}^k mesurable sur S à valeur dans le fibré des k -multi-vecteurs simples et unité sur M^m et dont la direction $|\tau|$ coïncide avec le plan approximé \mathcal{H}^k presque partout sur S et θ est la *multiplicité*, c'est à dire une fonction \mathcal{H}^k mesurable sur S et à valeur entière. L'action d'un tel courant sur une k -forme régulière à support compacte ω est donnée par⁽³⁾

$$\langle C, \omega \rangle = \int_{M^m} \langle \omega, \tau \rangle \theta d\mathcal{H}^k \llcorner S$$

Le courant d'intégration sur une sous-variété orientée de dimension k de M^m est un exemple d'un tel *courant rectifiable entier*. Les *courants rectifiables entiers* de dimension k dont les bords sont aussi des *courants rectifiables entiers* sont appelés *courants intégraux* de dimension k et cet ensemble sera noté $\mathcal{I}_k(M^m)$. Un sous-espace remarquable de $\mathcal{I}_k(M^m)$ est l'espace des *cycles rectifiables entiers* que nous avons mentionné précédemment et qui coïncide avec les éléments de $\mathcal{I}_k(M^m)$ de bord nul. Cet espace est noté $\mathcal{Z}_k(M^m)$.

La comasse d'une k -forme ω de M^m est définie par

$$\|\omega\|_* := \sup_{x \in M^m} \sup_{e_1 \cdots e_k \in S_x M^m} | \langle \omega, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \rangle | \quad ,$$

où $S_x M^m$ désigne la sphère unité de l'espace tangent $(T_x M^m, g)$. La masse d'un courant k -dimensionnel C est donnée par

$$M(C) := \sup \{ \langle C, \omega \rangle \ ; \ \|\omega\|_* \leq 1 \} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \quad .$$

⁽¹⁾ \mathcal{H}^k est la mesure de Hausdorff k -dimensionnelle.

⁽²⁾ Les ensembles rectifiables peuvent être "vus" comme des versions "théorie de la mesure" des sous-variétés de M^m .

⁽³⁾ L'opération de restriction des courants et mesures se note \llcorner en théorie de mesure géométrique. On étant cette notation à l'opération de multiplication par une fonction mesurable en général, la restriction à un sous-ensemble mesurable n'étant finalement que la multiplication par la fonction caractéristique de cet ensemble.

La masse du courant d'intégration le long d'une sous-variété de M^m coïncide avec le volume de cette sous-variété et peut donc être interprétée comme étant la généralisation naturelle à $I_k(M^m)$ de cette notion de volume. Plus généralement, pour un *courant rectifiable entier* $C = \langle S, \tau, \theta \rangle$ donné on a

$$M(\langle S, \tau, \theta \rangle) = \int_{M^m} |\theta| d\mathcal{H}^k \llcorner S \quad .$$

Le théorème suivant dû à H.Federer et W.Fleming est reconnu comme étant le théorème fondateur de la théorie de la mesure géométrique.

THÉORÈME II.1 ([FF]). — *Soit C_n une suite de courants intégraux de M^m satisfaisant*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} M(C_n) + M(\partial C_n) < +\infty$$

alors il existe une sous-suite $C_{n'}$ qui converge faiblement vers un courant intégral C_∞ et par ailleurs

$$M(C_\infty) \leq \liminf M(C_{n'}) \quad .$$

Grace à ce résultat on obtient l'existence d'un solution au *problème de Plateau* pour tout bord intégral de dimension $k - 1$ fixé dans une variété quelconque ou plus généralement l'existence d'un courant intégral de masse minimale dans toute classe d'homologie donnée. La difficulté cependant de déterminer la régularité - au-delà de la simple rectifiabilité - pour chacun de ces minima est la contre-partie de s'être pacé dans un espace si grand et a stimulé de nombreux travaux très ardues dont le point culminant est peut-être le résultat d'Almgren. Ce résultat affirme que l'ensemble singulier d'un courant rectifiable k -dimensionnel d'aire minimale à l'intérieur - dans des ouverts n'intersectant pas son bord - est de dimension de Hausdorff au plus $k - 2$. Une preuve de ce résultat est l'objet de la publication monumentale, malheureusement non référée, et posthume de F.Almgren [Al]. Ce résultat a été tout nouvellement démontré, en grande partie indépendamment du travail d'Almgren, dans une série d'articles remarquables de C.De Lellis et E.Spadero [DS1], [DS2] et [DS3].

En ce qui concerne la régularité des minima, le cas de la codimension 1, $k = m - 1$, est particulier et relativement moins difficile que le cas général de codimension quelconque. Cela est dû au fait que la diversité des *cone tangents singuliers* - après dilatation infinie en un point - est beaucoup plus restreinte pour les hypersurfaces d'aire minimale. Un résultat célèbres de J.Simons [Si] affirme que tout *courant intégral* de codimension 1 et d'aire minimale dans une variété de dimension plus petite que 8 est régulier à l'intérieur. Ce résultat n'est plus vrai en dimension 8 : E.Bombieri, E. De Giorgi et E. Giusti, [BDG], produisirent un cone singulier à l'origine dans \mathbb{R}^8 et d'aire minimale.

Vers le milieu des années 60, l'ambition de produire des surfaces non absolument minimisantes mais points critiques de la masse germa naturellement dans le cadre de la théorie de la mesure géométrique. Autant le cadre des courants intégraux avait été très efficace dans la recherche de minima absolu autant il semblait inadapté pour développer

des méthodes de *min-max*. En effet, la masse n'est pas continue, mais seulement semi-continue inférieurement, dans l'espace des courants intégraux munis de la topologie faible séquentielle. En 1965, F.Almgren, produisit un article très innovant⁽⁴⁾, introduisant une notion nouvelle de "surfaces faibles" : les varifolds⁽⁵⁾. Ces objets mathématiques avaient en fait déjà été considérés par L.C Young une quinzaine d'années auparavant sous le nom de "surfaces généralisées" et est très proche de la notion connue sous le nom de *mesure de Young*. F.Almgren cependant a poussé bien plus loin cette notion pour les besoins du calcul des variations.

Nous notons $G_k(M^m)$ le fibré en grassmanienne des plans k -dimensionnels non orientés de TM . Un *varifold* k -dimensionnel dans la variété riemannienne (M^m, g) est une mesure de Radon sur $G_k(M^m)$. L'espace des mesures de Radon sur $G_k(M^m)$ équipé de la topologie faible $*$ en dualité avec les fonctions continues de $G_k(M^m)$ et noté $V_k(M^m)$. Par exemple si S est un ensemble rectifiable k -dimensionnel de M^m on note $|S|$ l'élément de $V_k(M^m)$ donné par

$$\forall A \text{ ensemble mesurable de } G_k(M^m) \quad |S|(A) = \mathcal{H}^k(S \cap \{x ; \text{Tan}^k(\mathcal{H}^k \llcorner S, x) \in A\})$$

où $\text{Tan}^k(\mathcal{H}^k \llcorner S, x)$ est la mesure tangente obtenue en dilatant la mesure de Hausdorff k -dimensionnelle restreinte à S au point x et qui coïncide avec la mesure de Hausdorff restreinte au plan tangent approximé à S en x . L'hypothèse de rectifiabilité consiste exactement à dire qu'une telle limite $\text{Tan}^k(\mathcal{H}^k \llcorner S, x)$ existe \mathcal{H}^k -presque partout sur S .

Étant donné un *varifold* quelconque V de $V_k(M^m)$ on lui associe une mesure de Radon sur M^m notée $\|V\|$ et définie par

$$\forall B \text{ ensemble mesurable de } M^m \quad \|V\|(B) = |V|(\pi^{-1}(B)) \quad ,$$

où π est la projection du fibré en grassmanienne $G_k(M^m)$ sur la base M^m . En particulier si $V = |S|$ est le *varifold* associé à l'ensemble rectifiable S tel que nous venons de le définir plus haut, on a $\| |S| \| = \mathcal{H}^k \llcorner S$.

On dénote $IV_k(M^m)$ l'espace des *varifolds entiers rectifiables* de dimension k aussi appelé *varifolds intégraux* de dimension k : c'est à dire le sous espace de $V_k(M^m)$ des mesures de Radons de $G_k(M^m)$ obtenues comme une somme convergente de mesures de la forme $|S| \llcorner \theta$ où S est un sous ensemble k -dimensionnel rectifiable de M^m quelconque et θ est une fonction \mathcal{H}^k mesurable sur S quelconque et à valeur dans \mathbb{N} . Si $C = \langle S, \tau, \theta \rangle$ est un *courant rectifiable entier* on définit son *varifold associé* par

$$|C| := |S| \llcorner |\theta|$$

⁽⁴⁾Cet article fondamental dans la théorie, pour des raisons un peu surprenantes qu'explique B.White dans son article en hommage à son ancien directeur de thèse disparu [Wh], n'a jamais été publié.

⁽⁵⁾L'auteur de cet exposé s'excuse pour ce "français" mais n'a trouvé aucune traduction satisfaisante au concept introduit par F.Almgren. L'idée d'Almgren était de produire une notion ad-hoc de variété - *manifold* en anglais - compatible avec le calcul des variations, d'où la fusion *varifold*. En français une telle fusion donnerait *var-iété*...ce qui tombe vraiment mal il faut le reconnaître.

La fermeture des *varifold entiers rectifiables* de dimension k pour la topologie faible $*$ avec les fonctions continues sur $G_k(M)$ est noté $\mathcal{V}_k(M)$.

On vérifie sans difficultés que si V est un *varifold entier rectifiable* alors $\|V\|$ possède $\|V\|$ presque partout une densité⁽⁶⁾

$$\Theta^k(\|V\|, x) := \lim_{r \rightarrow 0} r^{-k} \|V\|(B_r(x)) \quad \text{existe pour } \|V\| \text{ presque tout } x \in M^m$$

où $B_r(x)$ est la boule géodésique de centre x et de rayon r et $\|V\|$ possède une mesure tangente égale à $\theta_0 \mathcal{H}^k \llcorner P$ où P est un plan tangent k -dimensionnel au point considéré et $\theta_0 \in \mathbb{N}^*$.

L'avantage principal des *varifolds* sur les courants est la continuité de la masse pour la topologie faible séquentielle lorsque M^m est une variété compacte. On déduit en effet aisément du théorème de Federer Fleming le résultat suivant

PROPOSITION II.2. — *Soit C_n une suite de courants intégraux d'une variété riemannienne compacte (M^m, g) satisfaisant*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} M(C_n) + M(\partial C_n) < +\infty \quad .$$

Alors il existe une sous-suite $C_{n'}$ qui converge faiblement vers un courant intégral C_∞ et telle que $|C_{n'}|$ converge faiblement au sens des mesures de Radon vers V . On a

$$M(C_{n'}) \leq \|V\|(M^m) = \lim_{n' \rightarrow +\infty} \| |C_{n'}| \|(M^m) \quad ,$$

et par ailleurs on a l'équivalence entre les 3 affirmations suivantes

i)

$$\lim_{n' \rightarrow +\infty} M(C_{n'}) = M(C_\infty) \quad ,$$

ii)

$$M(C_\infty) = \|V\|(M^m) \quad ,$$

iii)

$$|C_\infty| = V \quad .$$

Avec pour objectif de mettre en évidence des points critiques de la masse pour des *varifolds*, il est naturel d'étudier les variations première de celle ci. Un difféomorphisme ϕ de M^m dans lui même défini de façon unique un difféomorphisme Φ du fibré en grassmannienne associé $G_k(M^m)$ tel que tout k -plan P_x en un point x quelconque soit envoyé

⁽⁶⁾ Grace à un théorème difficile de D.Preiss, [Pr] nous savons qu'une mesure Borélienne non négative μ possède une densité k -dimensionnelle μ presque partout si est seulement si elle est portée par un ensemble k -dimensionnel rectifiable : il existe un ensemble k -dimensionnel rectifiable S est une fonction positive et \mathcal{H}^k mesurable f telle que $\mu = f \mathcal{H}^k \llcorner S$. Ce résultat répondait par la positive à une conjecture de A.Besicovitch dont les travaux, principalement entre les deux guerres mondiales, sont à l'origine du développement de la théorie de la mesure géométrique. Ce résultat de Preiss a eu des impacts important dans l'étude des ensembles singuliers de certaines EDP comme Yang-Mills ou les applications harmoniques.

sur le k -plan des vecteurs $d\phi_x X$ où $X \in P_x$. Le *poussé en avant* d'un varifold V par ϕ est donc défini naturellement par

$$\forall A \text{ ensemble borelien de } G_k(M^m) \quad (\phi_* V)(A) := \int_{\Phi^{-1}(A)} J_P \phi \, dV(P)$$

où pour tout k -plan non orienté P de $T_x M^m$ on définit

$$J_P \phi := \sqrt{\det [(d\phi|_P)^*(d\phi|_P)]} = |d\phi(e_1) \wedge \cdots \wedge d\phi(e_k)|_g$$

où $(e_1 \cdots e_k)$ est une base orthonormée de P pour la métrique g . Cette définition du *poussé en avant* d'un *varifold* est naturel. En effet on vérifie aisément que si C est un *courant entier rectifiable*, pour tout difféomorphisme ϕ de M^m , si on note $\phi_* C$ son *poussé en avant* défini par

$$\forall \omega \in C_0^\infty(\wedge^k M^m) \quad \langle \phi_* C, \omega \rangle := \langle C, \phi^* \omega \rangle$$

où $\phi^* \omega$ est la notation habituelle pour le *tiré en arrière* par ϕ de la forme ω , alors on a

$$|\phi_* C| = \phi_* |C|$$

Soit maintenant X un champs de vecteur C^1 différentiable sur M^m . Nous notons $\mathcal{X}(M^m)$ l'espace de ces champs de vecteurs. Soit ϕ_t le flot sur M^m associé à ce champs de vecteur tel que $\phi_0(x) = x$ pour tout $x \in M^m$. Étant donné un *varifold* V , la première variation de V par rapport à X est définie par

$$\delta V(X) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|(\phi_t)_* V\|(M)$$

Un *varifold* est dit *stationnaire* si

$$\forall X \in \mathcal{X}(M) \quad \delta V(X) = 0 \quad .$$

Un résultat important de W.Allard [All] affirme que dans \mathbb{R}^m un *varifold rectifiable entier stationnaire* est le *varifold* généré par une sous variété C^∞ affecté d'une densité entière régulière au voisinage de tout point où la densité est localement suffisamment proche d'une constante. On en déduit qu'un tel *varifold* est régulier dans un ouvert dense de son support. Le problème de décrire la régularité d'un *varifold rectifiable entier stationnaire* au voisinage de points où la densité varie est complètement ouvert même dans le cas le plus simple dans *varifold rectifiable entier* bidimensionnel dans \mathbb{R}^3 .

Dans la lignée des résultats de min-max sur les géodésiques, présentés dans la première partie de cet exposé, on va définir des classes d'homotopies d'applications continues à valeur dans les *cycles rectifiables entiers* $\mathcal{Z}_k(M^m)$. Pour cela il nous faut une topologie sur ces cycles. Nous avons déjà la topologie faible - celle des distributions - en dualité avec les formes C^∞ à support compacte mentionnée plus haut en particulier dans le résultat de fermeture des *courants intégraux* de Federer et Fleming . Cette topologie est en fait trop faible. Il se trouve que H.Federer et W.Fleming démontrent une convergence

plus forte de la sous suite C_n dans le théorème II.1 : la convergence pour la *topologie bémol*⁽⁷⁾.

La *topologie bémol* sur les *courants rectifiables entiers*⁽⁸⁾ est une topologie d'espace vectoriel normé issue de la *norme bémol*, définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(C) &:= \sup \{ \langle C, \omega \rangle ; \text{ t.q. } \|\omega\|_* \leq 1 \text{ et } \|d\omega\|_* \leq 1 \} \\ &= \inf \{ M(A) + M(B) ; C = A + \partial B \text{ t.q. } A \in \mathcal{D}_k(M) \text{ et } B \in \mathcal{D}_{k+1}(M) \} \end{aligned}$$

La distance *bémol* entre deux *courants rectifiables entiers* C_1 et C_2 est donnée par $\mathcal{F}(C_1, C_2) := \mathcal{F}(C_1 - C_2)$. Par exemple si C_1 et C_2 sont des *courants rectifiables entiers* de dimension 0, c'est à dire des sommes finies de masses de Dirac affectées de multiplicités entières, et si on fait l'hypothèse de neutralité $C_i(\mathbf{1}_M) = 0$, où $\mathbf{1}_M$ est la fonction identiquement égale à 1 sur M , dans le cas où les supports de C_1 et C_2 sont suffisamment proches, $\mathcal{F}(C_1, C_2)$ n'est rien d'autre que la *1-distance de Wasserstein* du transport optimal entre les deux familles de points affectés de multiplicités entières, c'est à dire la longueur minimale nécessaire pour connecter ces deux familles de points affectés de ces multiplicités. Lorsque l'espace des *cycles rectifiable entier* de dimension k est équipé de cette topologie on utilisera la notation $\mathcal{Z}_k(M, \mathcal{F})$.

L'espoir de développer une méthode de *min-max* reprenant la méthode de "balayage" de Birkhoff dans le cadre des *cycles rectifiable entier* est construit sur le résultat suivant.

THÉORÈME II.3 ([Alm]). — *Pour tout $1 \leq n \leq m$ et tout $1 \leq k \leq m - n$ l'espace $H_{n+k}(M^m, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\pi_n(\mathcal{Z}_k(M, \mathcal{F}))$.*

Afin de générer des surfaces minimales non nécessairement minimisantes, l'idée serait alors de regarder un problème de *min-max* de la forme

$$(II.3) \quad \inf_{\Phi \sim \Psi} \sup_{x \in [0,1]^n} M(\Phi(x))$$

où Ψ réalise une classe d'homotopie non triviale de $\mathcal{Z}_k(M, \mathcal{F})$ pour la donnée au bord fixée égale au courant nul⁽⁹⁾ et Φ évolue parmi toutes les applications continues de $[0, 1]^n$ dans $\mathcal{Z}_k(M, \mathcal{F})$ qui sont homotopes à Ψ pour des déformations continues coïncidant avec 0 sur le bord du cube $\partial[0, 1]^n$.

⁽⁷⁾L'origine de cette dénomination n'est pas connue de l'auteur de cet exposé. Cela étant il semble que l'image musicale pourrait se référer au fait que la topologie initialement considérée était originellement celle de la *masse* - que nous présentons plus loin dans cet exposé - qui est une topologie plus forte ou plus "haute" disons et que donc la topologie dite *bémol* est un affaiblissement ou abaissement de celle ci....

⁽⁸⁾Elle s'étend en fait sur un espace plus grand qui est celui des *courants rectifiables entiers*, l'espace des *courants bémol* : la complétion des courants de masse finie et dont le bord a une masse finie pour la *distance bémol*, voir [Fe].

⁽⁹⁾Cette condition de bord correspond géométriquement à l'hypothèse de bord des balayages de Birkhoff.

Shématiquement il reste deux difficultés principales à surmonter avant de pouvoir réaliser avec succès un tel programme.

- i) La masse n'est pas continue mais seulement semi-continue inférieurement pour la *distance bémol* et donc la topologie considérée pour définir les classes d'homotopie ne devrait pas permettre a priori d'obtenir la réalisation de l'infimum, c'est à dire, avec la topologie *bémol* il peut très bien y avoir un "saut de masse" par passage à la limite dans (II.3).
- ii) Si jamais un tel *min-max* (II.3) était atteint et réalisé par un $\Phi(x_0)$, qu'en est-il de sa régularité? Nous aurions peut être bien généré ainsi un *varifold rectifiable entier stationnaire* en considérant $|\Phi(x_0)|$ mais le résultat de W.Allard n'est pas assez fort pour en déduire la régularité espérée et pour affirmer que l'on a bien affaire à une immersion minimale régulière.

L'étudiant de F.Almgren, J.Pitts, s'est attelé à la résolution de ces deux principales difficultés et nous présentons ci-dessous les grandes lignes de son travail spectaculaire, [Pit], qui lui a permis en particulier de générer des familles de surfaces minimales jusque là inconnues.

Le projet de F.Almgren, déjà bien conscient des difficultés i) et ii) mentionnées plus haut, puis de Pitts, était de développer une théorie de *min-max* pour les *cycles rectifiables entiers* "accompagnés" de leur *varifold* associé afin de ne rien perdre de la masse et que l'"objet" obtenu - on espère un *varifold rectifiable entier stable* - soit bien "accroché" au sens où sa masse réalise la *largeur* du *min-max*. J. Pitts [Pit] a donc proposé de "renforcer" la *topologie bémol* pour remédier à cette difficulté. Sur l'espace des *varifolds rectifiables entiers* tout d'abord on définit la métrique suivante

$$\mathbf{F}(V, W) := \sup \{V(f) - W(f) ; f \in C_c(M^m) \text{ t. q. } |f| \leq 1 \text{ et } Lip(f) \leq 1\}$$

où $Lip(f) = \sup_{x \neq y} |f(x) - f(y)|/d_M(x, y)$ est la norme lipschitz de f . Sur l'espace des *courants rectifiables entiers* on définit alors la \mathbf{F} -métrique

$$\mathbf{F}(C_1, C_2) := \mathcal{F}(C_1 - C_2) + \mathbf{F}(|C_1|, |C_2|) \quad .$$

On vérifie aisément que la masse est continue pour la topologie induite par la distance \mathbf{F} .

Malheureusement nous ne sommes pas au bout de nos peines pour avoir la bonne topologie pour laquelle le problème de *min-max* sera bien posé. La topologie la plus forte dans le cadre des *courants rectifiables entiers* est la topologie dite *topologie de la masse* définie par la distance suivante

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{R}_k(M) \quad \mathbf{M}(C_1, C_2) := M(C_1 - C_2)$$

Il n'est pas difficile de vérifier l'emboîtement suivant des 3 topologies ci dessus.

$$\mathcal{F}(C_1, C_2) \leq \mathbf{F}(C_1, C_2) \leq 2 \mathbf{M}(C_1, C_2) \quad .$$

Lorsque l'espace des *cycles rectifiable entier* de dimension k est équipé de chacune de ces 3 topologies on utilisera les notations respectivement $\mathcal{Z}_k(M, \mathcal{F})$, $\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{F})$ et $\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{M})$.

Inspiré par le travail de M.Morse [Mo] sur les méthodes topologiques dans le calcul des variations, plutôt que de considérer des homotopies continues d'applications de $[0, 1]^n$ dans $\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{F})$, J.Pitts va lui préférer des versions discrètes à valeur dans $\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{M})$ qui sont à la fois plus "informatives" et plus souples pour procéder à des arguments de comparaisons cela afin de démontrer la *criticalité* et l'*approximative minimalité*, que nous définissons plus bas, du maximum de l'application limite.

L'introduction des suites d'homotopie discrètes requiert un peu de notation. Ces notions sont très naturelles mais leur présentation n'échappe malheureusement pas à une certaine lourdeur.

On note $I = [0, 1]$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$ on note $I(1, j)$ le complexe cellulaire dont les cellules de dimensions 0 sont les points $[k 3^{-j}]$ pour $k = 0, 1 \dots 3^j$ et les cellules de dimension 1 sont les segments $[k 3^{-j}, (k+1) 3^{-j}]$. Plus généralement $I(n, j)$ est le complexe cellulaire dont les cellules p -dimensionnelles s'identifient aux sous ensembles de $[0, 1]^n$ de la forme $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$ telles que $\sum_{i=1}^n \dim \alpha_i = p$ où α_i sont soit des cellules de dimension 0 soit de dimension 1 dans $I(1, j)$. L'espace des sommets de ce complexe, qui sera noté $I(n, j)_0$, s'identifie donc à l'espace des points de coordonnées $(k_1 3^{-j}, \dots, k_n 3^{-j})$ pour un choix quelconque d'entiers $k_1 \dots k_n$ parmi $\{0, \dots, 3^j\}$.

Par un abus de notation on écrit $\partial I(n, j)_0$ l'intersection entre $I(n, j)_0$ et le bord du cube $\partial[0, 1]^n$.

La distance entre deux sommets $x = (k_1 3^{-j}, \dots, k_n 3^{-j})$ et $x' = (k'_1 3^{-j}, \dots, k'_n 3^{-j})$ est donnée par

$$\mathbf{d}_j(x, x') := \sum_{i=1}^n |k_i - k'_i|$$

Étant donnée une application φ^j de $I(n, j)_0$ dans $\mathcal{Z}_k(M)$, on définit la *finesse* de φ^j par

$$\mathbf{f}(\varphi^j) := \sup \left\{ \frac{\mathbf{M}(\varphi^j(x) - \varphi^j(x'))}{\mathbf{d}_j(x, x')} ; \forall x, x' \in I(n, j)_0 \text{ et } x \neq x' \right\}$$

On cherche maintenant à définir une notion "d'homotopie discrète" entre deux applications $\varphi_1^{j_1}$ et $\varphi_2^{j_2}$ de $I(n, j)_0$ dans $\mathcal{Z}_k(M)$ toutes deux égales à zero sur le bord $\partial I(n, j)_0$.

Lorsque $j_1 = j_2 = j$ tout d'abord, pour tout $\delta > 0$, on dite que φ_1^j est *homotope* à φ_2^j pour la *finesse* δ si il existe

$$\psi^j : I(1, j)_0 \times I(n, j)_0 \longrightarrow \mathcal{Z}_k(M)$$

telle que

i)

$$\forall x \in I(n, j)_0 \quad \psi^j(0, x) = \varphi_1^{j_1}(x) \quad \text{et} \quad \psi^j(1, x) = \varphi_2^{j_2}(x)$$

ii)

$$\forall y \in I(1, j)_0 \times \partial I(n, j)_0 \quad \psi^j(y) = 0$$

iii)

$$\mathbf{f}(\psi^j) < \delta$$

Lorsque maintenant $j_1 < j_2$, on gène alors une application $\varphi_1^{j_2}$ à partir de $\varphi_1^{j_1}$ de la façon suivante : pour tout $x \in I(n, j_2)_0$ on prend

$$\varphi_1^{j_2}(x) := \varphi_1^{j_1}(n(j_2, j_1)(x))$$

où $n(j_2, j_1)(x)$ est le sommet du complexe $I(n, j_1)_0$, inclus dans le complexe $I(n, j_2)_0$ qui minimise la distance \mathbf{d}_{j_2} .

On dit alors que $\varphi_1^{j_1}$ est *homotope* à $\varphi_2^{j_2}$ pour la *finesse* δ si $\varphi_1^{j_2}$ est *homotope* à $\varphi_2^{j_2}$ pour la *finesse* δ .

On introduit alors les deux définitions suivantes qui sont au coeur de la construction de Pitts.

DÉFINITION II.4. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une suite $\varphi = \{\varphi^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ où chaque φ^j est une application de $I(n, j)_0$ dans $\mathcal{Z}_k(M)$ est appelée une (n, \mathbf{M}) - suite homotopique à valeur dans $\mathcal{Z}_k(M)$ si il existe une suite de réels strictement positifs δ_i telle que

i) pour tout $j \in \mathbb{N}$ φ^j est homotope à φ^{j+1} pour la finesse δ^j .

ii)

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \delta^j = 0$$

iii)

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{x \in I(n, j)_0} \mathbf{M}(\varphi^j(x)) < +\infty \quad .$$

La deuxième définition introduit la notion de classe d'homotopie discrète.

DÉFINITION II.5. — Soient $\varphi_1 = \{\varphi_1^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ et $\varphi_2 = \{\varphi_2^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ deux (n, \mathbf{M}) - suites homotopiques à valeur dans $\mathcal{Z}_k(M)$ sont homotopes si il existe une suite de réels positifs $\delta^j > 0$ telle que

i) φ_1^j est homotope à φ_2^j pour la finesse δ^j pour tout $j \in \mathbb{N}$.

ii)

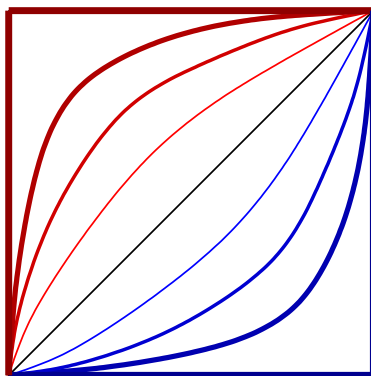
$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \delta^j = 0$$

C'est une relation d'équivalence dont l'espace des classes est notée $\pi_n^\#(\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{M}))$. La classe d'une (n, \mathbf{M}) - suites homotopique φ sera notée $[\varphi]$.

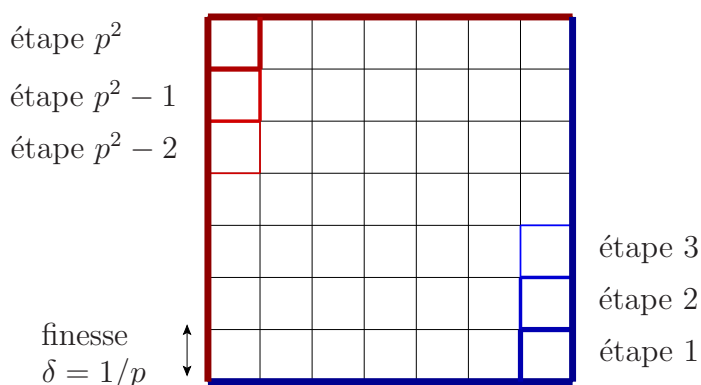
Le résultat suivant est une extension du résultat d'Almgren présenté plus haut.

THÉORÈME II.6 ([Pit]). — Pour tout $1 \leq n \leq m$ et tout $1 \leq k \leq m - n$ l'espace $H_{n+k}(M^m, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\pi_n(\mathcal{Z}_k(M, \mathcal{F}))$ et à $\pi_n^\#(\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{M}))$.

Ce résultat peut paraître au premier abord tout à fait surprenant. En effet la continuité pour la topologie \mathcal{F} semble beaucoup plus faible que la continuité discrète avec une finesse tendant vers zéro pour la topologie plus forte \mathbf{M} . On s’attendrait donc à avoir beaucoup plus de classes d’homotopie pour la deuxième topologie. La figure suivante devrait pouvoir éclairer ce paradoxe et rendre le théorème précédent plus naturel.



Homotopie \mathcal{F} -continue
passant de \lfloor à \lrcorner



$(1, \mathbf{M})$ -homotopie
passant de \lfloor à \lrcorner
pour la finesse δ

On se propose d’étudier des problèmes de *min-max* à partir de balayage de M réalisés par des classes non nulles de $\pi_n^\sharp(\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{M}))$. Soit donc $\varphi = (\varphi^j)$ une (n, \mathbf{M}) - suite homotopique à valeur dans $\mathcal{Z}_k(M)$ on définit

$$\mathbf{L}(\varphi) := \limsup_{j \rightarrow +\infty} \max \{ \mathbf{M}(\varphi^j(x)) ; x \in I(n, j)_0 \} \quad .$$

C’est le remplacement en version discrète du maximum de la masse d’une application de $[0, 1]^n$ dans $\mathcal{Z}_k(M)$. On définit alors la *largeur* du problème de *min-max* associé à

une classe de $\pi_n^\sharp(\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{M}))$ donnée dans la continuité des définitions de la partie 1 de cet exposé.

DÉFINITION II.7. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $\Pi \in \pi_n^\sharp(\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{M}))$. La largeur du min-max associé à Π est donnée par

$$\mathbf{L}(\Pi) := \inf\{\mathbf{L}(\varphi) ; [\varphi] \in \Pi\}$$

On dit que φ est critique pour Π si $\mathbf{L}(\varphi) = \mathbf{L}(\Pi)$.

Soit $\varphi = (\varphi^j)$ une (n, \mathbf{M}) - suite homotopique à valeur dans $\mathcal{Z}_k(M)$ on définit l'espace limite de φ dans $\mathcal{V}_k(M)$ par

$$\mathbf{K}(\varphi) := \left\{ V = \lim_{j' \rightarrow +\infty} |\varphi^{j'}(x^{j'})| \text{ pour une sous-suite } j' \text{ et pour } x^{j'} \in I(n, j')_0 \right\}$$

la limite ci-dessus étant au sens des mesures de Radon. Enfin on définit l'ensemble critique de φ comme étant

$$\mathbf{C}(\varphi) := \mathbf{K}(\varphi) \cap \{V ; \|V\|(M) = \mathbf{L}(\varphi)\}$$

Il est important de noter à ce stade que $\mathbf{C}(\varphi)$ est compacte et non-vide, c'est là tout l'avantage de "suivre" la projection de nos *cycles entiers rectifiables* dans l'espace des *varifolds*. C'est cette projection qui va contenir toute l'information de criticalité et de la quasi-minimalité - une version faible d'être d'indice fini - de notre suite critique φ .

Le premier succès de l'approche de Pitts est contenu dans ce théorème.

THÉORÈME II.8 ([Pit]). — Soit M^m une variété fermée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\Pi \in \pi_n^\sharp(\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{M}))$, alors il existe une (n, \mathbf{M}) - suite homotopique à valeur dans $\mathcal{Z}_k(M)$, φ_* , qui soit critique, c'est à dire telle que $\mathbf{L}(\varphi_*) = \mathbf{L}(\Pi)$. Par ailleurs φ_* peut être choisie telle que chaque élément de $\mathbf{C}(\varphi_*) \neq \emptyset$ soit un varifold stationnaire.

Cela étant notre enthousiasme doit être encore contenu à ce stade car il se pourrait que $L(\Pi) = 0$ et que les éléments de $\mathbf{C}(\varphi_*)$ soient triviaux. Le théorème suivant dont la preuve se déduit de celle du théorème II.6 plus haut nous assure que ce n'est pas toujours le cas.

THÉORÈME II.9 ([Pit]). — Soit M^m une variété fermée et soit $1 \leq n \leq m$ et $1 \leq k \leq m - n$ tels que $H_{n+k}(M^m, \mathbb{Z}) \neq 0$ alors il existe une classe $\Pi \in \pi_n^\sharp(\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{M}))$ telle que $L(\Pi) > 0$.

Si donc on combine les deux théorèmes précédents on arrive à générer un *varifold stationnaire* non-trivial dès lors que l'on a un groupe $H_{n+k}(M^m, \mathbb{Z})$ non trivial. Que faire alors d'un tel objet ? le résultat d'Allard ne nous assure la régularité de ce *varifold* sur un ensemble ouvert dense, et cela seulement si on sait que ce *varifold* est rectifiable, ce que l'on ne sait pas encore. C'est sur ces questions de régularité que le travail de Pitts apporte une contribution fondamentale. L'idée est que si une surface minimale réaliserait un tel *min-max* alors elle serait d'indice fini et elle aurait la propriété d'être

”presque” d’aire minimale globalement et de l’être certainement localement. Or nous avons vu qu’il existe des résultats de régularité très fort pour les cycles rectifiables d’aire minimale et de codimension 1. Pitts va donc formaliser cette notion de ”presque minimalité” pour les *varifolds* et plus de la moitié de son travail sera d’en démontrer la régularité en codimension 1 pour toute dimension de l’espace ambiant allant de 3 à 7.

Pour définir les *varifolds presque minimaux* il nous faut étendre quelques notations. Étant donné un sous ensemble fermé N de la variété M^m on note $\mathcal{Z}_k(M, N)$ l’espace des courants rectifiables entiers dont le bord est supporté dans N . Étant donné un ouvert U de M on note \mathbf{F}_U la semi distance sur les *varifolds* obtenue en restreignant la mesure de la distance \mathbf{F} aux parties de ces *varifolds* contenues dans U . On a alors la définition suivante.

DÉFINITION II.10. — *Un varifold V dans $\mathcal{V}_k(M^m)$ est dit presque minimisant dans un ouvert U de M^m si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tels que pour tout élément C de $\mathcal{Z}_k(M, M \setminus U)$ satisfaisant $\mathbf{F}_U(V, |C|) < \epsilon$ et toute suite finie $(C_i)_{i=1 \dots p}$ satisfaisant $C_1 = C$ et*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{supp}(C - C_i) \subset U & \forall i = 2 \dots p \\ \mathbf{M}(C_i - C_{i-1}) \leq \delta & \forall i = 2 \dots p \\ \mathbf{M}(C_i) \leq \mathbf{M}(C) + \delta & \forall i = 2 \dots p \end{array} \right.$$

alors

$$\mathbf{M}(C_p) \geq \mathbf{M}(C) - \epsilon$$

Cette définition peut se comprendre comme suit. Un *varifold* V est *presque minimisant* si, pour tout ϵ , si on cherche à ”connecter” un courant C à \mathbf{F} distance ϵ de V et un courant C_p de masse strictement plus petite que $\mathbf{M}(C) - \epsilon$ par une chaîne finie de courants C_i telle que $\mathbf{M}(C_i - C_{i-1}) \leq \delta$ alors il existe nécessairement un de ceux-ci qui a une masse supérieure d’au moins δ de $\mathbf{M}(C)$. En termes simplifiés cela implique que toute famille discrète δ -fine, coïncidant avec V en dehors de U et dont un élément a une masse plus basse que $\|V\|(U) - \epsilon$ alors un de ses éléments a une masse plus élevée que $\|V\|(U) + \delta$ et donc le *max* de cette famille est plus élevé que $\|V\|(M)$. On comprend donc bien comment cette propriété sera satisfaite par les éléments critiques de $C(\varphi_*)$ réalisant le *min-max*. Le résultat suivant vient en partie le confirmer.

THÉORÈME II.11 ([Pit]). — *Soit M^m une variété fermée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\Pi \in \pi_n^\sharp(\mathcal{Z}_k(M, \mathbf{M}))$, alors il existe une (n, \mathbf{M}) -suite homotopique à valeur dans $\mathcal{Z}_k(M)$, φ_* , qui soit critique, c’est à dire telle que $\mathbf{L}(\varphi_*) = \mathbf{L}(\Pi)$. Par ailleurs il existe un élément de $\mathbf{C}(\varphi_*)$ qui soit un *varifold stationnaire* et *presque minimisant* sur tout anneau ouvert.*

Vient ensuite un travail de régularité sur les *varifolds stationnaires* de $\mathcal{V}_k(M)$ et on démontre dans un premier temps le résultat suivant.

THÉORÈME II.12 ([Pit]). — *Tout élément de $\mathcal{V}_k(M)$ qui soit stationnaire et presque minimisant sur tout anneau ouvert est dans l'espace des varifolds intégraux $IV_k(M)$.*

Le théorème de régularité pour les *varifolds presque minimisant de codimension 1* est démontré tout d'abord dans [Pit] pour $m \leq 6$ puis dans [ScS] pour $m = 7$. Dans ce dernier travail R.Schoen et L.Simon étendent ce résultat en un résultat de régularité partielle en dimension quelconque. La discussion plus haut explique pourquoi à partir de la dimension 8 il faut s'attendre à ce que de tels *varifolds* aient des singularités.

THÉORÈME II.13. — *Soit M^m une variété fermée de dimension $m \leq 7$. Tout varifold intégral stationnaire de codimension 1 et presque minimisant sur tout anneau ouvert est le varifold associé au courant d'intégration le long d'une sous variété minimale régulière affectée d'une multiplicité entière régulière.*

En combinant le travail de *min-max* plus haut et ce dernier résultat de régularité sur les *varifolds presque minimisants* de codimension 1 on obtient le résultat qui est le point culminant du travail de Pitts.

THÉORÈME II.14 ([Pit]). — *Soit M^m une variété fermée de dimension $m \leq 7$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Soit $\Pi \in \pi_n^\sharp(\mathcal{Z}_{m-1}(M, \mathbf{M}))$, alors il existe une (n, \mathbf{M}) - suite homotopique à valeur dans $\mathcal{Z}_k(M)$, φ_* , qui soit critique, c'est à dire telle que $\mathbf{L}(\varphi_*) = \mathbf{L}(\Pi)$. Par ailleurs, si $\mathbf{L}(\Pi) > 0$, il existe un élément de $\mathbf{C}(\varphi_*)$ qui soit le varifold associé au courant d'intégration le long d'une sous variété minimale régulière de codimension 1 affectée d'une multiplicité entière régulière.*

En combinant théorème II.9 et le résultat précédent on obtient finalement le corollaire suivant.

COROLLAIRE II.15 ([Pit]). — *Toute variété fermée régulière de dimension inférieure ou égale à 7 possède une hyper-surface minimale plongée.*

III. LA DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE WILLMORE PAR F.MARQUES ET A.NEVES.

III.1. La conjecture de Willmore.

Soit Σ une variété bi-dimensionnelle orientée et $\vec{\Phi}$ une immersion de cette variété dans une variété riemannienne (M^m, g) . Cette immersion induit une métrique sur Σ - la *première forme fondamentale* de l'immersion - que nous notons $g_{\vec{\Phi}}$ qui est égale au tiré en arrière par $\vec{\Phi}$ de la métrique g : $g_{\vec{\Phi}}(X, Y) := g(\vec{\Phi}_*X, \vec{\Phi}_*Y)$ où $\vec{\Phi}_*X$ et $\vec{\Phi}_*Y$ sont les *poussés en avant* de deux vecteur arbitraires X et Y tangents en un point quelconque de Σ . Parfois, lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur l'immersion considérée ces *poussés en avant* seront simplement notés \vec{X} et \vec{Y} .

Cette métrique induit une forme volume sur Σ que nous notons $dvol_{g_{\vec{\Phi}}}$ et qui est donnée en coordonnées locales positives $x = (x_1, x_2)$ par $dvol_{g_{\vec{\Phi}}} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dx_1 \wedge dx_2$ où $g_{\vec{\Phi}} = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx_i \otimes dx_j$.

La première variation de la fonctionnelle d'aire, égale à l'intégrale de la forme volume sur Σ : $\text{Aire}(\vec{\Phi}) := \int_{\Sigma} dvol_{g_{\vec{\Phi}}}$, est donnée par

$$(III.4) \quad \left. \frac{d\text{Aire}(\vec{\Phi} + t\vec{w})}{dt} \right|_{t=0} = -2 \int_{\Sigma} \vec{H}_{\vec{\Phi}} \cdot \vec{w} dvol_{g_{\vec{\Phi}}} \quad ,$$

où $\vec{H}_{\vec{\Phi}}$ est le *vecteur courbure moyenne* de l'immersion $\vec{\Phi}$ qui est égale à la moitié de la trace par rapport à la métrique $g_{\vec{\Phi}}$ de la *seconde forme fondamentale* $\vec{\mathbb{I}}_{\vec{\Phi}}$ de l'immersion : en coordonnées locale on a

$$\vec{H}_{\vec{\Phi}} := \frac{1}{2} tr_g \vec{\mathbb{I}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \vec{\mathbb{I}}_{\vec{\Phi}}(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$$

où $(g^{ij})_{i,j=1,2}$ est l'inverse de la matrice $(g_{ij})_{i,j=1,2}$. On rappelle que la seconde forme fondamentale de $\vec{\Phi}$ est un tenseur qui à une paire de vecteurs X et Y tangent en un point p quelconque de Σ associe un vecteur de $T_{\vec{\Phi}(p)}M^m$ orthogonal à la surface $\vec{\Phi}(\Sigma)$ et donné par

$$\vec{\mathbb{I}}(X, Y) := \pi_{\vec{n}} \left(\nabla_Y^g (\vec{\Phi}_* X) \right) = \pi_{\vec{n}} \left(\nabla_X^g (\vec{\Phi}_* Y) \right) = \vec{\mathbb{I}}(Y, X)$$

où X et Y sont étendus de façon régulière et arbitraire au voisinage de p , $\pi_{\vec{n}}$ est la projection orthogonale de $T_{\vec{\Phi}(p)}M$ dans le sous espace $[\vec{\Phi}_*(T_p\Sigma)]^\perp$ des vecteurs orthogonaux à $\vec{\Phi}_*(T_p\Sigma)$, enfin ∇^g est la *connection de Levi-Civita* de (M^m, g) qui est de *torsion* nulle ce qui justifie la dernière inégalité et donc le fait que $\vec{\mathbb{I}}$ soit un tenseur symétrique.

Comme nous l'avons vu plus haut les surfaces dites *minimales* sont les points critiques du volume et sont les généralisation naturelles des géodésiques en dimension deux. L'expression (III.4), qui se généralise en dimension quelconque, nous dit qu'une immersion est *minimale* si et seulement si

$$\vec{H}_{\vec{\Phi}} \equiv 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad .$$

L'étude des *surfaces minimales* est un domaine important des mathématiques qui peut s'aborder de façons très variées. L'approche variationnelle sur laquelle nous avons insisté dans la première partie de l'exposé, avec le problème de Plateau et les méthodes de *min-max*, est une des méthodes d'étude de ces objets parmi de nombreuses autres comme les approches algébriques et géométriques - représentations de Weierstrass, représentations twistorielles...etc - ou les approches analytiques - Equations au dérivées partielles, méthodes d'analyse fonctionnelle...etc. L'abondance des points de vues étant dus manifestement à l'universalité de ces objets qui resurgissent dans de nombreuses questions des mathématiques.

Dans un effort de "fusionner" la théorie des surfaces minimales et l'invariance conforme - l'invariance par les transformations qui préservent les angles infinitésimalement -

W.Blaschke au début du XXeme siècle [Bl] étend l'espace des surfaces minimales à l'espace des points critiques de la fonctionnelle suivante

$$W(\vec{\Phi}) := \int_{\Sigma} |\vec{H}_{\vec{\Phi}}|^2 \, dvol_{g_{\vec{\Phi}}} \quad .$$

Les surfaces minimales, qui sont de façon évidente des minima absolus de ce *lagrangien*, n'en sont pas les seuls point critiques. On vérifie par exemple que la sphère S^2 dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 est aussi point critique de W .

W.Blaschke, qui travaillait dans le cadre de la géométrie conforme, proposa ce lagrangien car il observa une propriété importante de celui-ci dans \mathbb{R}^3 : pour toute immersion $\vec{\Phi}$ d'une surface compacte fermée Σ - c'est à dire Σ est compacte sans bord - et pour toute transformation conforme Ψ de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ dans $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ qui n'est singulière en aucun point de la surface - c'est à dire telle que $\Psi^{-1}(\{\infty\}) \cap \vec{\Phi}(\Sigma) = \emptyset$ - on a

$$(III.5) \quad W(\Psi \circ \vec{\Phi}) = W(\vec{\Phi}) \quad .$$

on obtient ainsi en particulier que toute transformation conforme d'une *surface minimale* n'est peut-être plus nécessairement *minimale* mais est encore un point critique de W . C'est pourquoi probablement W.Blaschke décida de nommer ces surfaces les *surfaces minimales conformes*. L'origine de cette fonctionnelle remonte en fait à bien avant la géométrie conforme et le travail de Blaschke. Un siècle plus tôt déjà, dans son effort de généraliser la théorie des poutres de J.Bernouilli et L.Euler aux membranes élastiques, S.Germain produit un *lagrangien* qui fait intervenir la norme L^2 de la valeur moyenne en chaque point de toutes les courbures géodésiques de l'intersection de la surface avec des plans perpendiculaire en ce point, qui n'est rien d'autre que W . Ses travaux⁽¹⁰⁾ seront contestés par certains de ses contemporains comme S.Poisson. Quelques décennies plus tard, en 1850, G.Kirkchhoff donne une place rigoureuse au *lagrangien* W dans la théorie de l'élasticité moderne comme étant l'énergie libre d'une membrane bidimensionnelle. La propriété mixte et assez universelle d'être à la fois invariant conforme et d'inclure toutes les surfaces minimales dans ses points critiques a fait que W ne cesse de réapparaître dans de nombreux domaines des sciences. En dehors de la géométrie conforme ou de l'élasticité non-linéaire on pourrait aussi citer la biologie cellulaire - avec l'énergie dite d'Helfrich des membranes lipidiques à deux couches [He] - ou la relativité générale - c'est le terme principal de la *masse de Hawking*...etc.

L'identité (III.5) se généralise en fait à toute variété. On a le théorème suivant (démontré dans un cadre général dans [Ch]).

PROPOSITION III.1. — *Soit Σ^2 une variété orientée fermée bi-dimensionnelle et soit $\vec{\Phi}$ une immersion de Σ^2 dans une variété riemannienne orientée (M^m, g) . Soit Ψ un*

⁽¹⁰⁾Ce qui est d'autant plus remarquable pour l'époque car la géométrie différentielle des surfaces vers 1810 n'était qu'à ses balbutiements et le *theorema egregium* de Gauss par exemple ne sera découvert que 18 ans plus tard. L'auteur de cet exposé recommande la lecture de [DaD] sur les travaux de S.Germain et les tâtonnements de l'époque pour développer une théorie de l'élasticité non-linéaire bi-dimensionnelle.

diffeomorphisme positif conforme de (M^m, g) dans une autre variété orienté (N^m, k) alors nous avons

$$(III.6) \quad W(\vec{\Phi}) + \int_{\Sigma^2} \overline{K}^g \, dvol_{\vec{\Phi}^*g} = W(\Psi \circ \vec{\Phi}) + \int_{\Sigma^2} \overline{K}^k \, dvol_{(\Psi \circ \vec{\Phi})^*g} \quad .$$

où \overline{K}^g (resp. \overline{K}^k) est la courbure sectionnelle du plan tangent $\vec{\Phi}_*T\Sigma^2$ dans (M^m, g) (resp. du plan tangent $\Psi_*\vec{\Phi}_*T\Sigma^2$ dans (N^m, k)).

Un cas intéressant de l'identité précédente est celui de l'inverse de la projection stéréographique⁽¹¹⁾ $\Psi = \pi^{-1}$ de \mathbb{R}^3 dans la sphère unité tridimensionnelle S^3 de \mathbb{R}^4 : soit $\vec{\Phi}$ une immersion d'une surface fermée dans \mathbb{R}^3 alors

$$(III.7) \quad W(\vec{\Phi}) = \int_{\Sigma} |\vec{H}_{\vec{\Phi}}|^2 \, dvol_{g_{\vec{\Phi}}} = \int_{\Sigma} [|\vec{H}_{\Psi \circ \vec{\Phi}}|^2 + 1] \, dvol_{g_{\Psi \circ \vec{\Phi}}} = W(\Psi \circ \vec{\Phi}) + \text{Aire}(\Psi \circ \vec{\Phi})$$

Pour une immersion $\vec{\Phi}$ à valeur dans S^3 on définit alors l'énergie dite de *Willmore* - voir plus bas - par

$$\mathcal{W}(\vec{\Phi}) := \int_{\Sigma} [|\vec{H}_{\vec{\Phi}}|^2 + 1] \, dvol_{g_{\vec{\Phi}}}$$

Grace à la proposition III.1, nous savons que ce lagrangien est invariant par composition par des diffeomorphismes conformes de S^3 . Les surfaces *minimales fermées* de S^3 , dont on sait qu'elles sont nombreuses⁽¹²⁾, sont des minima absolus de W et des points critiques de l'aire par définition. On déduit de l'identité précédente que les projections stéréographiques des *surfaces minimales fermées* de S^3 sont des *surfaces minimales conformes fermées* de \mathbb{R}^3 sans être des *surfaces minimales* de \mathbb{R}^3 car il n'en existe pas.

Comme il n'existe pas de *surfaces minimales fermées* dans \mathbb{R}^m on imagine facilement que le minimum absolu de W pour toute *surface fermée* ne peut être 0. Pour toute immersion $\vec{\Phi}$ d'une surface fermée orienté Σ L.Simon établit la formule de monotonie suivante (voir [Sim]), pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^m$, et tout $0 < t < T < +\infty$

$$\begin{aligned} & T^{-2} \text{Aire}(\vec{\Phi}^{-1}(B_T(\vec{x}^0))) - t^{-2} \text{Aire}(\vec{\Phi}^{-1}(B_t(\vec{x}^0))) \\ &= \int_{M \cap B_T(\vec{x}^0) \setminus B_t(\vec{x}^0)} \left| \frac{\pi_{\vec{n}}(\vec{x} - \vec{x}^0)}{|\vec{x} - \vec{x}^0|^2} + \frac{\vec{H}}{2} \right|^2 \, dvol_g - \frac{1}{4} \int_{\vec{\Phi}^{-1}(B_T(\vec{x}^0) \setminus B_t(\vec{x}^0))} |\vec{H}|^2 \, dvol_g \\ & - \frac{1}{T^2} \int_{\vec{\Phi}^{-1}(B_T(\vec{x}^0))} \langle \vec{x} - \vec{x}^0, \vec{H} \rangle \, dvol_g + \frac{1}{t^2} \int_{\vec{\Phi}^{-1}(B_t(\vec{x}^0))} \langle \vec{x} - \vec{x}^0, \vec{H} \rangle \, dvol_g \end{aligned}$$

En faisant tendre t vers 0 et T vers l'infini on déduit aisément l'inégalité dite de Li et Yau

$$\forall x^0 \in \mathbb{R}^m \quad \theta(|\Phi(\Sigma)|, x^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Aire}(\vec{\Phi}^{-1}(B_t(\vec{x}^0)))}{\pi t^2} \leq \frac{W(\Phi)}{4\pi}$$

⁽¹¹⁾On rappelle que $\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - x_4)^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ est une transformation conforme.

⁽¹²⁾Les immersions minimales de type *Alexandrov* se construisent aisément ([Bre]). Voir sinon les travaux de H.B.Lawson [La], de H. Karcher, U. Pinkall et I. Sterling, [KPS], de J. Choe, M. Soret [CS], ou de N. Kapouleas and D. Wiygul [KW] sur l'existence de plongements minimaux dans S^3 .

où $\theta(|\Phi(\Sigma)|, x^0)$ est la densité au point x^0 du *varifold* donné par l'image de Σ par $\vec{\Phi}$. Dans le cas présent où $\vec{\Phi}$ est supposé être une immersion régulière, $\theta(|\Phi(\Sigma)|, x^0)$ est exactement le nombre d'images réciproques de x^0 par $\vec{\Phi}$. On a donc le résultat suivant.

THÉORÈME III.2. — [LY] Soit $\vec{\Phi}$ l'immersion d'une surface fermée Σ dans \mathbb{R}^m . S'il existe un point x^0 de \mathbb{R}^m ayant k images réciproques par $\vec{\Phi}$ alors

$$W(\vec{\Phi}) \geq 4\pi k \quad .$$

De ce résultat on déduit ainsi que pour toute immersion d'une surface fermée on a

$$W(\vec{\Phi}) \geq 4\pi$$

La minoration 4π est atteinte par la sphère S^2 dans \mathbb{R}^3 et on démontre sans difficulté, toujours à partir de la formule de monotonie, que seule la sphère et ses images par des translations, des rotations et des dilatation satisfont cette borne inférieure. De ce théorème on déduit aussi le corollaire suivant

COROLLAIRE III.3. — [LY] Soit $\vec{\Phi}$ une immersion d'une surface fermée satisfaisant

$$W(\vec{\Phi}) < 8\pi$$

alors $\vec{\Phi}$ est un plongement.

Cette minoration de W par 4π pour toute surface fermée rappelle dans un certain sens la minoration par 2π de l'intégrale de la courbure d'une courbe fermée dans l'espace euclidien avec égalité si et seulement si la courbe est plane et convexe. L'intégrale de la courbure d'une courbe fermée est invariante par dilatation et est de ce fait le lagrangien correspondant à W pour les courbes. Un résultat bien connu de J.Milnor affirme que l'intégrale de la courbure d'une courbe fermée et nouée dans un espace euclidien est supérieure à 4π . Par analogie, et au vue aussi du théorème III.2 on peut imaginer que des hypothèses supplémentaires sur la complexité de la topologie de Σ ou sur la complexité de l'immersion $\vec{\Phi}$ - classe conforme, classe d'isotopie...- devrait donner des minoration plus élevées que 4π .

Dans les décennies qui ont suivi le travail de W.Blaschke presque aucun résultat a concerné le lagrangien W et ses points critiques, les *surfaces minimales conformes*. La raison probablement était que très peu de *surfaces minimales conformes* qui ne soient pas juste des transformations conformes de *surfaces minimales* n'étaient connus à l'époque et on ne savait pas comment en produire de nouvelles. L'article de 1965 de T.J.Willmore, qui semble-t-il ignorait l'existence du travail de Blaschke, a relancé l'étude du lagrangien W , qui est devenu *l'énergie de Willmore* et de ses points critiques qui sont devenus les *surfaces de Willmore*. Dans son article Willmore formule une conjecture qui est l'objet principal de cet exposé

CONJECTURE III.4. — [Wi] Soit $\vec{\Phi}$ une immersion du tore bi-dimensionnel T^2 dans \mathbb{R}^3 alors on a la minoration suivante

$$(III.8) \quad W(\vec{\Phi}) \geq 2\pi^2$$

avec égalité si et seulement si $\vec{\Phi}(\Sigma)$ est, modulo l'action des transformations conformes, l'immersion axialement symétrique notée T_{Wil} et obtenue en tournant autour de l'axe Oz le cercle vertical contenu dans le plan Oxz de centre $(\sqrt{2}, 0, 0)$ et de rayon 1.

Pour étayer sa conjecture, T.J. Willmore démontre que le tore T_{Wil} , qui sera appelé *tore de Willmore* après son travail, est bien un point critique stable de W et que l'inégalité (III.8) est bien vraie pour toutes les immersions axialement symétriques.

La *conjecture de Willmore* a stimulé de nombreuses contributions à la théorie des surfaces qui vont au-delà de la conjecture elle-même. Il serait difficile de rendre compte dans cet exposé de toute l'activité qu'elle a généré. Nous rappellerons seulement quelques résultats qui nous seront utiles pour présenter la preuve de Marques et Neves dans la section suivante.

Dans un article qui a été précurseur dans l'analyse des surfaces de Willmore⁽¹³⁾ [Sim1], L.Simon démontre, en utilisant la théorie des *varifolds* d'Almgren, que le minimum de W est bien atteint parmi toutes les immersions de T^2 . Une approche possible pour démontrer la conjecture serait alors d'étudier les niveaux d'énergie occupés par les points critiques de W et d'approfondir notre compréhension des *surfaces de Willmore*. Une telle approche s'est avérée très efficace dans le cas des *sphères de Willmore* de S^3 . Dans [Br] R.Bryant démontre que l'*application de Gauss conforme*⁽¹⁴⁾ d'une immersion dans S^3 est une *application harmonique* à valeur dans la *sphère Lorentzienne* $S^{1,3} \subset \mathbb{R}^{1,4}$. À partir de cette application harmonique qui est aussi conforme, donc minimale, en utilisant la représentation de Weierstrass, R.Bryant construit explicitement une *forme quartique holomorphe*⁽¹⁵⁾ dont la nullité est équivalente au fait que la *surface de Willmore* dans S^3 est issue de l'image réciproque d'une *surface minimale* non compacte de \mathbb{R}^3 ayant un nombre fini de bouts plongés et plans. On vérifie facilement que l'énergie de Willmore un multiple de 4π , le degré de multiplicité correspondant au nombre de bouts de la *surface minimale*. Si Σ est de genre nul toute *forme quartique holomorphe* y est nulle et donc on en déduit que l'énergie de Willmore d'une sphère de Willmore dans S^3 ou \mathbb{R}^3 est nécessairement un multiple de 4π - R.Bryant démontre aussi que les niveaux de $4\pi\mathbb{N}^*$ ne sont pas tous atteints. Cet argument malheureusement ne fonctionne pas pour les tores ou les autres surfaces fermées de genre supérieur qui possèdent des *formes quartiques holomorphes* non-triviales. Les tentatives de démontrer la conjecture de Willmore par une représentation de type Weierstrass à partir du travail de Bryant a stimulé de nombreux travaux, avec des contributions importantes de F.Burstall, J.Dorfmeister, F.Pedit, U.Pinkall...etc mais n'a jusqu'à présent pas abouti.

Dans l'article [LY], que nous avons déjà mentionné plus haut, P.Li et S.T.Yau introduisent la notion de *volume conforme*. Soit $\mathcal{M}(S^3)$ le *groupe de Möbius* des

⁽¹³⁾L'analyse des surfaces de Willmore est un domaine actuellement très dynamique de l'analyse géométrique dont la présentation nécessiterait de sortir du cadre de cet exposé malheureusement.

⁽¹⁴⁾L'application de Gauss conforme associe en chaque point de l'immersion la sphère bi-dimensionnelle tangente dans S^3 et de même courbure moyenne que la courbure moyenne de l'immersion.

⁽¹⁵⁾C'est à dire une *section holomorphe* du fibré $(\wedge^{(1,0)}T\Sigma)^{\otimes 4}$

difféomorphismes conformes de la sphère S^3 . Étant donnée l'immersion $\vec{\Phi}$ d'une surface fermée Σ on définit

$$V_c(\vec{\Phi}, 3) = \sup_{\Psi \in \mathcal{M}(S^3)} \text{Aire}(\Psi \circ \vec{\Phi})$$

la quantité V_c est appelée *volume conforme* de l'immersion $\vec{\Phi}$. Comme l'*énergie de Willmore* d'une immersion quelconque de Σ dans S^3 majore l'aire de cette immersion et comme l'*énergie de Willmore* est invariante par composition par des difféomorphismes conformes on en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION III.5. — [LY] *Soit Σ une surface orientée fermée et soit $\vec{\Phi}$ une immersion de Σ dans S^3 alors*

$$V_c(\vec{\Phi}, 3) \leq \mathcal{W}(\vec{\Phi})$$

avec égalité si et seulement si $\vec{\Phi}$ est l'image par un difféomorphisme conforme d'une immersion minimale.

Étant donné une surface de riemann (Σ, h) , où h désigne la métrique de courbure de Gauss constante et de volume 1 on définit

$$V_c((\Sigma, h), 3) := \inf \left\{ V_c(\vec{\Phi}, 3) ; \vec{\Phi} \text{ est une immersion conforme de } (\Sigma, h) \text{ dans } S^3 \right\}$$

Un des résultats principaux de [LY] est le théorème suivant

THÉORÈME III.6. — [LY] *Soit (Σ, h) une surface de riemann fermée équipée de sa métrique de courbure constante et de volume 1 alors*

$$(III.9) \quad \lambda_1(\Sigma, h) \leq 2 V_c((\Sigma, h), 3)$$

où $\lambda_1(\Sigma, h)$ est la première valeur propre non nulle du Laplacien sur (Σ, h) .

La connaissance explicite des première valeurs propres du laplacien des *tores plats* permet, en combinant la proposition III.5 et le théorème III.6, d'obtenir une minoration explicite de l'*énergie de Willmore* pour toute immersion de tore dont on connaît la classe conforme. En particulier, Li et Yau parviennent à démontrer la minoration (III.8) pour un sous domaine de l'espace des modules. Ce sous-domaine sera étendu par S.Montiel et A.Ros qui obtiennent de nouvelles minoration pour le *volume conforme* des immersions de tores, [MR]. Néanmoins, après les publications de ces deux travaux, importants pour la conjecture de Willmore, il restait encore une grande partie de l'espace de modules pour laquelle l'inégalité (III.8) était encore ouverte. D'autres contributions comme [Ro] ou [To] permettent de démontrer que la conjecture de Willmore est vraie pour toute surface de S^3 invariante par l'application antipodale $x \rightarrow -x$.

L'invariance conforme de \mathcal{W} donne que le maximum de l'aire pour une *immersion minimale* est atteint exactement pour cette immersion qui réalise donc son volume conforme. C'est justement le cas pour l'image réciproque du *tore de Willmore* par la

projection stéréographique π . Cette image réciproque $\pi^{-1}(T_{Wil})$ n'est autre - modulo rotation - que le *tore de Clifford* T_{Clif} donnée par

$$T_{Clif} := \left\{ (\sqrt{2})^{-1}(e^{i\theta}, e^{i\phi}) \in S^3 \subset \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2 ; \text{ pour tout } (\theta, \phi) \in [0, 2\pi)^2 \right\}$$

et qui est une surface minimale de S^3 et on a $2\pi^2 = W(T_{Wil}) = \mathcal{W}(T_{Clif}) = \text{Aire}(T_{Clif})$. Si donc la conjecture de Willmore était vraie, le tore de Clifford serait en particulier la surface minimale de S^3 d'aire minimale parmi toute les surfaces minimales de genre non nul dans S^3 . C'est cette dernière affirmation que F.Marques et A.Neves vont s'efforcer de démontrer rigoureusement.

III.2. La preuve de la conjecture de Willmore par F.Marques et A.Neves.

Dans cette sous-section nous rendons compte de la démonstration des résultats suivants de F.Marques et A.Neves, ce qui constituait l'objectif principal de cet exposé.

THÉORÈME III.7. — [MN] *Soit Σ une surface fermée de genre non nul. Soit $\vec{\Phi}$ une immersion minimale de cette surface dans S^3 alors*

$$\text{Aire}(\Sigma) \geq 2\pi^2 \quad ,$$

avec égalité si et seulement si $\Sigma = T^2$ et $\vec{\Phi}(T^2)$ est le tore de Clifford - modulo l'action des transformations rigides.

Comme $\mathcal{W} = \text{Aire}$ pour les surfaces minimales de S^3 , ce résultat est la conséquence du théorème suivant qui, paradoxalement - en apparence seulement -, sera démontré dans un deuxième temps dans le travail de F.Marques et A.Neves.

THÉORÈME III.8. — [MN] *Soit Σ une surface fermée de genre non nul. Pour toute immersion de Σ dans S^3 on a*

$$\mathcal{W}(\vec{\Phi}) \geq 2\pi^2 \quad ,$$

avec égalité si et seulement si $\Sigma = T^2$ et $\vec{\Phi}(T^2)$ est le tore de Clifford - modulo l'action du groupe de Möbius des transformations conformes de S^3 .

Comme on peut le voir ce théorème apporte une réponse bien plus forte que la conjecture de Willmore III.4 elle même telle qu'elle a été formulée à l'origine car toutes les surfaces fermées de genre non nul sont prises en compte dans ce résultat et pas seulement les tores.

Avant de présenter les idées principales de la preuve du théorème III.7, il est légitime de s'interroger sur la situation des surfaces minimales fermées de genre nul dans S^3 . En 1966 F.Almgren démontre le résultat suivant que nous allons utiliser plus bas.

THÉORÈME III.9. — [Alm1] *Soit $\vec{\Phi}$ une immersion minimale d'une surface fermée de genre nul dans S^3 alors $\vec{\Phi}(S^2)$ est une sphère géodésique, isométrique à $S^2 \subset S^3$.*

La démonstration de ce résultat est relativement élémentaire. Modulo un changement de paramétrization, le théorème d'uniformisation nous permet de supposer que $\vec{\Phi}$ est *conforme et minimale* de S^2 dans S^3 . L'*identité de Codazzi* s'écrit $\bar{\partial}h^0 = g_{\mathbb{C}} \otimes \partial H$ où h^0 est la forme quadratique de *Weingarten*⁽¹⁶⁾ donnée par $h^0 := \vec{n} \cdot \partial_{z^2}^2 \vec{\Phi} dz^2$ et $g_{\mathbb{C}} := |\partial \vec{\Phi}|^2 d\bar{z} \otimes dz$. La nullité de H donne que la forme de *Weingarten* est holomorphe. Toute forme quadratique holomorphe sur la sphère est nulle ce qui donne finalement que la forme quadratique de *Weingarten* est identiquement nulle. Comme la courbure moyenne est nulle elle aussi on déduit que la seconde forme fondamentale de l'immersion $\vec{\Phi}$ est identiquement nulle et donc que $\vec{\Phi}(S^2)$ est totalement géodésique.

Le point de départ de la démonstration de la conjecture de Willmore par F.Marques et A.Neves est la caractérisation suivante du *tore de Clifford* parmi toutes les immersions minimales due à F.Urbano.

THÉORÈME III.10. — [Ur] *L'indice de Morse de l'immersion minimale dans S^3 d'une surface fermée de genre non nul est supérieur ou égal à 5. Il est exactement égal à 5 si et seulement si cette immersion est l'image par une isométrie du tore de Clifford.*

L'*indice de Morse* est égal à la dimension de l'espace des vecteurs propres de la dérivée seconde de l'aire, l'opérateur de Jacobi de la surface, de valeur propre négative. Tout d'abord le fait que l'indice de Morse ne soit pas nul n'est pas une complète surprise. En effet nous avons vu plus haut que toute *immersion minimale* réalise le maximum de son *volume conforme*, donc l'action du groupe conforme ne peut que donner des directions infinitésimales négatives.

Le fait que toute surface minimale non totalement géodésique ait un indice de Morse au moins égal à 5 se comprend aussi sans trop d'efforts. Un calcul très classique en théorie des surfaces minimales (voir par exemple [CM]) donne que pour toute immersion minimale $\vec{\Phi}$ d'une surface fermée et pour toute perturbation $\vec{w} = w \vec{n}$ on a

$$(III.10) \quad \left. \frac{d^2 \text{Aire}(\vec{\Phi} + t \vec{w})}{dt^2} \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} \left[|dw|_{g_{\vec{\Phi}}}^2 - (|\vec{\mathbb{I}}_{\vec{\Phi}}|^2 + 2) |w|^2 \right] d\text{vol}_{g_{\vec{\Phi}}} \quad ,$$

L'opérateur de Jacobi⁽¹⁷⁾ est donc $\mathcal{L}_{\vec{\Phi}} w = \Delta_{g_{\vec{\Phi}}} w - (|\vec{\mathbb{I}}_{\vec{\Phi}}|^2 + 2)w$. Pour tout v dans B^4 on introduit la transformation conforme de S^3 donnée par

$$(III.11) \quad \forall z \in S^3 \quad F_v(z) := (1 - |v|^2) \frac{z - v}{|z - v|^2} - v$$

⁽¹⁶⁾Le vecteur \vec{n} est le vecteur de Gauss de l'immersion, le vecteur tangent à S^3 et perpendiculaire à l'immersion unité et positif pour l'orientation choisie.

⁽¹⁷⁾ $\Delta_{g_{\vec{\Phi}}}$ désigne l'*opérateur de Laplace Beltrami* - positif - associé à la métrique $g_{\vec{\Phi}}$ donné en coordonnées locales par

$$\Delta_{g_{\vec{\Phi}}} w := -(\det(g^{kl}))^{1/2} \sum_{i,j=1}^2 \partial_{x_i} \left[\det(g_{kl})^{1/2} g^{ij} \partial_{x_j} w \right]$$

où on rappelle que $g_{\vec{\Phi}} = g_{ij} dx_i \otimes dx_j$ et (g^{kl}) est l'inverse de la matrice (g_{kl}) .

On vérifie que pour tout $a \in \mathbb{R}^4$ on a $dF_{ta}(z)/dt|_{t=0} = 2a \cdot z - 2a$. Donc la variation normale à une surface correspondant à l'action infinitésimale du groupe conforme - modulo l'action des isométries - est donnée par

$$w_a := -2 a \cdot \vec{n}$$

L'application de Gauss d'une *immersion minimale* dans S^3 est harmonique⁽¹⁸⁾ donc pour toute *immersion minimale* on a

$$\mathcal{L}_{\vec{\Phi}} w_a = -2 a \cdot \left[\Delta_{g_{\vec{\Phi}}} \vec{n} - \vec{n} [|d\vec{n}|_{g_{\vec{\Phi}}}^2 + 2] \right] = -2 w_a$$

Les fonctions w_a réalisent ainsi des fonctions propres de l'opérateur de Jacobi et comme la surface minimale n'est pas une sphère géodésique, ce que l'on sait grâce au théorème de F. Almgren III.9, cet espace de fonctions propres est de dimension 4. La valeur propre -2 a donc une multiplicité au moins égale à 4. Donc -2 ne peut être la première valeur propre qui est de multiplicité 1. Ainsi il existe au moins 5 vecteurs propres indépendants de $\mathcal{L}_{\vec{\Phi}}$ ayant des valeurs propres négatives et donc l'indice de toute surface minimale non-géodésique est au moins 5.

On vérifie aisément que

$$\mathcal{L}_{T_{Clif}} w = \Delta_{T_{Clif}} w - 4 w$$

Donc la première valeur propre de l'opérateur de Jacobi du *tore de Clifford* est $\lambda_1(T_{Clif}) = -4$ avec pour fonctions propres les fonctions constantes. On observe que cette première valeur propre est générée par la variation infinitésimale donnée par

$$\vec{\Phi}_t : (\theta, \phi) \longrightarrow (\cos(t/4 + \pi/4) e^{i\theta}, \sin(t/4 + \pi/4) e^{i\phi}) \quad \forall t \in (-\pi, \pi).$$

Les immersions $\vec{\Phi}_t(T^2)$ sont les *tores à courbure moyenne constante* obtenus en relevant les différents cercles horizontaux de S^2 par la fibration de Hopf⁽¹⁹⁾ Le *tore de Clifford* étant le relevé de l'équateur. La famille $\vec{\Phi}_t(T^2)$ correspond au feuilletage de $S^3 \setminus \{\text{pôles nords et sud}\}$ correspondant à

$$\Sigma_t := \partial\{x \in S^3 ; d(x) < t\}$$

où $d(x) = \pm \text{dist}_{S^3}(x, T_{Clif})$ est la distance signée à T_{Clif} pour la métrique standard sur S^3 que l'on note dist_{S^3} et d est comptée soit positivement soit négativement suivant que l'on soit dans une des deux composantes connexes de $S^3 \setminus T_{Clif}$. Il est naturel de penser que, modulo les déformations liées à l'action des difféomorphismes conformes et des déformations Σ_t , le *tore de Clifford* minimise l'aire parmi toutes les surfaces de genre non nul. F. Marques et A. Neves imaginent donc une procédure de *min-max* qui puisse rendre rigoureuse une telle affirmation.

Un glissement de notation est désormais utile afin d'être compatible avec [MN] : Σ ne va plus noter une surface abstraite mais une immersion de celle ci.

⁽¹⁸⁾Une application harmonique u de (Σ, g) dans S^3 est un point critique de l'énergie de Dirichlet $\int_{\Sigma} |du|_g^2 d\text{vol}_g$ et satisfait $\Delta_g u - u|du|_g^2 = 0$.

⁽¹⁹⁾La fibration de Hopf associe à $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ la droite complexe $[z_1, z_2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \simeq S^2$ passant par ce point.

Pour toute surface plongée⁽²⁰⁾ Σ dans S^3 , on introduit la *famille canonique primitive*

$$\Sigma_{(v,t)} := \partial\{x \in S^3 ; d_v(x) < t\} \quad \forall v \in B^4 \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

où d_v désigne la fonction distance signée définie par $d_v(x) = \text{dist}_{S^3}(x, F_v(\Sigma))$ pour $x \in F_v(A)$ et $d_v(x) = -\text{dist}_{S^3}(x, F_v(\Sigma))$ pour $x \in S^3 \setminus F_v(A)$ et A est l'ouvert donné par une des composantes connexes de $S^3 \setminus \Sigma$. Les courants d'intégration sur $\Sigma_{(v,t)}$, que l'on note $[\Sigma(v, t)]$ définissent des *cycles entiers rectifiables* de $\mathcal{Z}_2(S^3)$ et on vérifie sans problème que l'application $\Sigma(v, t)$ de $B^4 \times (-\pi, \pi)$ dans les *cycles entiers rectifiables* bi-dimensionnels équipés de la topologie *bémol*, $\mathcal{Z}_2(S^3, \mathcal{F})$, est continue. Dans l'espoir de démontrer que le *tore de Clifford* a l'aire minimale parmi toute les autres *surfaces minimales* de genre non nul on envisage alors de considérer des problèmes de *min-max* sur les surfaces plongées de genre non nul que l'on écrit formellement à ce stade

$$(III.12) \quad \inf_{\Sigma(v,t) \simeq \Sigma_0(v,t)} \sup_{v \in B^4, t \in [-\pi, \pi]} \text{Aire}(\Sigma(v, t)) \quad .$$

Ce problème, on l'espère, devrait produire une surface minimale d'indice au plus 5 et qui serait d'aire plus basse que toutes les autres, grace au théorème d'Urbano on en déduirait le théorème III.7.

Il y a une bonne nouvelle à ce stade qui est apportée par le théorème suivant de A.Ros.

THÉORÈME III.11. — [Ro] *Pour toute surface plongée Σ dans S^3 on a la majoration suivante*

$$(III.13) \quad \forall t \in (-\pi, \pi) \quad \forall v \in B^4 \quad \text{Aire}(\Sigma(v, t)) \leq \mathcal{W}(\Sigma)$$

Par ailleurs, si Σ n'est pas une sphère géodésique et si il existe $t \in (-\pi, \pi)$ et $v \in B^4$ tels que

$$\text{Aire}(\Sigma(v, t)) = \mathcal{W}(\Sigma)$$

alors $t = 0$ et Σ_v est une surface minimale.

La bonne nouvelle est que le maximum de l'aire est borné sur toute *famille canonique primitive*. Ce qui n'est par contre pas clair du tout à ce stade c'est la signification de l'équivalence d'homotopie que l'on a notée \simeq dans (III.12). Contrairement aux problèmes de *min-max* considérés dans la section précédente, par passage à la limite $v \rightarrow \partial B^4$, le bord du cube de l'application $\Sigma(v, t)$ n'est pas envoyée sur l'élément nul de $\mathcal{Z}_2(S^3)$. On a par exemple

$$(III.14) \quad \begin{cases} \forall t \in (0, \pi) \quad \forall p \in A & \mathcal{F} - \lim_{v \rightarrow p} [\Sigma(v, t)] = [\partial B_t^3(-p)] \\ \forall t \in (-\pi, 0] \quad \forall p \in A & \mathcal{F} - \lim_{v \rightarrow p} [\Sigma(v, t)] = 0 \end{cases}$$

⁽²⁰⁾Pour démontrer les théorèmes III.7 et III.8 Il est suffisant de ne considérer que les immersions sous le niveau d'énergie de Willmore $\mathcal{W}(\Sigma) < 8\pi$ qui sont donc nécessairement plongées comme l'affirme le corollaire III.3.

où $[\partial B_t^3(-p)]$ est le courant d'intégration sur le bord de la boule géodésique de centre $-p$ et de rayon t orientée par son vecteur unitaire sortant. On peut alors imaginer remplacer des déformations d'homotopies de bord nul par de déformations \mathcal{F} -continues et relatives pour un bord contraint à évoluer dans un sous ensemble de $\mathcal{Z}_2(S^3)$. C'est alors qu'intervient l'inconvénient principal de la *famille canonique primitive* : on a

$$(III.15) \quad \begin{cases} \forall t \in [0, \pi) & \forall p \in S^3 \setminus \bar{A} & \mathcal{F} - \lim_{v \rightarrow p} [\Sigma(v, t)] = 0 \\ \forall t \in (0, \pi) & \forall p \in S^3 \setminus \bar{A} & \mathcal{F} - \lim_{v \rightarrow p} [\Sigma(v, t)] = [\partial B_{\pi+t}^3(p)] \end{cases}$$

Donc en comparant (III.14) et (III.15) en considérant des p respectivement dans A et $S^3 \setminus \bar{A}$ qui convergent vers un point de Σ de part et d'autre de la surface on constate que la famille canonique primitive ne s'étend pas de façon continue pour la *topologie bémol* au bord du cube $\partial(B^4 \times (-\pi, \pi))$.

C'est là qu'intervient une des contributions les plus remarquables du travail de F.Marques et A.Neves : c'est la modification de la *famille canonique primitive* en une *famille canonique \mathcal{F} -continue* jusqu'au bord qui préserve les propriétés essentielles de la famille primitive. Précisément nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME III.12. — [MN] [**existence de familles canoniques \mathcal{F} -continues**]
Soit Σ une surface fermée de genre non nul plongée dans S^3 . Alors il existe une application Ψ_Σ \mathcal{F} -continue jusqu'au bord de $[0, 1]^5$ dans $\mathcal{Z}_2(S^3)$ satisfaisant les conditions suivantes

i)

$$\forall x' \in [0, 1]^4 \quad \Psi_\Sigma(x', 0) = \Psi_\Sigma(x', 1) = 0$$

ii) Pour tout $x' \in \partial([0, 1]^4)$ l'application $t \rightarrow \Psi_\Sigma(x', t)$ réalise un feuilletage de S^3 par des sphères centrées en un point $Q_\Sigma(x') \in S^3$. L'application Q_Σ est appelée "application centre". En particulier

$$\sup_{x \in \partial([0, 1]^5)} \mathbf{M}(\Psi_\Sigma(x)) = 4\pi \quad .$$

iii) Pour tout x' dans $\partial([0, 1]^4)$ on a

$$\Psi_\Sigma(x', 1/2) = [\partial B_{\pi/2}^3(Q_\Sigma(x'))]$$

et $t = 1/2$ est le seul t pour lequel c'est vrai. En particulier on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \mathbf{F}(|\Psi_\Sigma(x, t)|, \mathcal{T}) < \varepsilon \Rightarrow |t - 1/2| < \delta \quad .$$

où \mathcal{T} désigne l'espace des varifolds générés par les grands cercles de S^3 .

iv) La restriction de l'application

$$\Psi_\Sigma : \partial([0, 1]^4) \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{Z}_2(S^3)$$

est continue pour la topologie \mathbf{F} .

v)

$$[\Sigma] \in \Psi_{\Sigma}([0, 1]^5)$$

vi)

$$\sup_{x \in [0, 1]^5} \mathbf{M}(\Psi_{\Sigma}(x)) \leq \mathcal{W}(\Sigma) \quad .$$

vii)

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \{ \mathbf{M}(\Psi_{\Sigma}(x) \llcorner B_r^3(p)) ; x \in [0, 1]^5 \ p \in S^3 \ r \in [0, \pi] \} = 0$$

La construction de la *famille canonique \mathcal{F} -continue* Ψ_{Σ} à partir de la *famille canonique primitive* est réalisée comme suit. On part de la *famille canonique primitive* qui est bien \mathcal{F} -continue de $\overline{B^4} \setminus \Sigma \times [-\pi, \pi]$. On observe que lorsque $v \in B^4$ converge vers un point du bord de la boule contenu dans la surface $p \in \Sigma$ il existe bien une \mathcal{F} -limite pour toute suite contenue dans le plan bi-dimensionnel généré par les deux vecteurs orthogonaux p et le vecteur de Gauss de la surface $\vec{n}(p)$ et de la forme

$$v_n = (1 - \sigma_n) (\cos \tau_n p + \sin \tau_n \vec{n}(p)) \quad \text{telle que } \frac{\tau_n}{\sigma_n} \text{ converge}$$

cette limite est donnée par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\Sigma(v_n, t)] = [\partial B_{\frac{\pi}{2} - \theta + t}(-\sin \theta p - \cos \theta \vec{n}(p))] \quad \text{où } \theta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan \frac{\tau_n}{\sigma_n}$$

On observe que la famille $[\partial B_{\frac{\pi}{2} - \theta + t}(-\sin \theta p - \cos \theta \vec{n}(p))]$ des limites de $[\Sigma(v_n, t)]$ réalise un feuilletage continu par rapport à θ par des sphères bi-dimensionnelles qui à t fixé va bien interpoler la \mathcal{F} -limite de $[\Sigma(v, t)]$ pour $v \in S^3 \setminus \Sigma$ données à gauche et à droite respectivement par (III.14) et (III.15). L'idée est alors la même que celle de la *procédure de blow-up* en géométrie complexe en "rajoutant" continuellement ces feuilletages de sphères intermédiaires en chaque point de Σ . On obtient ainsi la famille Ψ_{Σ} pour laquelle on vérifie i)...vii).

Pour toute surface plongée Σ on considère alors la classe d'homotopie relative π_{Σ} des applications Ξ qui sont \mathcal{F} -continues de $[0, 1]^5$ dans $\mathcal{Z}_2(S^3)$ se déformant \mathcal{F} -continuellement tout en maintenant la déformation fixe sur le bord $\partial[0, 1]^5$ et on introduit le problème de *min-max* suivant

$$(III.16) \quad \mathbf{L}(\pi_{\Sigma}) := \inf_{\Xi \in \Pi_{\Sigma}} \max_{x \in [0, 1]^5} \mathbf{M}(\Xi(x))$$

La première question qui se pose alors est : le problème de *min-max* n'est-il pas trivial⁽²¹⁾ ? c'est à dire a-t-on bien

$$(III.17) \quad \mathbf{L}(\pi_{\Sigma}) > \max_{x \in \partial[0, 1]^5} \mathbf{M}(\Psi_{\Sigma}(x)) = 4\pi \quad ?$$

Dans la famille canonique ainsi construite se "cache" une rigidité topologique qui sera essentielle pour assurer que le problème de *min-max* n'est pas trivial.

⁽²¹⁾Cette condition de non-trivialité du *min-max* dans le cas d'homotopies relatives correspond évidemment à la condition de non-trivialité du *min-max* dans le cas du travail de Pitts présenté plus haut et qui se caractérise cette fois par $\mathbf{L}(\Pi) > 0$.

THÉORÈME III.13. — [MN] *L'application "centre" définie dans le théorème III.12, vue comme application de $\partial[0, 1]^4 \simeq S^3$ dans S^3 a un degré égale au genre de la surface*

$$\deg(Q_\Sigma) = \text{genre}(\Sigma) \quad .$$

Ce résultat se démontre par un calcul relativement élémentaire - on connaît quasiment explicitement Q_Σ en fonction de la surface Σ - et fait appel essentiellement au théorème de Gauss Bonnet. C'est cependant est une propriété cruciale des *familles canoniques \mathcal{F} -continues* découverte par F.Marques et A.Neves qui va assurer la non-trivialité du problème de *min-max* (III.17). On a précisément le théorème suivant.

THÉORÈME III.14. — [MN] *Soit Σ une surface immergée fermée de genre non nul alors*

$$\mathbf{L}(\pi_\Sigma) > 4\pi \quad .$$

La preuve de ce théorème dans [MN] consiste à rendre rigoureux le raisonnement très approximatif suivant. Supposons que la *largeur du min-max*, $\mathbf{L}(\pi_\Sigma)$, soit égale à 4π . On considère alors une suite Ξ_n homotope à la *famille canonique* Ψ_Σ telle que

$$4\pi < \max_{x \in [0,1]^5} \mathbf{M}(\Xi_n(x)) \leq 4\pi + 1/n$$

Pour tout $v \in [0, 1]^4$ la famille $t \rightarrow \Xi_n(v, t)$ réalise un balayage de S^3 c'est à dire elle est homologue au générateur de $H^3(S^3)$. Il existe donc un $t = t_v$ tel que $\Xi_n(v, t_v)$ est le bord d'un sous ensemble de S^3 de volume égal à la moitié de $\text{vol}(S^3)$. Lorsque $v \in \partial[0, 1]^4$ nous savons par exemple que $t_v = 1/2$. Comme $\Xi_n(v, t_v)$ est d'aire presque égale à 4π , elle réalise donc presque l'optimum isopérimétrique et $|\Xi_n(v, t_v)|$ est de ce fait très proche pour la topologie \mathbf{F} d'une sphère géodésique dont l'espace est noté \mathcal{T} . On construit ainsi une projection \mathbf{F} -continue de l'application $v \in [0, 1]^4 \rightarrow |\Xi_n(v, t_v)|$ dans $\mathcal{T} \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^3$. Une telle projection réalise une extension \mathbf{F} -continue de l'application $x' \in \partial[0, 1]^4 \rightarrow |\Psi_\Sigma(x', 1/2)| = |[\partial B_{\pi/2}^3(Q_\Sigma(x'))]|$ dans $\mathcal{T} \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^3$ et $|\Psi_\Sigma(\partial[0, 1]^4, 1/2)|$ serait alors un *bord* de $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$. Ce dernier point contredirait le fait que le degré de Q est non nul. En effet on vérifie aisément que

$$|\Psi_\Sigma(\partial[0, 1]^4, 1/2)| = 2 \deg(Q_\Sigma) |[\mathbb{R}\mathbb{P}^3]| \in H_3(\mathbb{R}\mathbb{P}^3) \quad .$$

Donc, si $\text{genre}(\Sigma) \neq 0$ le théorème III.13 nous dit que $\deg(Q_\Sigma) \neq 0$ et donc $|\Psi_\Sigma(\partial[0, 1]^4, 1/2)| \neq 0$ dans $H_3(\mathbb{R}\mathbb{P}^3)$ ce qui contredit l'affirmation plus haut que $|\Psi_\Sigma(\partial[0, 1]^4, 1/2)|$ est un *bord* de $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$. On a donc bien $L(\pi_\Sigma) > 4\pi$.

La discretisation "à la Pitts" du problème de min-max.

Cette étape est nécessaire pour pouvoir adapter la méthode de Pitts et garantir que le problème de *min-max* est bien atteint.

Pour toute surface fermée et plongée Σ , à partir de la *famille canonique \mathcal{F} -continue* on génère une $(5, \mathbf{M})$ -suite d'homotopie canonique $\varphi_\Sigma = (\varphi_\Sigma^j)_{j \in \mathbb{N}}$ de qui \mathcal{F} -converge vers Ψ_Σ , égale à la restriction Ψ_Σ^0 de Ψ_Σ sur le bord $\partial I(5, j)_0$ et satisfaisant

$$(III.18) \quad \mathbf{L}(\varphi) \leq \max_{x \in [0,1]^5} \mathbf{M}(\Psi_\Sigma(x))$$

La possibilité d'une telle discrétisation et le passage de la \mathcal{F} -continuité à la \mathbf{M} -continuité discrète avec *finesse* tendant vers zero est à nouveau illustré par la figure. C'est une étape technique et délicate du travail de Marques et Neves que nous ne pouvons décrire ici. Elle fait usage de nombreuses propriétés de la *famille canonique \mathcal{F} -continue* Ψ_Σ comme sa \mathbf{F} -continuité au bord et la non concentration de la masse vii).

De façon tout à fait analogue à la définition II.5 dans le cas de bord nul, on définit la $(5, \mathbf{M})$ -classe d'homotopie des $(5, \mathbf{M})$ -suites d'homotopie à bord fixé égal à Ψ_Σ^0 . L'ensemble des classes d'homotopies associées à cette relation d'équivalence sont notées $\pi_5^\sharp(Z_2(S^3, \mathbf{M}), \Psi_\Sigma^0)$. Soit Π_Σ la classe de φ_Σ dans $\pi_5^\sharp(Z_2(S^3, \mathbf{M}), \Psi_\Sigma^0)$. En suivant une version discrete de la preuve du théorème III.17 on démontre que si Σ est de genre non nul, on a

$$\mathbf{L}(\Pi_\Sigma) > \max_{x \in \partial[0,1]^5} \mathbf{M}(\Psi_\Sigma(x)) = 4\pi \quad .$$

On peut alors appliquer la version "homotopie relative" pour le bord fixé égal à Ψ_Σ^0 du théorème II.14 de Pitts et on obtient comme corollaire de ce théorème et de la construction de la $(5, \mathbf{M})$ -suite d'homotopie canonique par Marques et Neves.

COROLLAIRE III.15. — *Soit Σ une surface fermée plongée dans S^3 et satisfaisant $\mathcal{W}(\Sigma) < 8\pi$ alors il existe une surface minimale plongée $\tilde{\Sigma}$ de genre non nul telle que*

$$\mathbf{L}(\Pi_\Sigma) = \text{Aire}(\tilde{\Sigma})$$

Il est très naturel de penser à ce stade que l'indice de $\tilde{\Sigma}$ est égal à la dimension 5 du domaine des applications considérées. C'est en effet le cas.

PROPOSITION III.16. — [MN] *Soit $\tilde{\Sigma}$ une surface minimale plongée de S^3 telle que*

$$\mathbf{L}(\Pi_\Sigma) = \text{Aire}(\tilde{\Sigma})$$

pour une surface Σ de genre non nul satisfaisant $\mathcal{W}(\Sigma) < 8\pi$. Alors l'indice de Morse de l'opérateur de Jacobi $\mathcal{L}_{\tilde{\Sigma}}$ de $\tilde{\Sigma}$ est égal à 5 et $\tilde{\Sigma}$ est l'image par une isométrie du tore de Clifford.

La démonstration de ce résultat dans [MN] est assez naturelle. On démontre tout d'abord sans trop d'efforts que l'opérateur de Jacobi $\mathcal{L}_{\tilde{\Sigma}}$ est non dégénéré sur l'espace des directions négatives données par $a \cdot \vec{n}$ et la fonction constante 1. En supposant que $\mathcal{L}_{\tilde{\Sigma}}$ soit d'indice supérieur ou égal à 6, on utilise cette non dégénérescence pour construire une application $\tilde{\Psi}$ de $[0, 1]^5$ dans $\mathcal{Z}_2(S^3)$ en déformant Ψ_Σ au voisinage de $\tilde{\Sigma}$ le long de cette 6-ème hypothétique direction négative de façon à avoir

$$\sup_{x \in [0,1]^5} \tilde{\Psi}(x) < \text{Aire}(\tilde{\Sigma}) \quad .$$

La déformation est effectuée avec soin de façon à garantir l'existence d'une $(5, \mathbf{M})$ -suite d'homotopie canonique $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}^j)_{j \in \mathbb{N}}$ homotope à Π_Σ et telle que

$$\mathbf{L}(\tilde{\varphi}) < \text{Aire}(\tilde{\Sigma}) \quad .$$

Ceci contredit la minimalité de $\tilde{\Sigma}$. Donc $\tilde{\Sigma}$ est bien d'indice égal à 5 et on peut lui appliquer le théorème d'Urbano III.10.

PREUVE DE LA CONJECTURE DE WILLMORE.

Soit Σ une surface plongée de genre non-nul satisfaisant $\mathcal{W}(\Sigma) < 8\pi$. On considère la $(5, \mathbf{M})$ -suite d'homotopie canonique $\varphi_\Sigma = (\varphi_\Sigma^j)_{j \in \mathbb{N}}$ associée et sa classe d'homotopie Π_Σ . Les inégalités respectivement vi) du théorème III.12 et (III.18) donnent

$$\mathbf{L}(\Pi_\Sigma) \leq \mathbf{L}(\varphi_\Sigma) \leq \mathcal{W}(\Sigma) \quad .$$

Le corollaire III.15 nous donne l'existence d'une surface minimale plongée de genre non nul telle que

$$\text{Aire}(\tilde{\Sigma}) = \mathbf{L}(\Pi_\Sigma) \leq \mathbf{L}(\varphi_\Sigma) \leq \mathcal{W}(\Sigma)$$

La proposition III.16 nous dit que $\tilde{\Sigma}$ est d'indice 5 et donc qu'il s'agit de l'image par une isométrie du *tore de Clifford* et donc on a

$$2\pi^2 \leq \mathcal{W}(\Sigma) \quad .$$

Si les inégalités précédentes sont des égalités alors, grâce à (III.18) et la deuxième partie du théorème III.11, nous déduisons que Σ est l'image par une transformation conforme du *tore de Clifford*.

IV. CONCLUSION.

Il est légitime de se demander ce qu'il en est de la conjecture de Willmore en codimension plus grande que 1 : Qu'en est-il de la borne inférieure de $\mathcal{W}(\Sigma)$ pour des surfaces fermées de genre non nul dans S^m pour $m \geq 4$. Les résultats partiels de Li et Yau [LY] ou de Montiel et Ros [MR] s'appliquent dans ce cas et on connaît déjà un sous ensemble ouvert de l'espace des modules des tores pour lesquels on a nécessairement $\mathcal{W}(\Sigma) \geq 2\pi^2$. La méthode de *min-max* de Marques et Neves semble ne pas s'appliquer en codimension plus grande. En effet, la construction de la *famille canonique primitive*, essentielle à la construction du problème de *min-max*, est manifestement très liée⁽²²⁾ à la dimension 3 . Pitts par ailleurs utilise fortement la codimension 1 afin d'assurer la régularité des surfaces minimales réalisant la *largeur*. En codimension plus grande, les surfaces minimales localement minimisantes peuvent avoir des singularités - les *courbes holomorphes* en sont un exemple - et il faudrait utiliser les techniques très lourdes des résultats d'Almgren-De Lellis-Spadaro pour montrer la régularité en dehors de points isolés pour les surfaces *presques minimales* (ce problème est encore complètement ouvert). Il y a aussi un phénomène nouveau en dimension plus grande ou égale à 4 : le résultat d'unicité d'Almgren n'est plus vrai et il existe par exemple une surface minimale de genre nul dans S^4 qui ne soit pas totalement géodésique : la *surface de Veronese* en est un exemple. Son aire, égale à 6π , est comprise entre 4π et $2\pi^2$ et il faudrait s'assurer

⁽²²⁾Ceci est évident pour la variable t qui pointe vers la direction la plus négative.

qu'un éventuel problème de *min max* formulé dans le cadre des *varifolds* - donc dans un cadre très faible - ne "dégénère" pas sur cette surface.

Du côté des méthodes de *min-max* mentionnons juste le résultat important obtenu il y a quelques mois par F.Marques et A.Neves en combinant la version \mathbb{Z}_2 des méthodes d'Almgren-Pitts et des travaux respectivement de L.Guth [Gu] et M.Gromov [Gr1], [Gr2] sur les notions de *p-balayages* \mathbb{Z}_2 de variété et les estimations de leurs *largeurs*.

THÉORÈME IV.1. — [MN1] *Soit (M^m, g) une variété riemannienne compacte de dimension m inférieure ou égale à 7 et de courbure de Ricci strictement positive. Alors M^m contient une infinité d'hypersurfaces minimales régulières, plongées et fermées.*

RÉFÉRENCES

- [All] W. K. ALLARD – *On the first variation of a varifold*, Ann. of Math. **95** (1972), no. 2, 417-491.
- [Alm] F.J. ALMGREN, Jr. – *The homotopy groups of the integral cycle groups*, Topology **1** (1962), 257-299.
- [Alm1] F.J. ALMGREN, Jr. – *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernsteins theorem*, Ann. of Math. **84** (1966), 277-292.
- [Al] F.J. ALMGREN – *Jr., Almgrens big regularity paper*, World Scientific, River Edge, NJ, USA, 2000.
- [Bi] G.D.BIRKHOFF – *Dynamical systems with two degrees of freedom.*, Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), 199-300.
- [Bl] W.BLASCHKE – *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins relativitätstheorie III*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Bd. XXIX Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln, bearbeitet von Gerhard Thomsen. 1929.
- [BDG] E. BOMBIERI, E. DE GIORGI, E. GIUSTI, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243-268.
- [Bre] S.BRENDLE – *Minimal surfaces in S^3 : a survey of recent results*, Bulletin of Mathematical Sciences **3** (2013), 133–171.
- [Br] R. BRYANT – *A duality theorem for Willmore surfaces*, J. Differential Geom. **20** (1984), 23-53.
- [CC] E.CALABI, J.CAO – *Simple closed geodesics on convex surfaces* J.Differential Geom. **36** (1992), no.3, 517-549.
- [Ch] B.Y.CHEN – *Some conformal invariants of submanifolds and their applications*, Boll. Un. Mat. Ital. **10** (1974), no. 4, 380–385.
- [CS] J. CHOE, M. SORET – *New minimal surfaces in S^3 desingularizing the Clifford tori* arXiv :1304.3184, prepublication (2013).

- [CM] T.H.COLDING, W.P.MINICOZZI II – *A course in minimal surfaces* American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, **121**, 2011.
- [Cr] C.B.CROKE – *Area and the length of the shortest geodesic*, J. Diff.Geom., **27** (1988), no. 1, 1-21.
- [DaD] A.DAHAN-DALMÉDICO – *Mécanique et théorie des surfaces : les travaux de Sophie Germain*, Historia Mathematica **14** (1987), no. 4, 347-365.
- [DS1] C. DE LELLIS, E. SPADARO *Regularity of area-minimizing currents I : L^p gradient estimates*, arXiv :1306.1195, prépublication (2013).
- [DS2] C. DE LELLIS, E. SPADARO *Regularity of area-minimizing currents II : center manifold*, arXiv :1306.1191, prépublication (2013).
- [DS3] C. DE LELLIS, E. SPADARO *Regularity of area-minimizing currents III : blow-up*, arXiv :1306.1194, prépublication (2013).
- [Fe] H. FEDERER – *Geometric measure theory*. Springer, Classics in Math., 1991.
- [FF] H. FEDERER, W. FLEMING – *Normal and integral currents*, Ann. of Math. **72** (1960), 458-520.
- [Gr1] M. GROMOV – *Dimension, nonlinear spectra and width*, Geometric aspects of functional analysis,(1986/87), 132-184, Lecture Notes in Math., 1317, Springer, Berlin, 1988.
- [Gr2] M. GROMOV – *Isoperimetry of waists and concentration of maps*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), 1782-15.
- [Gu] L. GUTH – *Minimax problems related to cup powers and Steenrod squares*, Geom. Funct. Anal. **18** (2008), 1917-1987.
- [Ha] J.HADAMARD – *Les surfaces à courbures et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures et Appl. **4** (1898), 27-73.
- [He] W.HELFRICH – *Elastic properties of lipid bilayers - theory and possible experiments* Zeitschrift Fur Naturforschung C - A Journal Of Biosciences. **28** (1973), 693-703.
- [KW] N. KAPOULEAS, D. WIYGUL – *Minimal surfaces in the round three-sphere by desingularizing intersecting Clifford tori*, preprint (2013).
- [KPS] H. KARCHER, U. PINKALL, I. STERLING – *New minimal surfaces in S^3* , J. Diff. Geom. **28** (1988) 169-185.
- [Kl] W.KLINGENBERG – *Lectures on closed geodesics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York 1978.
- [La] H.B.LAWSON – *Complete minimal surfaces in S^3* , Annals of Math. **92** (1970), no. 3, 335-374.
- [LY] P.LI, S.-T.YAU – *A New Conformal Invariant and its Applications to the Willmore Conjecture and the First Eigenvalue on Compact Surfaces*, Inventiones Math. **69** (1982), 269-291.

- [LS] L.LYUSTERNIK, L.SCHNIRELMAN – *Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0* C.R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 269-271.
- [LS1] L.LYUSTERNIK, L.SCHNIRELMAN – *Topological methods in variational problems and their application to the differential geometry of surfaces*, Uspekhi Mat. Nauk. **2** (1947), no 1, 166-217.
- [MN] F.MARQUES, A.NEVES – *Min-max theory and the Willmore conjecture*, Annals of Math. à paraître
- [MN1] F.MARQUES, A.NEVES – *Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature*, arXiv :1311.6501, prépublication (2013).
- [MR] S. MONTIEL, A. ROS – *Minimal immersions of surfaces by the first Eigenfunctions and conformal area*, Invent. Math., **83**, (1986), 153–166.
- [Mo] M.MORSE – *Functional topology and abstract variational theory*, Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule **92** (1938) 1-79.
- [Pit] J.PITTS – *Existence and regularity of minimal surfaces on riemannian manifolds*. Princeton University Press, Princeton New-Jersey 1981.
- [Pr] D. PREISS – *Geometry of measures in \mathbb{R}^n : distribution, rectifiability, and densities*. Ann. of Math., **125** (1987), 537643.
- [Po] H.POINCARÉ – *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), 237–274.
- [Ro] A. ROS – *The Willmore conjecture in the real projective space*, Math. Res. Lett. **6** (1999) 487493 .
- [ScS] R.SCHOEN, L.SIMON – *Regularity of stable minimal hypersurfaces*, Comm. Pure Appl. Math., **34** (1981), 741-797.
- [Sim] L.SIMON – *Lectures on Geometric Measure Theory*, Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.
- [Sim1] L.SIMON – *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), 281326.
- [Si] J.SIMONS – *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968), 62-105.
- [Ta] I.A.TAIMANOV – *Closed extremals on two dimensional manifolds*, Uspekhi Mat. Nauk. **47** (1992), no 2, 143-185.
- [Ta1] I.A.TAIMANOV – *On the existence of three closed geodesics without self-intersections on manifold homeomorphic to the two dimensional spheres*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **56** (1992), 605-635.
- [To] P.TOPPING – *Towards the Willmore conjecture*, Calc. Var. Partial Differential Equations **11** (2000), 361-393.
- [Ur] F.URBANO – *Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 989-992

- [Wh] B.WHITE – *The mathematics of F. J. Almgren, Jr* J. Geometric Analysis **8** (1998), no. 5, 681-702.
- [Wi] T.J.WILLMORE – *Note on embedded surfaces*, An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. I a Mat **11B** (1965), 493-496.

Tristan RIVIÈRE

ETH-Zentrum

Forschungsinstitut für Mathematik

CH-8092 Zürich, Switzerland

E-mail : `tristan.riviere@math.ethz.ch`