Ensembles singuliers topologiques dans les espaces fonctionnels entre variétés

Robert Hardt et Tristan Rivière

I Introduction

On se donne 2 variétés compactes riemanniennes (M^m, g) et (N^n, h), la seconde étant supposée plongée isométriquement dans un espace euclidien $\mathbb{R}^k$ (Ce qui est toujours possible d'après le théorème de Nash-Moser). Nous nous restreindrons, dans cet exposé, aux espaces de Sobolev entre M et N étant entendu que le problèmes des singularités topologiques se pose dans de nombreux autres espaces fonctionnels entre ces deux variétés. Soient donc deux nombres positifs p et s, avec $p \geq 1$, on définit l'espace de Sobolev $W^{s,p}(M, N)$ par

$$W^{s,p}(M, N) = \left\{ u \in W^{s,p}(M, \mathbb{R}^k) \quad \text{tels que} \quad u(x) \in N \text{ p. p. } x \in M \right\}$$

où l'espace $W^{s,p}(M, \mathbb{R}^k)$ est défini à partir de $W^{s,p}_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ au moyen des cartes sur M.

On se pose la question de la densité forte ou faible des applications $C^\infty(M, N)$ dans $W^{s,p}(M, N)$. Ces questions surgissent naturellement par exemple lors de l'étude de problèmes variationnels entre variétés comme celui des applications harmoniques...etc.

Dans une première approche, lorsque $M = B^m$, la boule unité de $\mathbb{R}^m$, l'ensemble singulier topologique d'une application u dans $W^{s,p}(B^m, N^n)$, d'un point de vue strictement ensembliste, est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel l'application est fortement approximable. L'obstruction à l'approximation forte se caractérise, en effet, par la réalisation locale, autour de singularités de u, d'éléments non nuls de $\pi_k(N)$ où $k = [sp]$ est la partie entière de sp. Par exemple, l'application u de B^3 dans S^2 qui à x associe $x/|x|$ n'est pas approximable par des applications régulières dans $W^{1,p}(B^3, S^2)$ $(2 \leq$

$p < 3$) ce qui est du à la réalisations d'un élément non nul de $\pi_2(S^2)$ sur les sphères centrées en la singularité 0. Précisement on a pour $s = 1$.

Theorem I.1 *[SU][BZ][Be1] $C^\infty(B^m, N)$ est dense dans $W^{1,p}(B^m, N)$ pour la topologie forte si et seulement si*

$$p \geq m$$

ou

$$\pi_{[p]}(N) = 0$$

Comme l'ont observé récemment F.Hang et F.H.Lin [HL], l'énoncé précédent ne s'étend pas à un domaine quelconque : l'application v de $\mathbb{C}P^3$ dans $\mathbb{C}P^2$ définie en coordonnées homogènes par

$$v \ : \ [z_1, z_2, z_3, z_4] \longrightarrow [z_1, z_2, z_3]$$

est un contre-exemple au théorème précédent où B^m serait remplacé par $\mathbb{C}P^3$. En effet, tout d'abord on constate aisemment, à l'aide de la fibration de Hopf $S^5 \to \mathbb{C}P^2$ et la suite exacte d'homothopie attachée à cette fibration, que $\pi_3(\mathbb{C}P^2) = 0$. Par ailleurs v n'est singulière qu'au point $a = [0, 0, 0, 1]$ et $|\nabla v|(x) \simeq 1/dist(x, a)$. Donc, comme le domaine $\mathbb{C}P^3$ est de dimension 6, on obtient que u est dans $W^{1,p}(\mathbb{C}P^3, \mathbb{C}P^2)$ pour $p < 6$ et en particulier dans $W^{1,3}$. Nous démontrons maintenant que u n'est pas approximable par des applications régulières dans $W^{1,3}(\mathbb{C}P^3, \mathbb{C}P^2)$. En effet u réalise l'identité de la cellule bidimensionnelle de $\mathbb{C}P^3$ dans la cellule bidimensionnelle $\mathbb{C}P^1$ de $\mathbb{C}P^2$: $v([z_1, z_2, 0, 0]) = [z_1, z_2, 0]$ (voir [MS] pour la décomposition cellulaire de $\mathbb{C}P^n$). On en déduit qu'une telle application n'est pas étendable à tout $\mathbb{C}P^3$ en une application régulière dans $\mathbb{C}P^3$ car v^* réaliserait alors un isomorphisme de cohomologie de $H^*(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha]/\alpha^3$ dans $H^*(\mathbb{C}P^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\beta]/\beta^4$ avec $v^*\alpha = \beta$ ce qui est impossible. Si donc v était approximable fortement par une suite d'applications régulières v_n dans $W^{1,3}(\mathbb{C}P^3, \mathbb{C}P^2)$, en utilisant le théorème de Fubini, on pourrait trouver une sous suite $v_{\phi(n)}$ et une surface S, isotope à la cellule bidimensionnelle $\mathbb{C}P^1 \simeq \{[z_1, z_2, 0, 0]\}$, telle que $v_{\phi(n)}$ converge fortement vers v dans $W^{1,3}(S, \mathbb{C}P^2)$. Les injections de Sobolev nous donne alors la convergence uniforme de $v_{\phi(n)}$ vers v sur S, donc, pour n suffisament grand, $v_{\phi(n)}$ réalise une extension régulière de l'identité de $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^3$ dans $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$, ce qui est impossible comme nous l'avons vu plus haut. En fait v n'est même pas approximable faiblement dans $W^{1,3}$ car une convergence faible dans $W^{1,3}$ donnerait toujours une convergence forte dans C^0 sur une cellule bidimensionnelle générique S et on aurait la même contradiction.

Le contre-exemple précédent illustre l'existence d'obstructions **globales** à l'approximation forte par des applications régulières dans les espaces de Sobolev entre variétés. Tandis que le théorème plus haut donne l'existence d'obstructions **locales** dues au seul $\pi_{[sp]}(N)$. La différence majeures entre ces obstructions **globales** et les obstructions **locales** est que les premières sont délocalisées (on peut très bien approximer v plus haut, fortement dans $W^{1,3}(\mathbb{C}P^3, \mathbb{C}P^2)$, par des applications régulières dans un voisinage fixe du point singulier a, du moment que l'on "autorise la singularité a à réapparaître quelque part"). Tandis que les obstructions **locales** sont fixes dans l'espace : il n'est pas possible d'approximer u plus haut dans $W^{1,2}(B^3, S^2)$ par une suite d'applications régulières dans un voisinage fixe de la singularité limite 0. C'est ce phénomène que nous voulons étudier ici et c'est pour cela que nous nous restreignons désormais aux domaines $M = B^m$. Nous nous restreindrons aussi à $s = 1$ même si certains résultats plus bas s'étendent à des espaces de Sobolev fractionnaires (voir [Be3], [Ri2]...).

Lorsque $\pi_{[p]}(N) \neq \emptyset$, sachant que $C^\infty(B^m, N)$ est trop petit pour "couvrir" tout $W^{1,p}(B^m, N)$ par densité forte, on fabrique l'espace suivant :

$$
\begin{aligned}
R^{\infty,p}(B^m, N) = \big\{ & u \in C^\infty(B^m \setminus K, N) \cap W^{1,p}(B^m, N) \\
& K \text{ sous-var. de } B^m \text{ de dim. } n - [p] - 1 \\
& \forall x \in K \quad [u|S_x K] \neq 0 \text{ dans } \pi_{[p]}(N) \big\}
\end{aligned}
$$

où SK est le fibré en sphère issu du fibré normal de K (plongé dans B^m), $S_x K$ est la fibre au dessus de $x \in K$ et $u|S_x K$ est la restriction de u à cette sphère $[p]-$dimensionnelle. On a alors le théorème suivant.

Theorem I.2 *[Be1] Pour* $[p] > 1$

$$
\overline{R^{\infty,p}(B^m, N)}^{W^{1,p}} = W^{1,p}(B^m, N)
$$

<u>Exemple</u> : $R^{\infty,2}(B^3, S^2)$ est constitué des applications u de $W^{1,2}(B^3, S^2)$, régulières en dehors d'un nombre fini de points isolés, tels que u restreinte aux sphères centrés en ces points ,et de rayon suffisament petit, ait un degré non nul. Par exemple $u\ :\ x \to \frac{x}{|x|}$ n'est pas dans $\overline{C^\infty(B^3, S^2)}^{W^{1,2}}$ mais par contre, clairement, $u \in R^{\infty,2}(B^3, S^2)$.

Definition I.1 *Etant donné u dans $R^{\infty,k}(B^m,N)$ on définit l'ensemble singulier topologique de u, $Sing_{top}u$, comme étant la $\pi_{[k]}(N)$-chaîne bémol obtenue à partir de l'ensemble singuler K de u affecté en chaque point x de la multiplicité $[u|S_xK]$ dans $\pi_{[k]}(N)$.*

Les G-chaînes bémol (G-Flat chain) sont définies dans [Fe], voir aussi [GMS].

Exemple : les ensemble singuliers topologiques des éléments de $R^{\infty,1}(B^3,\mathbb{R}P^2)$ sont les courbes non-orientées de B^3 (i.e. $\pi_1(\mathbb{R}P^2)=\mathbb{Z}_2$).

Question : La question principale que nous posons tout au long de cet exposé est la suivante. Etant donnée une suite u_n dans $R^{\infty,k}(B^m,N)$, convergeant fortement dans $W^{1,k}(B^m)$ vers un u limite, peut-on espérer une convergence quelconque des $\pi_{[k]}(N)$-chaînes bémol $\text{Sing}_{top}u_n$ vers un "objet" limite "$\text{Sing}_{top}u$" qui ne dépendrait que de u et qui caracteriserait l'approximabilité de u par des applications régulières dans $W^{1,k}$ (en particulier $\text{Sing}_{top}u=0$ si et seulement si $u\in\overline{C^\infty(B^m,N)}^{W^{1,k}}$). Un tel "objet" serait alors l'"ensemble singulier topologique" de u.

Comme nous le verons plus bas cette compréhension du comportement des suites d'ensembles singuliers topologiques d'applications convergeant fortement dans l'espace de Sobolev considéré est liée au problème de la densité faible séquentielle.

II Un cas bien compris : le $\pi_p(S^p)$

On considère $p\in\mathbb{N}$ quelconque, $N=S^p$ la sphère de dimension p et $W^{1,k}(B^m,S^p)$ pour $[k]=p$ et $m>p$. Dans un soucis de clarté nous présentons ce cas pour $k=p=2$ et $m=3$, sachant que l'ensemble des résultats ci-dessous s'étendent au cas général.

Considérons donc $u_n\in R^{\infty,2}(B^3,S^2)$ convergeant fortement dans $W^{1,2}$ vers $u\in W^{1,2}(B^3,S^2)$. les $\text{Sing}_{top}u_n$ sont des points affectés de multiplicités entiéres et s'identifient avec des mesures atomiques $\sum_i d_i^n\ \delta_{a_i^n}$. Il n'est pas difficile de voir que ces distributions se caractérisent par le défaut suivant de commutation de la différentiation extèrieure et du pull-back par u_n :

$$\sum_i d_i^n\ \delta_{a_i^n}=*d(u_n^*\omega)$$

où ω est une 2 forme quelconque sur S^2 vérifiant $\int_{S^2}\omega=1$. On déduit sans difficultés de la convergence forte $W^{1,2}$ de u_n que

$$*d(u_n^*\omega) \longrightarrow *d(u^*\omega) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(B^3) \quad .$$

Ainsi donc les $\mathrm{Sing}_{top} u_n = \sum_i d_i^n \ \delta_{a_i^n}$ convergent vers une limite $*d(u^*\omega)$ indépendante de u_n qui est l'ensemble singulier topologique de u recherché. On a par ailleurs le théorème suivant.

Theorem II.3 *[Be2]*

$$d(u^*\omega) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \in \overline{C^\infty(B^3, S^2)}^{W^{1,2}}$$

Le lien entre les ensembles singuliers topologiques et la densité faible séquentielle des applications régulières se comprend à partir du résultat suivant.

Theorem II.4 *[Be2] [BCL][GMS] Soit $u \in W^{1,2}(B^3, S^2)$, il existe un courant 1 dimentionnel rectifiable I vérifiant*

$$\partial I = *d(u^*\omega) \tag{II.1}$$

$$8\pi M(I) \leq \int_{B^3} |\nabla u|^2 \tag{II.2}$$

où $M(I)$ est la masse (ou longueur) de I.

Lorsque $d(u^*\omega) \neq 0$, afin d'approximer faiblement u par des applications régulières, il suffit de retirer les singularités topologiques en utilisant une énergie $W^{1,2}$ finie. Cela se fait, voir [Be2], en insérant des recouvrements de S^2 le long de I et en invoquant le contrôle d'énergie donné par (II.2), ce qui coûte exactement $8\pi M(I)+\varepsilon$ (ε aussi petit que l'on veut). On établit ainsi la densité des applications régulières dans $W^{1,2}(B^3, S^2)$ pour la topologie faible séquentielle.

Theorem II.5 *[Be2] Pour tout u dans $W^{1,2}(B^3, S^2)$ il existe u_n dans $C^\infty(B^3, S^2)$ qui converge faiblement vers u dans $W^{1,2}$.*

Finallement nous donnons une autre façon élégante de caractériser l'ensemble singulier topologique d'une application de $W^{1,2}(B^3, S^2)$, constante au bord de B^3, comme étant les "trous" de son graphe :

Theorem II.6 *[GMS] Soit u dans* $W^{1,2}(B^3,S^2)$ *et* u_n *dans* $C^\infty(B^3,S^2)$ *convergeant faiblement dans* $W^{1,2}$ *vers u, alors il existe une sous suite* $u_{n'}$ *et un courant 1-dimensionnel rectifiable tel que*

$$Graph_{u_n} \longrightarrow Graph_u + I\times[S^2]$$

$Graph_u$ *est le graphe de u vu comme un courant 3-dimensionnel de* $B^3\times S^2$ *et la convergence ci-dessus est la convergence faible des courants. Enfin on a*

$$\partial Graph_u = -\partial I\times[S^2] \quad \text{avec} \quad \partial I = *d(u^*\omega)$$

III L'exemple d'un cas plus complexe : le $\pi_3(S^2)$.

Nous considérons ici le cas le plus simple, parmi les groupes d'homotopie de sphère qui soit infini, et qui ne soit pas un $\pi_p(S^p)$. On prend $N{=}S^2$, $m=4$ et $k=3$ c'est à dire $W^{1,3}(B^4,S^2)$. $R^{\infty,3}(B^4,S^2)$ est constitué des applications de $W^{1,3}(B^4,S^2)$ qui sont régulières en dehors d'un nombre fini de points et réalisant des élements non triviaux du $\pi_3(S^2)=\mathbb{Z}$ sur les sphères suffisament petites centrées en ces points. A nouveaux, les ensembles singuliers topologiques s'identifient aux mesures atomiques à multiplicités entières. Etant donnée, une nouvelle fois, une suite u_n d'éléments de $R^{\infty,3}(B^4,S^2)$ convergeant fortement vers une application u de $W^{1,3}(B^4,S^2)$ on se pose la question de l'existence de la limite de $\text{Sing}_{top}u_n$. Rappelons que la classe de $\pi_3(S^2)$ à laquelle appartient une application régulière $\phi : S^3\longrightarrow S^2$ est donnée par le degré de Hopf de ϕ, $H(\phi)$ (coefficient d'enlacement de paires d'images réciproques de points réguliers de ϕ) qui admet l'expression intégrale suivante

$$H(\phi)=\int_{S^3}\eta\wedge\phi^*\omega$$

où ω est une 2-forme quelconque sur S^2 normalisée par $\int_{S^2}\omega=1$ et η est une 1-forme quelconque vérifiant $d\eta=\phi^*\omega$. Une intégration par partie simple nous donne alors que, similairement au cas de $R^{\infty,2}(B^3,S^2)$, l'ensemble singulier topologique de u_n dans $R^{\infty,3}(B^4,S^2)$ s'écrit

$$\text{Sing}_{top}u_n=\sum_i d_i^n\ \delta_{a_i^n} = *d(\eta_n\wedge u_n^*\omega)$$

où ω, à nouveau, est une 2-forme quelconque sur S^2 normalisée par $\int_{S^2}\omega = 1$ et η_n est une 1-forme quelconque vérifiant $d(\eta_n) = u_n^*\omega$. Notre préoccupation principale est alors d'étudier une éventuelle convergence de $*d(\eta_n \wedge u_n^*\omega)$ et par exemple de vérifier si, comme dans le cas $W^{1,2}(B^3, S^2)$, il existe ou non une suite de courants 1-dimensionnels I_n connectant $\sum_i d_i^n\ \delta_{a_i^n}$ $(\partial I_n = \sum_i d_i^n\ \delta_{a_i^n})$ de masses uniformément bornées (i.e. $\|\sum_i d_i^n\ \delta_{a_i^n}\|_{W^{-1,1}} \leq C$ indépendant de n). Une telle tentative se heurte au problème suivant : étant donnée u dans $W^{1,3}(B^4, S^2)$, on démontre sans difficultés que cette fois $d(u^*\omega) = 0$ et la 1-forme η vérifiant $d\eta = u^*\omega$ de régularité “maximale” est a-priori la jauge de Coulomb, solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} d\eta = u^*\omega & \text{dans } \mathcal{D}^2(B^4) \\ d^*\eta = 0 & \text{dans } \mathcal{D}^1(B^4) \\ \iota^*_{\partial B^4} * \eta = 0 & \end{array}\right.$$

où $\iota_{\partial B^4}$ est l'inclusion de ∂B^4 dans $\mathbb{R}^4$. Pour u dans $W^{1,3}(B^4)$, $u^*\omega$ est dans $L^{3/2}(B^4)$ et donc la solution η de ce problème est dans $L^{\frac{12}{5}}(B^4) \supset\supset L^3(B^4)$. Ainsi, a-priori, $\eta \wedge u^*\omega$ n'est pas dans $L^1_{loc}(B^4)$ et ca semble bien difficile de lui donner un sens dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dans [Ri1] nous démontrons en fait que le petit calcul précédent est optimal en établissant que, lorsque $d \to +\infty$,

$$\log \inf\left\{\int_{S^3} |\nabla\phi|^3 \quad \text{où } \phi : S^3 \to S^2 \quad \text{avec } H(\phi) = d\right\} \simeq \frac{3}{4}\log\ d \qquad \text{(III.3)}$$

Ce $\frac{3}{4}$ qui remplace le 1 que l'on obtient lors de la minimisation de la p-énergie sur les applications de S^p dans S^p, ressort naturellement lorsque l'on majore naïvement le degré de Hopf, exprimé au moyen de la jauge de Coulomb, par l'énergie $W^{1,3}$. On démontre qu'il est optimal au sens (III.3) en utilisant des applications dont les images réciproques sont auto-enlacées (voir [Ri1]). Il est la source de toutes les difficultées rencontrées plus bas dans cet exposé. Comme nous le montrons dans [HR], (III.3) permet de construire une suite u_n dans $R^{\infty,3}(B^4, S^2)$ telle que

$$u_n \to u \qquad \text{fortement dans } W^{1,3}$$

mais

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\left\{M(I_n) \qquad \text{tel que } \partial I_n = \text{Sing}_{top} u_n\right\} = +\infty$$

et a-priori on ne voit pas comment $\text{Sing}_{top} u_n$ pourait converger dans $\mathcal{D}'(B^4)$. Il faut donc envisager des convergences dans des espaces plus grands pour des objets dont la masse peut tendre vers l'infini.

IV L'introduction des "scans".

Devant l'impossibilité de faire converger, dans $\mathcal{D}'(B^4)$, nos ensembles singuliers topologiques d'applications de $R^{\infty,3}(B^4, S^2)$ convergeant fortement vers une application limite u de $W^{1,3}(B^4, S^2)$, nous adoptons l'approche de Giaquinta Modica et Soucek dans le cas du $\pi_p(S^p)$ et nous nous interressons à une éventuelle convergence des graphes de suites d'applications de $C^\infty(B^4, S^2)$, approximant notre application u, supposée donc être dans la fermeture des applications régulières pour la topologie faible séquentielle.

Soit donc $u_n \in C^\infty(B^4, S^2)$, $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,3}$. On supposera, pour simplifier la présentation, que u_n et u sont constants sur le bord de B^4. Il n'est pas difficile de voir que pour tout u dans $W^{1,3}$, le graphe de u est un courant rectifiable (voir par exemple [GMS]) vérifiant

$$\partial Graph_u = 0 \quad .$$

Le bord du graphe ne caractérise donc pas, dans ce cas, le défaut d'approximabilité forte par des applications régulières (cela se vérifie aussi directement par de simples arguments dimensionnels). Etant donné par contre $v \in R^{\infty,3}(B^4, S^2)$, on démontre, du fait que $\pi_1(B_4 \setminus \text{Sing}_{top} v) = 0$, l'existence d'un relèvement $\tilde{v}$ de v pour la fibration de Hopf $h : S^3 \to S^2$ (i.e. $\tilde{v} : B^4 \to S^3$ tel que $h \circ \tilde{v} = v$). Pour un tel $\tilde{v}$ on a

$$\partial(Graph_{\tilde{v}}) = \text{Sing}_{top} v \times [S^3] \quad .$$

Le bord des graphes des relèvements caractérise donc les singularités topologiques. On est ainsi ammené a prendre des relèvements réguliers $\tilde{u}_n$ de nos applications u_n et étudier la convergence éventuelle de $Graph \tilde{u}_n$ vers une limite qui s'écrirait "$Graph \tilde{u} + I \times [S^3]$" où I serait un ensemble "raisonnable" connectant les singularités topologiques de u. Il existe des opérations de relèvement par la fibration de Hopf optimisant la régularité qui s'apparente à l'extraction de jauges de Coulomb décrite plus haut (voir [HR]). Soient donc $\tilde{u}_n$ ces relèvements de Coulomb. Ils sont réguliers, mais on a un contrôle dans $W^{\frac{12}{5}}$ seulement. Un contrôle de la norme $W^{1,3}$ de ces relèvement donnerait un contrôle uniforme des masses $M(Graph_{\tilde{u}_n})$, ce qui est impossible au vu du contre-exemple mentionné à la fin de la section précédente. Il n'est donc pas possible d'avoir $M(Graph_{\tilde{u}_n}) \to +\infty$ par contre dans [HR] nous établissons la majoration suivante :

Soit e un vecteur de S^3 et $t \in \mathbb{R}$, on note P_t^e l'hyperplan tridimensionnel de $\mathbb{R}^4$ donné par $P_t^e = \{x \in \mathbb{R}^4 \quad ; \quad p^e(x) = x \cdot e = t\}$. On note, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, $< Graph\tilde{u}_n, p^e, t >$ le courant tranche obtenu en intersectant le graphe de $\tilde{u}_n$ avec $P_t^e \times S^3$ (cette intersection ne retient pas l'angle d'intersection mais juste son signe : voir les "slice currents" dans [Fe]). On a alors

$$\sup_{e \in S^3} \int_{-1}^{+1} M^{\frac{3}{4}}(< Graph\tilde{u}_n, p^e, t >) \, dt \leq C \ \left[1 + \int_{B^4} |\nabla u_n|^3\right] \qquad \text{(IV.4)}$$

Un tel contrôle de l'intégrale des masses des tranches à une puissance strictement inférieure à 1 nous incite à caractériser un objet au moyen de la collection de toutes (ou presque toutes) ses tranches. C'est la notion de scan à laquelle nous allons donner une définition complète plus bas.

Considérons le problème simplifié suivant : on se donne une suite d'union de courbes $C_n = \cup_k \Gamma_n^k$, sans bords et immergées dans le cube bidimensionnel $[0,1]^2$. Supposons que l'on contrôle

$$\sup_{e \in S^1} \int_{-1}^{+1} Card^{\alpha}(C_n \cap P_t^e) \, dt \leq C \qquad \text{indép. de } n \qquad \text{(IV.5)}$$

Si $\alpha = 1$, le contrôle précédent nous donne le contrôle de la longueur totale de C_n, $M(C_n) \leq C$, indépendament de n. Sachant que $\partial C_n = \emptyset$ on est en mesure d'appliquer le théorème de compacité de Federer-Fleming et de déduire que, modulo extraction d'une sous-suite, C_n converge au sens des courants vers un courant rectifiable limite C.

Lorsque $\alpha < 1$, (IV.5) ne garantit aucun contrôle de la longueur totale de nos lignes et il n'y a aucune raison qui permette de déduire une convergence quelconque de C_n au sens des distributions. On introduit alors l'application μ_n de $\mathbb{R} \times S^1$ dans l'espace des mesures atomiques sur $\mathbb{R}^2$, noté $\mathcal{M}$, qui à presque tout (t, e) associe le courant tranche obtenu en intersectant C_n avec la droite P_t^e orientée par e :

$$\mu_n(t, e) =< C_n, p^e, t >= \sum_{i=1}^{N_t^e} n_i \delta_{a_i}$$

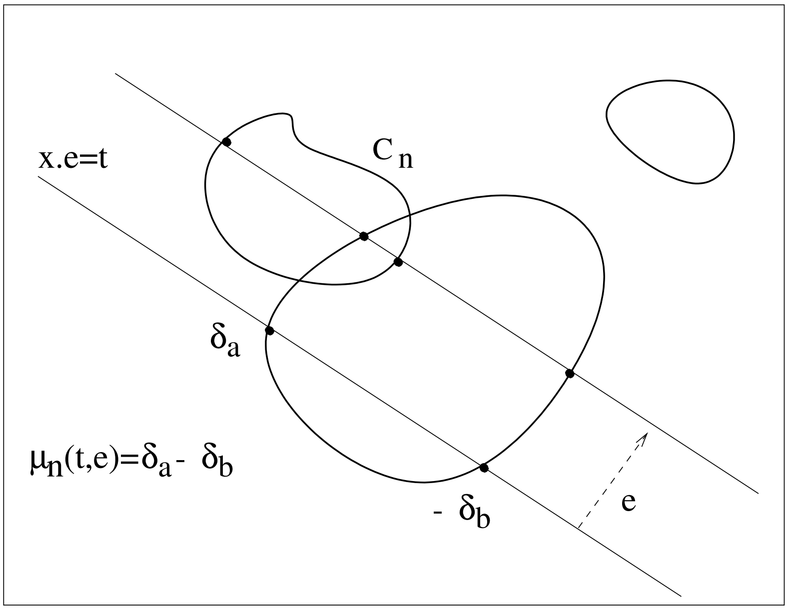

Figure 1: Le scan des courbes C_n du plan est une application mesurable des droites dans les mesures atomiques à coefficients entiers obtenue en tranchant C_n par ces droites.

où $n_i \in \mathbb{Z}$. Etant donné un repère (e_1, e_2) de référence, on munit $\mathcal{M}$ de la métrique suivante

$$d(\mu, \mu') = \inf \left\{ M^\alpha(S) + \sum_{k=1}^{2} \int_{-\infty}^{+\infty} M^\alpha(< T, p_k^e, t >) \; dt \qquad \text{où } \mu - \mu' = S + \partial T \right\}$$

et on vérifie que μ_n, ci-dessus, est mesurable de $\mathbb{R} \times S^1$ dans $\mathcal{M}$ muni de la topologie induite par d (le fait que d soit une métrique utilise $\alpha \leq 1$). Généralement on appelle “scan” une application mesurable de $\mathbb{R} \times S^1$ dans $\mathcal{M}$.

La condition de bord nul sur C_n se traduit par une condition de bord nul sur μ_n qui est la condition de compatibilitè permettant de dire que μ_n est le scan d'un “objet” sous-jacent du plan. La condition (IV.5) et la condition de bord nul impliquent la régularité suivante sur μ_n : Il existe une fonction F_n dans $L^{\frac{1}{\alpha}}(\mathbb{R})$-faible, $L^{\frac{1}{\alpha},\infty}(\mathbb{R})$ telle que pour tout e dans S^1

$$d(\mu_n(t, e), \mu_n(t', e)) \leq F_n(t) \; |t - t'|^\alpha$$

avec

$$\|F_n\|_{L^{\frac{1}{\alpha},\infty}(\mathbb{R})} \leq C \sup_{e\in S^1} \int_{-1}^{+1} Card^{\alpha}(C_n \cap P_t^e)$$

Un tel contrôle uniforme de cette régularité nous permet alors d'établir que, modulo l'extraction d'une sous suite, μ_n converge presque partout vers un scan limite μ, objet limite enfin exhibé mais a-priori enigmatique et qu'il convient d'étudier dans les cas particuliers qui nous occupe. Lorsque $\alpha = 1$ on retrouve la caractérisation de L.Ambrosio et B.Kirchheim des objets rectfiables au moyen d'application faiblement BV à valeur dans des espaces métriques.

On revient au problème d'origine et à la suite u_n d'applications de $C^\infty(B^4, S^2)$ convergeant faiblement dans $W^{1,3}$ vers u. A chaque u_n on peut associer le scan de son relevé de Coulomb

$$G_{\tilde{u}_n} \ : \ \mathbb{R} \times S^3 \longrightarrow \mathcal{R}^3(B^4 \times S^3)$$

$$(t, e) \longrightarrow < Graph_{\tilde{u}_n}, p^e, t >$$

l'espace $\mathcal{R}^3(B^4 \times S^3)$ désignant les courants rectfiables de $B^4 \times S^3$. Sur $\mathcal{R}^3(B^4 \times S^3)$ on considère la distance

$$d(G, G') = \inf \left\{ M^{\frac{3}{4}}(S) + \sum_{k=1}^{4} \int_{-\infty}^{+\infty} M^{\frac{3}{4}}(< T, p_k^e, t >) \ dt \qquad \text{où } G - G' = S + \partial T \right\}$$

où (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base fixée de $\mathbb{R}^4$. Et à nouveau le contrôle uniforme (IV.4) se traduit en régularité pour $G_{\tilde{u}_n}$: Il existe une fonction F_n dans $L^{\frac{4}{3},\infty}(\mathbb{R})$ tel que pour tout e dans S^3

$$d(G_{\tilde{u}_n}(t, e), G_{\tilde{u}_n}(t', e)) \leq F_n(t) \ |t - t'|^{\frac{3}{4}}$$

avec

$$\|F_n\|_{L^{\frac{4}{3},\infty}(\mathbb{R})} \leq C \sup_{e\in S^3} \int_{-1}^{+1} M^{\frac{3}{4}}(< Graph\tilde{u}_n, p^e, t >) \ dt$$

Nous établissons alors le résultat suivant qui est l'analogue pour $W^{1,3}(B^4, S^2)$ du théorème II.6

Theorem IV.7 *[HR] Soit u_n dans $C^\infty(B^4, S^2)$ convergeant faiblement dans $W^{1,3}$ vers u. Alors, modulo l'extraction d'une sous-suite, on a la convergence presque partout suivante des scans des relevés de Coulomb*

$$G_{\tilde{u}_n} \longrightarrow G_{\tilde{u}} + I \times [S^3] \qquad \text{(IV.6)}$$

oú $I \times [S^3]$ est le scan d'un ensemble rectifiable $\Gamma \times S^3$ dans $B^4 \times S^3$ muni d'une multiplicité θ, mesurable de Γ dans $\mathbb{Z}$ telle que

$$\int_\Gamma |\theta|^{\frac{3}{4}} \tag{IV.7}$$

On a au sens des scans

$$\partial(G_{\tilde{u}} + I \times [S^3]) = 0 \tag{IV.8}$$

Il existe un couple (Γ_0, θ_0) minimisant (IV.7) sous la contrainte (IV.8) et on a que u est fortement approximable dans $W^{1,3}$ par des applications régulières si et seulement si

$$\int_{\Gamma_0} |\theta_0|^{\frac{3}{4}} = 0$$

Nous pensons que l'existence d'un tel I qui complète le scan du relevé de Coulomb de u au sens (IV.8), caractérise les applications qui sont dans la fermeture des applications régulières pour la topologie faible séquentielle. La réciproque est encore ouverte. Il n'est pas impossible que cette fermeture ne décrive pas tout $W^{1,3}(B^4, S^2)$. Tandis que les problèmes de densité des applications régulières dans les espaces fonctionnels entre variétés pour la topologie forte sont bien compris (voir [Be1] et [HL]) les mêmes problèmes pour la topologie faible séquentielle sont encore largement ouverts (voir [PR]).

Récemment nous nous sommes rendu-compte qu'il est possible, afin de mettre en évidence les scans $I \times [S^3]$, d'éviter le passage par les relevés des applications dans S^2 en application dans S^3, qui est très spécifique au $\pi_3(S^2)$. Une telle approche, dont la description dépasse le cadre de cet exposé, permet alors d'envisager, dans le cas général d'une variété quelconque N, une identification semblable de connections des ensembles singuliers topologiques issus de la partie infinie du $\pi_p(N)$, $\pi_p(N) \otimes \mathbb{Q}$, donnée par les expressions intégrales de S.P.Novikov (voir [Nov]) au moyen de scans. Les scans semblent cependant être nécéssaires pour mener à bien une telle approche. On s'attend, en effet, à cause de considérations semblables à celle qui ont mis en évidence le 3/4 plus-haut et exposées dans [Gr] (voir la section sur l'homotopie quantitative), à ce que cette puissance soit remplacée par d'autres puissances strictement inférieure à 1 (sauf dans le cas simple $\pi_p(S^p)$ décrit en section II) et donc à ce que les masses de ces connections I soient infinies.

References

[AK] L.Ambrosio and B.Kirchheim "Rectifiable sets in Banach and metric Spaces" Math. Anna., 318, (2000), 527-555.

[Be1] F. Bethuel, "The approximation problem for Sobolev mappings between manifolds", Acta Mathematica, 167, (1991) 167-201.

[Be2] F. Bethuel, "A characterization of maps in $H^1(B^3, S^2)$ which can be approximated by smooth maps", Ann. Inst. Henri Poincaré, $\underline{7}$, 269–286, (1990).

[Be3] F. Bethuel, "Approximations in trace spaces defined between manifolds", Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 24, No. 1, (1995), 121-130.

[BBC] F. Bethuel, H. Brezis, and J. M. Coron, "Relaxed energies for harmonic maps",in Variational Problems (H. Berestycki, J. M. Coron, I. Ekeland, eds.), Birkhauser, (1990).

[BZ] F. Bethuel and X. Zheng, "Density of Smooth Functions between two Manifolds in Sobolev Spaces", J. Funct. Ana., $\underline{80}$, (1988), 60-75.

[BCL] H. Brezis, J.-M Coron and E. Lieb *Harmonic maps with defects*, Comm. Math. Phys. 107, (1986), 649-705.

[Fe] H. Federer, *Geometric measure Theory*, Springer (1996).

[GMS] M. Giaquinta, G. Modica and J. Soucek *Cartesian Currents in the Calculus of Variations I and II*, Springer (1998).

[Gr] M.Gromov "Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces", Progress in Mathematics, 152, Birkhaüser Boston, MA, 1999.

[HL] F.Hang and F.H.Lin "Topology of Sobolev mappings" prépublication (2000).

[HR] R.Hardt and T.Rivière "Connecting topological Hopf singularities" en préparation.

[MS] J.Milnor and J.Stasheff "Characteristic Classes" Annals of Mathematics Studies, no 76, Princeton University Press, (1974).

[Nov] S.P. Novikov “Analytical theory of homotopy groups” Lecture Notes in Math., 1346, Springer (1988), 99-112.

[PR] M.R.Pakzad and T.Rivière “Weak density of smooth maps for the Dirichlet energy between Manifolds” prépublication (2000).

[Ri1] T.Rivière “Minimizing Fibrations and p-Harmonic maps in Homotopy Classes from S^3 into S^2” Comm. Anal. Geom., 6, (1998), 427-483.

[Ri2] T.Rivière “On Dense subsets of $H^{\frac{1}{2}}(S^2, S^1)$”, Glob. Anal. and Geom. (2000).

[SU] R. Schoen and K. Uhlenbeck *Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps* J. Diff. Geom., 18 (1983), 253-268.